

Prova Scritta di Robotica I

9 Febbraio 2009

Esercizio 1

Si consideri l'estensione al secondo ordine (in accelerazione) dello schema di controllo cinematico di traiettoria cartesiana. A tale scopo, si assuma che il modello del manipolatore con n giunti sia rappresentato dall'equazione vettoriale

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a},$$

con ingresso di accelerazione $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Lo stato iniziale del manipolatore è dato dalla posizione $\mathbf{q}(0)$ e dalla velocità $\dot{\mathbf{q}}(0)$ dei giunti. La cinematica diretta è espressa da $\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, con posizione/orientamento dell'organo terminale $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ ($m = n$). Sono misurate e disponibili per il feedback sia la posizione \mathbf{q} che la velocità $\dot{\mathbf{q}}$ dei giunti del manipolatore. Infine, è assegnata una traiettoria desiderata cartesiana $\mathbf{p}_d(t)$ di cui si conosce la derivata prima $\dot{\mathbf{p}}_d(t)$ e seconda $\ddot{\mathbf{p}}_d(t)$, per $t \geq 0$.

- Scrivere la legge di controllo per \mathbf{a} tale che le componenti dell'errore cartesiano di traiettoria $e_{p,i}(t) = p_{d,i}(t) - p_i$, $i = 1, \dots, m$, soddisfino alle seguenti equazioni lineari e disaccoppiate:

$$\ddot{e}_{p,i} + k_{D,i}\dot{e}_{p,i} + k_{P,i}e_{p,i} = 0, \quad k_{P,i}, k_{D,i} > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Si assuma di non trovarsi in situazioni di singolarità.

- Disegnare lo schema a blocchi del sistema complessivo con il controllore.

Esercizio 2

Un robot planare 2R, con lunghezze ℓ_1 e ℓ_2 dei bracci ($\ell_1 \neq \ell_2$) deve lavorare prevalentemente intorno alla posizione \mathbf{P} definita rispetto ad un sistema di riferimento assoluto $SR_w = (x_w, y_w)$. In fase di installazione, si deve posizionare la base in un punto \mathbf{B} in SR_w in modo che il robot:

- sia in una configurazione a massima manipolabilità quando il suo organo terminale è in \mathbf{P} ;
- realizzi in \mathbf{P} la massima velocità \mathbf{v} possibile per l'organo terminale nella direzione cartesiana $\mathbf{v}_d = (v_{d,x} \ v_{d,y})^T$ ($\|\mathbf{v}_d\| = 1$), tenendo conto dei limiti sulle velocità dei giunti dati da $|\dot{\theta}_1| \leq V_1$ e $|\dot{\theta}_2| \leq V_2$.

Risolvere tale problema di scelta ottimale della postura in forma analitica (*nota: le soluzioni equivalenti sono multiple; è sufficiente fornirne una*). Con le espressioni trovate, calcolare quindi i valori numerici di \mathbf{B} e $\boldsymbol{\theta}$, nonché la $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ che fornisce la massima velocità dell'organo terminale e l'associata $\mathbf{v} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}$ a partire dai seguenti dati:

$$\ell_1 = 1 \text{ [m]}, \quad \ell_2 = 0.5 \text{ [m]}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ [m]}, \quad \mathbf{v}_d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ [m/s]}, \quad V_1 = 1 \text{ [rad/s]}, \quad V_2 = 2 \text{ [rad/s]}.$$

[150 minuti di tempo; libri aperti]

Esercizio 2

Si tratta di risolvere un particolare problema di cinematica inversa, in cui θ_2 è ottenuto dalla specifica sulla manipolabilità e θ_1 da quella che richiede di massimizzare la velocità dell'organo terminale nella direzione \mathbf{v}_d . Trovata una soluzione $\boldsymbol{\theta}$, da questa si ottiene anche la posizione \mathbf{B} della base. Di fatto esistono quattro soluzioni distinte e equivalenti.

