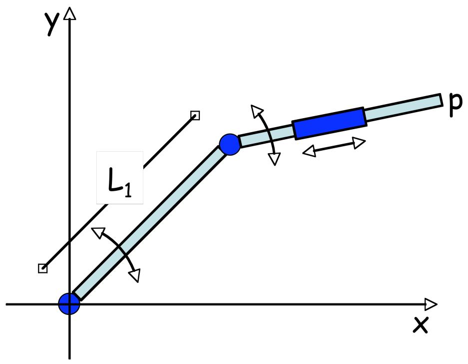
Prova Scritta di Robotica I

8 Gennaio 2007

Esercizio 1



- Determinare tutte le configurazioni singolari del robot planare RRP in figura.
- Per il problema di posizionamento dell'organo terminale nel piano di lavoro, questo robot è ridondante. Nell'ipotesi che il giunto prismatico abbia un'escursione (positiva e negativa) illimitata, fornire un'espressione analitica della cinematica inversa che associ ad ogni desiderata posizione $p = (p_x, p_y)$ dell'organo terminale una configurazione (tra le infinite possibili soluzioni cinematiche inverse) che sia *sempre* non singolare.
- Come si modificano tali formule analitiche nel caso in cui la variabile associata al giunto prismatico non possa assumere valori negativi?

Esercizio 2

Si consideri un robot manipolatore con n giunti ed un compito di moto assegnato $r = r_d(t)$ per l'organo terminale, con r di dimensione $m = n-1$. Il moto è comandato nello spazio dei giunti a livello di velocità $\dot{q}$, con uno schema digitale a passo fisso di campionamento T_c (i comandi di velocità sono costanti a tratti). I giunti hanno fondo corsa del tipo $q_i \in [q_{i,\min}, q_{i,\max}]$, $i = 1, \ldots, n$. Si scriva una procedura algoritmica che provveda (finchè possibile) alla corretta esecuzione della velocità $\dot{r}_d(t)$ in presenza di tali fondo corsa, sfruttando la ridondanza cinematica presente. L'algoritmo deve restituire un segnale di errore in caso di fallimento. Per semplicità, si trascurino possibili situazioni di singolarità.

Domanda 3

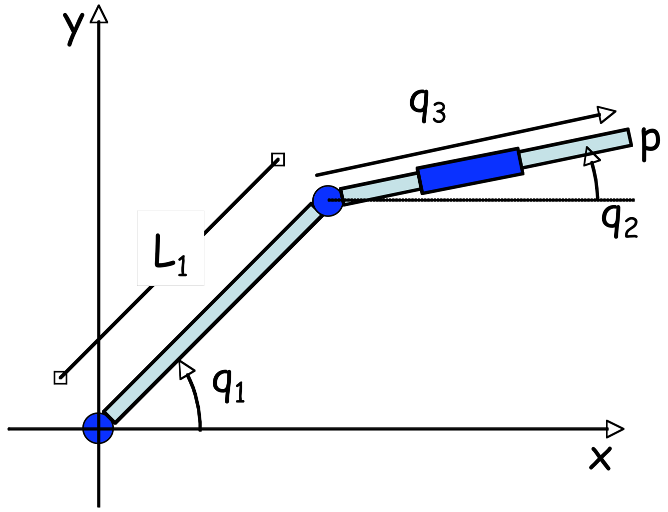
Illustrare brevemente i vantaggi e gli svantaggi dell'utilizzo di un sistema di visione per controllare il moto di un robot. Quali sono i possibili modi di posizionamento di una telecamera rispetto ad un robot a base mobile o fissa?

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

8 Gennaio 2007

Esercizio 1



Definite le coordinate generalizzate come in figura (i risultati sono indipendenti dalla particolare scelta), si ha

$$p = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + q_3 \cos q_2 \\ L_1 \sin q_1 + q_3 \sin q_2 \end{bmatrix} = f(q),$$

da cui lo Jacobiano analitico 2×3

$$J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin q_1 & -q_3 \sin q_2 & \cos q_2 \\ L_1 \cos q_1 & q_3 \cos q_2 & \sin q_2 \end{bmatrix}.$$

Dall'analisi dei tre minori (ottenuti eliminando una delle tre colonne) si verifica facilmente che lo Jacobiano cade di rango (ossia, il robot è in singolarità) se e solo se $q_3 = 0$ e $q_2 = q_1 \pm \pi/2$. La seconda condizione corrisponde a $\theta_2 = \pm\pi/2$, nel caso si fosse utilizzato l'angolo relativo θ_2 tra primo e secondo braccio come variabile del secondo giunto (come nella convenzione di D-H).

Nelle ipotesi del problema, un'espressione analitica della cinematica inversa si può ottenere bloccando il secondo braccio in posizione stesa ($q_2 = q_1$) in modo che la struttura robotica "punti" verso la posizione desiderata (come un robot RP). Si ha dunque

$$\begin{aligned} q_1 &= \mathrm{ATAN2}\{p_y, p_x\} \\ q_2 &= q_1 \\ q_3 &= \|p\| - L_1. \end{aligned}$$

Questa particolare soluzione non è **mai** singolare.

