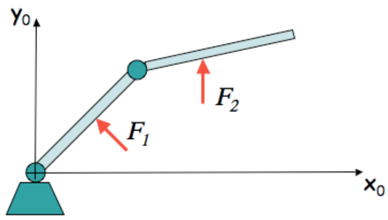
Prova Scritta di Robotica I

2 Luglio 2008

Esercizio 1



Si consideri un robot planare a due giunti rotoidali soggetto a due forze cartesiane come mostrato in figura. Per ciascun braccio (di lunghezza L_i), la forza è applicata in un punto a distanza b_i dall'asse del giunto precedente ($i = 1, 2$). Il vettore di forza F_1 (di modulo pari a $|F_1|$) è sempre diretto normalmente al primo braccio e nel verso indicato. Sul secondo braccio, il vettore di forza F_2 (di modulo $|F_2|$) è invece diretto sempre come l'asse assoluto y_0.

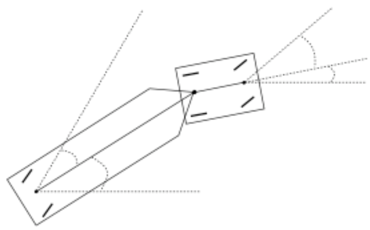
a) Determinare l'espressione della coppia τ ai giunti in grado di mantenere il robot in equilibrio statico in una data configurazione (si ricordi che le coppie sono positive in verso antiorario).

b) Fornire il valore numerico di tale vettore di coppia τ in corrispondenza ai valori

$$L_1 = 0.6 \quad L_2 = 0.5 \quad b_1 = 0.3 \quad b_2 = 0.2 \text{ [m]}, \qquad |F_1| = 10 \quad |F_2| = 5 \text{ [N]},$$

con il robot nella configurazione $\theta = (\pi/4, \pi/2)$ [rad] (si segua la notazione standard di Denavit-Hartenberg per gli angoli di giunto).

Esercizio 2



In figura è rappresentato schematicamente un veicolo articolato (*fire-truck* usato dai vigili del fuoco negli Stati Uniti. La parte anteriore (cabina) ha la cinematica di un'automobile, con due ruote sterzanti anteriori e due ruote fisse posteriori. Il rimorchio del veicolo (con il serbatoio idrico) è agganciato nel punto mediano dell'assale delle ruote fisse della cabina e ha le due ruote anche esse sterzanti. Tale disposizione e tipologia di ruote permette un'adeguata manovrabilità del veicolo, nonostante la notevole lunghezza del rimorchio.

a) Definendo un insieme di coordinate generalizzate q ed introducendo i parametri geometrici necessari, si fornisca l'espressione dei vincoli anolonomi di puro rotolamento delle ruote nella forma $A(q)\dot{q} = 0$. Si assuma di far collassare ciascuna coppia di ruote in un'unica ruota posta centralmente sul relativo assale (la cosiddetta 'vista telescopica').

b) Quanti comandi di velocità u_i ammissibili ed indipendenti è possibile definire? [**Opzionale**: ricavare un modello cinematico del veicolo nella forma $\dot{q} = G(q)u$].

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

2 Luglio 2008

Esercizio 1

La cinematica diretta relativa ai punti di contatto delle due forze è data da:

$$p_1 = \begin{pmatrix} b_1 \cos\theta_1 \\ b_1 \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} L_1 \cos\theta_1 + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin\theta_1 + b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}.$$

La cinematica differenziale associata è

$$\dot{p}_1 = \begin{pmatrix} -b_1 \sin\theta_1 & 0 \\ b_1 \cos\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\theta} = J_1(\theta)\dot{\theta},$$

$$\dot{p}_2 = \begin{pmatrix} -(L_1 \sin\theta_1 + b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) & -b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \dot{\theta} = J_2(\theta)\dot{\theta},$$

dove $J_i(\theta)$, $I = 1, 2$, sono gli Jacobiani analitici relativi alle velocità lineari (nel piano) dei due punti. Dal principio dei lavori virtuali, per avere un equilibrio statico si deve applicare una coppia ai giunti pari a:

$$\tau = -\left(J_1^T(\theta)F_1 + J_2^T(\theta)F_2\right). \tag{1}$$

Per come sono disposte le forze, si ha inoltre l'espressione generale:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{pmatrix} |F_1|, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ |F_2| \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene l'espressione generale cercata per le coppie di bilanciamento statico:

$$\tau = -\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} |F_1| - \begin{pmatrix} L_1 \cos\theta_1 + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} |F_2|.$$