Inoltre il secondo sottoproblema (determinazione di θ_1 e delle velocità di giunto che forniscono la massima velocità cartesiana nella direzione desiderata) si può affrontare in due modi diversi: con un metodo di natura essenzialmente geometrica oppure formulando e risolvendo un semplice problema di ottimizzazione vincolata.

Le relazioni cinematiche di interesse per il robot planare 2R sono:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -\ell_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & -\ell_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & \ell_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix},$$

con

$$\det \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \ell_1 \ell_2 \sin \theta_2.$$

Le grandezze sono espresse rispetto ad una terna SR_0 , orientata come SR_w e con origine in \mathbf{B} . Poichè

$$H_{\text{man}}(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\det (\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta}))} = |\det \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})| = \ell_1 \ell_2 |\sin \theta_2|,$$

la prima specifica impone il valore $\theta_2 = \pm \pi/2$. La base \mathbf{B} sarà su una circonferenza centrata in \mathbf{P} e di raggio $r = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}$.

Scegliendo $\theta_2 = \pi/2$ (si vedrà in seguito che la soluzione con il segno negativo è ricavabile in modo del tutto simile), si ha

$$\mathbf{p}_{\theta_2=\pi/2} = \begin{pmatrix} \ell_1 \cos \theta_1 - \ell_2 \sin \theta_1 \\ \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

e quindi

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} - \mathbf{p}_{\theta_2=\pi/2}, \quad (2)$$

che rimane una funzione della sola incognita θ_1 . Questa viene definita dalla seconda specifica, che si può affrontare come detto in due modi. Verrà esposto in dettaglio il primo metodo e poi più brevemente il secondo.

Primo metodo

Per avere una velocità \mathbf{v} dell'organo terminale che sia la massima possibile in norma (con direzione per ora non fissata), è chiaro che i due giunti devono 'cooperare' al meglio, ossia si dovranno scegliere i massimi valori ammissibili delle velocità di giunto con segno concorde ($\dot{\theta}_1 = V_1$ e $\dot{\theta}_2 = V_2$, oppure $\dot{\theta}_1 = -V_1$ e $\dot{\theta}_2 = -V_2$).

La velocità dell'organo terminale in una data configurazione è la somma dei contributi \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 dovuti alle velocità dei singoli due giunti (è il principio di sovrapposizione degli effetti che porta alla definizione della matrice Jacobiana). Per valutare il valore massimo e la direzione di \mathbf{v} , è conveniente riferirsi dapprima ad una terna ausiliaria SR_a solidale al primo braccio del robot con origine in \mathbf{B} (vedi Figura 2).

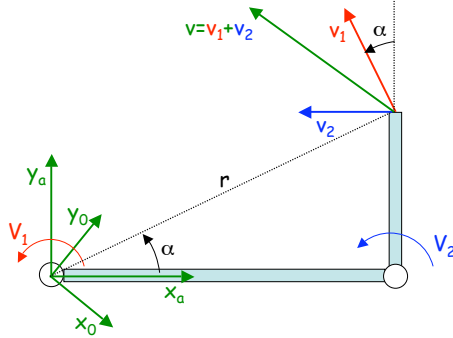


Figura 2: Calcolo di ${}^a\mathbf{v}$ con $\theta_2 = \pi/2$, $\dot{\theta}_1 = V_1$ e $\dot{\theta}_2 = V_2$

Scegliendo i valori positivi di velocità massima dei due giunti, $\dot{\theta}_1 = V_1$ e $\dot{\theta}_2 = V_2$, si ha:

$$\begin{aligned} {}^a\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} V_1 + \ell_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} V_2 \\ &= \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \begin{pmatrix} -\frac{\ell_2}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}} \\ \frac{\ell_1}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}} \end{pmatrix} V_1 + \ell_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} -\ell_2(V_1 + V_2) \\ \ell_1 V_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Rispetto alla terna SR_0 (orientata come SR_w), l'espressione di tale velocità è

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(\theta_1) {}^a\mathbf{v}, \quad \mathbf{R}(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

dove si è utilizzata la matrice di rotazione planare. Poichè $\mathbf{R}(\theta_1)$ è ortonormale, risulta:

$$\|\mathbf{v}\| = \|{}^a\mathbf{v}\| = \sqrt{\ell_1^2 V_1^2 + \ell_2^2 (V_1 + V_2)^2}. \quad (5)$$

La (5) fornisce quindi la norma della massima velocità realizzabile nella configurazione a massima manipolabilità (indipendente da θ_1).