Se ci si restringe al caso in cui $q_3 \in [0, +\infty)$, la soluzione precedente vale solo quando $\|p\| \geq L_1$. In caso contrario, la soluzione diventa

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \text{ATAN2}\{p_y, p_x\} \\
q_2 &= q_1 \pm \pi \\
q_3 &= L_1 - \|p\|.
\end{aligned}
$$

Si noti che, introducendo la funzione

$$
\text{signum}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases},
$$

è possibile includere entrambe le situazioni in un'unica espressione:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \text{ATAN2}\{p_y, p_x\} \\
q_2 &= q_1 \pm \frac{\pi}{2}\left[1 + \text{signum}(L_1 - \|p\|)\right] \\
q_3 &= L_1 - \|p\|.
\end{aligned}
$$

Di nuovo, questa particolare soluzione non è mai singolare. Si noti tuttavia che quando la posizione p è nelle vicinanze della circonferenza di raggio L_1, piccoli spostamenti attraverso tale circonferenza implicano una riconfigurazione di π per il secondo giunto. E' evidente che nel caso di inversione di un moto cartesiano continuo (traiettoria desiderata) che attraversi tale circonferenza, è necessario risolvere la cinematica inversa a livello differenziale e sfruttare esplicitamente la ridondanza del robot per mantenersi lontano dalle singolarità e/o dai fondo corsa.

Esercizio 2

Si definisca con x^k il valore campionato di una generica variabile vettoriale $x(t)$ all'istante $t = kT_c$ ($x^k = x(kT_c)$), per $k = 0, 1, 2, \ldots$. Fino a quando il moto nello spazio dei giunti ottenuto per inversione del moto cartesiano desiderato non viola i limiti di giunto, i comandi di velocità ai giunti si possono (a tempo continuo) ottenere utilizzando la pseudoinversa dello Jacobiano del robot,

$$
\dot{q}(t) = J^{\#}(q(t))\, \dot{r}_d(t),
$$

dove $J(q) = \partial f(q)/\partial q$ e $f(q)$ è la cinematica diretta relativa al compito assegnato.

Nel caso in cui il moto generato in tal modo porti a violare il limite (inferiore o superiore) del campo ammissibile di uno dei giunti (ad esempio, l'i-esimo), si può bloccare il movimento di tale giunto (imponendo $\dot{q}_i = 0$) e ricalcolare le velocità dei giunti restanti tramite inversione della matrice Jacobiana J_{-i} (di dimensioni $m \times m$, con $m = n - 1$) ottenuta eliminando la colonna i-esima dallo Jacobiano originale:

$$
J_{-i}(q) = \begin{bmatrix} j_1(q) & \ldots & j_{i-1}(q) & j_{i+1}(q) & \ldots & j_m(q) \end{bmatrix},
$$

dove j_l è l'l-esima colonna di J. Si avrà allora

$$\dot{q}(t) = J_{-i}^{-1}(q(t))\,\dot{r}_d(t).$$

Nel caso in cui anche tale moto porti a violare un limite di giunto, non esisterà soluzione al problema in quanto non si ha a disposizione ulteriore ridondanza cinematica.

Per valutare la possibile violazione dei limiti di giunto dovuti ai comandi di velocità imposti al k-esimo istante di campionamento, si utilizza la semplice espressione

$$q^{k+1} = q^k + \dot{q}^k\,T_c$$

da valutarsi componente per componente. Supponendo che la configurazione iniziale q^0 sia ammissibile per i vincoli di giunto ($q^0 \in [q_{\min}, q_{\max}]$) e associata al punto iniziale della traiettoria cartesiana desiderata ($f(q^0) = r_d(0)$), si può quindi scrivere la seguente procedura di soluzione:

k = 0
while k $\geq$ 0
$\dot{q}^k_{\text{temp}} = J^{\#}(q^k)\,\dot{r}^k_d$
$q^{k+1}_{\text{temp}} = q^k + \dot{q}^k_{\text{temp}}\,T_c$
% verifica ammissibilità soluzione generale
i = 0
while i $\leq$ n
if $q^{k+1}_{\text{temp},i} \in [q_{i,\min}, q_{i,\max}]$ then i = i + 1
else
% costruzione soluzione con giunto i bloccato
  $\dot{q}^k_{\text{temp}} = J_{-i}^{-1}(q^k)\,\dot{r}^k_d$
  $q^{k+1}_{\text{temp}} = q^k + \dot{q}^k_{\text{temp}}\,T_c$
% verifica ammissibilità soluzione con giunto i bloccato
  i = 0
  while i $\leq$ n
  if $q^{k+1}_{\text{temp},i} \in [q_{i,\min}, q_{i,\max}]$ then i = i + 1
  else
    return FAILURE
% aggiornamento ammissibile
$\dot{q}^k = \dot{q}^k_{\text{temp}}$
$q^{k+1} = q^k + \dot{q}^k\,T_c$
k = k + 1

* * * * *