Con i dati numerici del problema, si ha infine:

$$\tau = -\begin{pmatrix} -(3 + \sqrt{2}) \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ [Nm]}.$$

Esercizio 2

Con riferimento alla Figura 1: (x_1, y_1) è la posizione del centro dell'assale posteriore della cabina; ϕ_1 è l'angolo di sterzo delle ruote anteriori della cabina, rispetto all'asse longitudinale della stessa; θ_1 è l'orientamento assoluto (rispetto all'asse X inerziale) dell'asse longitudinale della cabina; (x_2, y_2) è la posizione del centro dell'assale posteriore del veicolo; ϕ_2 è l'angolo di sterzo delle ruote posteriori del rimorchio; θ_2 è l'orientamento assoluto (rispetto all'asse X) dell'asse longitudinale del rimorchio. Siano L_0 e L_1 rispettivamente la distanza tra gli assali anteriore e posteriore della cabina e la distanza tra il punto di aggancio (sull''assale posteriore della cabina) e l'assale posteriore del rimorchio. Assumendo di collassare ciascuna coppia di ruote in un'unica ruota posta centralmente sul relativo assale, la posizione della ruota equivalente anteriore della cabina è

$$x_0 = x_1 + L_0 \cos\theta_1, \qquad y_0 = y_1 + L_0 \sin\theta_1, \tag{3}$$

mentre quella della ruota equivalente posteriore del rimorchio è

$$x_2 = x_1 - L_1 \cos\theta_2, \qquad y_2 = y_1 - L_1 \sin\theta_2. \tag{4}$$

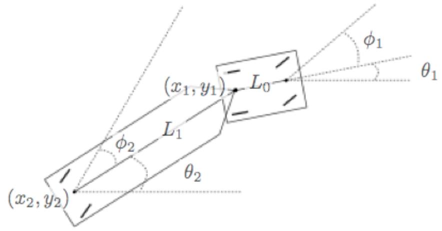


Figura 1: Definizione delle variabili per il veicolo *fire-truck*

Pertanto la configurazione del robot può essere completamente caratterizzata dalle 6 coordinate generalizzate

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \phi_1 & \theta_1 & \phi_2 & \theta_2 \end{pmatrix}^T .$$

I vincoli di puro rotolamento delle ruote si scrivono nella forma usuale

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 \sin(\theta_1 + \phi_1) - \dot{y}_0 \cos(\theta_1 + \phi_1) &= 0, \\ \dot{x}_1 \sin\theta_1 - \dot{y}_1 \cos\theta_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 \sin(\theta_2 + \phi_2) - \dot{y}_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Differenziando rispetto al tempo le (3-4), sostituendo nelle (5) e operando le semplificazioni trigonometriche del caso, si ottiene l'insieme di vincoli anolonomi nella forma richiesta $A(q)\,\dot{q} = 0$, con la matrice (3×6)

$$A(q) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1 + \phi_1) & -\cos(\theta_1 + \phi_1) & 0 & -L_0 \cos\phi_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2 + \phi_2) & -\cos(\theta_2 + \phi_2) & 0 & 0 & 0 & L_1 \cos\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare tutti i moti istantanei ammissibili del veicolo (modello cinematico) occorre trovare una base per il nucleo della matrice $A(q)$. Poichè tale nucleo ha dimensione $6-3=3$ (numero delle colonne $-$ numero delle righe di $A(q)$, essendo le tre righe di $A(q)$ a rango genericamente pieno), si possono trovare tre vettori linearmente indipendenti $g_i(q)$, $i = 1, 2, 3$, tali che

$$A(q) g_i(q) = 0 \quad (\forall q), \qquad i = 1, 2, 3,$$

associati a tre comandi ammissibili e indipendenti u_1, u_2 e u_3. Tre vettori di tale genere sono

$$g_1(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \\ \frac{1}{L_0} \tan\phi_1 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_1} \sec\phi_2 \sin(\theta_2 - \theta_1 + \phi_2) \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove $\sec\phi_2 = 1/\cos\phi_2$. Un modello cinematico del robot mobile è dunque:

$$\dot{q} = G(q)\,u = g_1(q) u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3.$$

I comandi relativi a tale scelta di base nel nucleo di $A(q)$ hanno un immediato significato fisico: u_1 è la velocità lineare delle ruote posteriori della cabina, u_2 è la velocità angolare di sterzo delle ruote anteriori della cabina e u_3 è la velocità angolare di sterzo delle ruote posteriori del rimorchio.

* * * * *