COMPITO SCRITTO DI

ROBOTICA I/ROBOTICA INDUSTRIALE (V.O.)

9 gennaio 2006

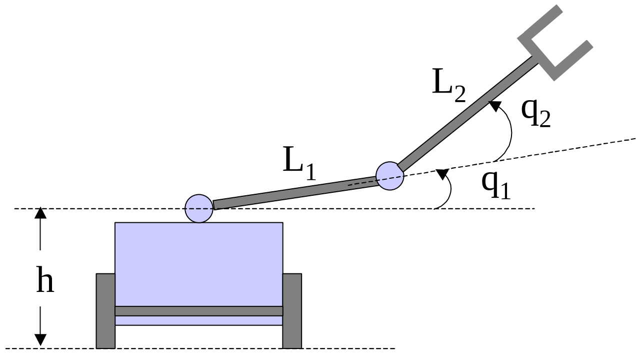

Fig. A

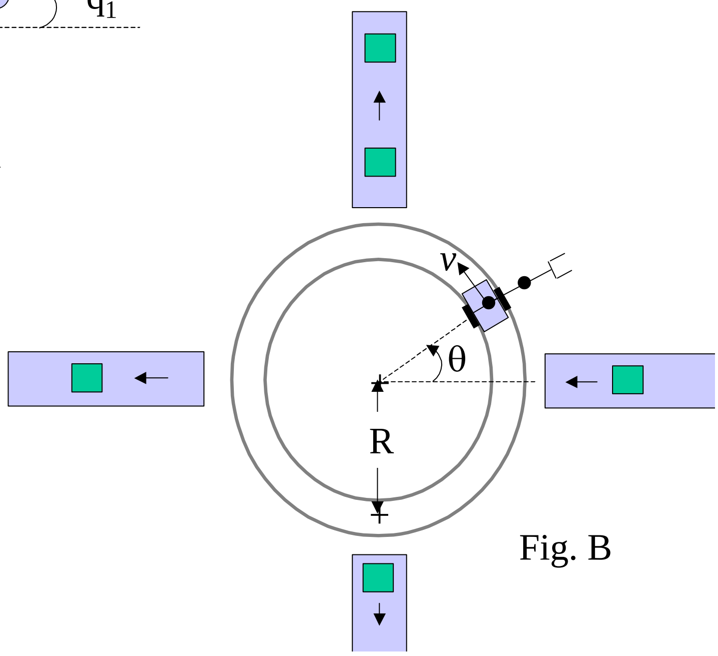

Fig. B

Il robot di Fig. A, costituito da una base mobile su cui è montato un manipolatore planare 2R, è utilizzato nel sistema di distribuzione di Fig. B per prelevare e depositare oggetti da/su nastri trasportatori. Le grandezze di comando a disposizione per questo sistema sono la velocità tangenziale *v* lungo il binario circolare, e le velocità di giunto $\dot{q}_1, \dot{q}_2$.

Considerando di interesse per il task il solo posizionamento nello spazio dell'organo terminale del manipolatore, fornire, per il sistema robotico di Fig. B:

1. l'espressione della cinematica inversa;
2. la cinematica differenziale, in funzione delle tre velocità di ingresso *v*, $\dot{q}_1, \dot{q}_2$;
3. le configurazioni singolari, tenendo presente che R > $L_1 + L_2$.

[tempo a disposizione: 2h, libri aperti]

SOLUZIONE

Poiché la base mobile del robot è vincolata a muoversi su un binario circolare, il sistema di Fig. B è equivalente, dal punto di vista cinematico, ad un robot antropomorfo con il primo braccio di lunghezza R.
In particolare, la configurazione del sistema è individuata dalle tre variabili angolari θ, q_1 e q_2, comandate direttamente dalle tre velocità $v = \dot{\theta}R$, $\dot{q}_1$ e $\dot{q}_2$.

Esercizio 1.

La cinematica inversa può essere ricavata facilmente per ispezione geometrica, e utilizzando quanto noto per il robot 2R.

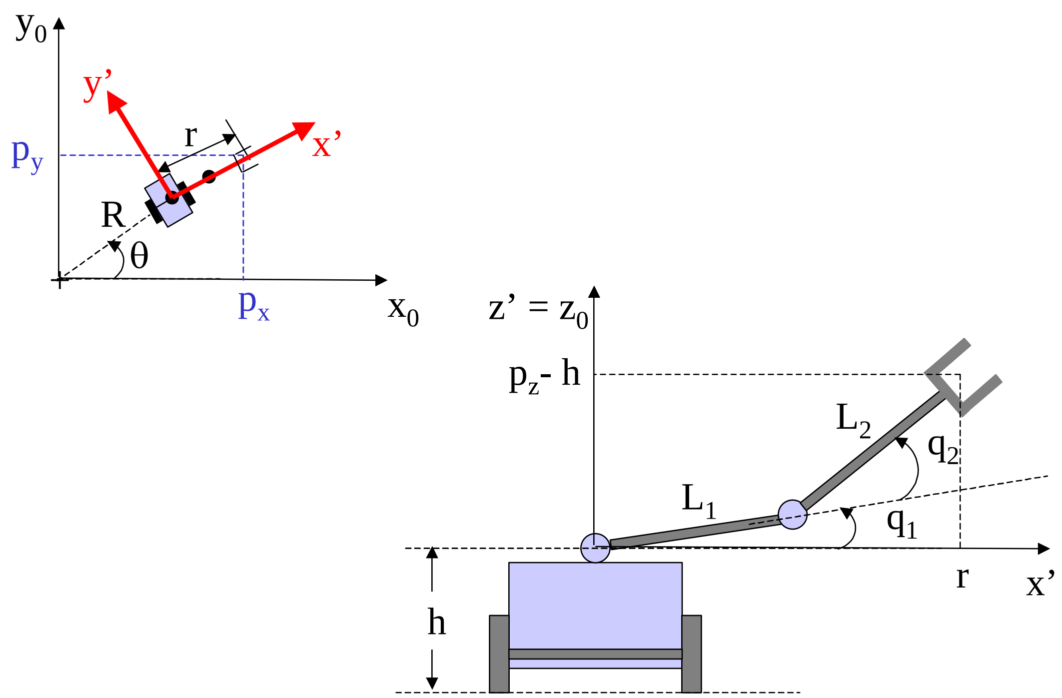

Fig. C

Fissati infatti i sistemi di riferimento (x_0, y_0, z_0) (fisso) e (x', y', z') (solidale con la base mobile) come in Fig. C, si ha:

$$p_x = (R + r)\cos\theta$$
$$p_y = (R + r)\sin\theta$$

da cui

$$\theta = \text{atan2}\left(p_y, p_x\right)$$
$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} - R \geq L_1 + L_2.$$

Inoltre, dalla cinematica diretta del 2R

$$r = L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2),$$
$$p_z - h = L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2),$$

invertendo la quale si ottengono le due soluzioni (gomito su/giù) per q_1 e q_2.

Esercizio 2

Anche il calcolo della cinematica differenziale del sistema di Fig. B può essere facilmente ricondotto a quello noto per il robot 2R. Infatti, si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = R_z(\theta) \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix},$$

dove $R_z(\theta)$ è la matrice elementare di rotazione intorno all'asse z di un angolo θ, ovvero

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inoltre (cinematica differenziale del 2R)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix} = J_{2R}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (J_{2R} = \text{Jacobiano del 2R})$$

e, per ispezione geometrica,

$$\dot{y}' = \dot{\theta}(R + r) = v\left(1 + \frac{L_1}{R}\cos q_1 + \frac{L_2}{R}\cos(q_1 + q_2)\right) = j_{21}(q_1, q_2)v,$$

con $j_{21}(q_1, q_2) > 0$, poiché $R > L_1 + L_2$ per ipotesi. Dunque

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} &= R_z(\theta) \begin{bmatrix} 0 & J_{2R,11}(q_1, q_2) & J_{2R,12}(q_1, q_2) \\ j_{21}(q_1, q_2) & 0 & 0 \\ 0 & J_{2R,21}(q_1, q_2) & J_{2R,22}(q_1, q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
&= R_z(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -L_1 \sin q_1 - L_2 \sin(q_1 + q_2) & -L_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 1 + \frac{L_1}{R}\cos q_1 + \frac{L_2}{R}\cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0 & L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) & L_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

da cui si deduce anche la soluzione dell'**Esercizio 3**. Infatti, essendo $R_z(\theta)$ sempre non singolare ed essendo il termine $j_{21}(q_1, q_2)$ sempre diverso da zero (in particolare, sempre positivo), le singolarità del sistema complessivo sono tutte e sole quelle del manipolatore 2R, ovvero quelle caratterizzate da $\sin q_2 = 0$.