Per allineare la velocità \mathbf{v} con la direzione \mathbf{v}_d , si deve muovere la posizione della base \mathbf{B} lungo la circonferenza di raggio r , determinando di conseguenza il valore θ_1 . Occorre in sostanza risolvere l'equazione vettoriale

$$\mathbf{R}(\theta_1) \frac{{}^a\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{v}_d,$$

che risulta non lineare nell'incognita θ_1 . Si noti che si è introdotto il fattore di normalizzazione $\|\mathbf{v}\|$ per tener conto del fatto che la \mathbf{v}_d assegnata è a norma unitaria. Tale equazione vettoriale si risolve in modo algebrico (in maniera analoga a quanto visto per la cinematica inversa del robot 2R), riscrivendola nelle incognite $\sin \theta_1$ e $\cos \theta_1$ e ottenendo quindi il sistema lineare

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{pmatrix} -\ell_1 V_1 & -\ell_2 (V_1 + V_2) \\ -\ell_2 (V_1 + V_2) & \ell_1 V_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{d,x} \\ v_{d,y} \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice dei coefficienti è

$$\frac{1}{-\|\mathbf{v}\|^2} \begin{pmatrix} \ell_1 V_1 & \ell_2 (V_1 + V_2) \\ \ell_2 (V_1 + V_2) & -\ell_1 V_1 \end{pmatrix}$$

(si noti che il suo determinante è pari a $-\|\mathbf{v}\|^2 \neq 0$). La soluzione cercata è dunque

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{pmatrix} -\ell_1 V_1 v_{d,x} - \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,y} \\ \ell_1 V_1 v_{d,y} - \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,x} \end{pmatrix} \quad (6)$$

da cui

$$\theta_1 = \text{ATAN2}\{\sin \theta_1, \cos \theta_1\} = \text{ATAN2}\{-\ell_1 V_1 v_{d,x} - \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,y}, \ell_1 V_1 v_{d,y} - \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,x}\}. \quad (7)$$

Utilizzando tale valore in (2), ovvero la soluzione trigonometrica (6) in (1), si ottiene l'espressione finale per \mathbf{B} .

Si può infine verificare che, nella configurazione $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \pi/2)$ con θ_1 fornita dalla (7), la velocità dell'organo terminale è pari a

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\ell_1^2 V_1^2 + \ell_2^2 (V_1 + V_2)^2} \cdot \mathbf{v}_d. \quad (8)$$

Con i dati numerici del testo, si ha:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3.0786 \\ 1.2942 \end{pmatrix} [\text{m}], \quad \theta_1 = 2.9442 [\text{rad}] = 168.69^\circ, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} [\text{rad}] = 90^\circ,$$

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{v}_d = 1.8028 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2748 \\ -1.2748 \end{pmatrix} [\text{m/s}].$$

La soluzione trovata si può denominare $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{+,+}$ e $\theta_1 = \theta_1^{+,+}$, rispettivamente la posizione della base del robot e il primo angolo di giunto, in quanto è stata ottenuta scegliendo il valore *positivo* $\theta_2 = \pi/2$ e i valori massimi *positivi* per le velocità di giunto. Se si fossero scelti i valori massimi *negativi* delle velocità di giunto si sarebbe ottenuta una soluzione speculare, con base $\mathbf{B}^{+,-}$ posizionata in modo diametralmente opposto sulla circonferenza di raggio r e con $\theta_1^{+,-}$ che differisce di conseguenza di π da $\theta_1^{+,+}$. Tale seconda soluzione si ottiene direttamente dalla (7) cambiando i segni nei termini dove compaiono V_1 o V_2 :

$$\theta_1^{+,-} = \text{ATAN2}\{\ell_1 V_1 v_{d,x} + \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,y}, -\ell_1 V_1 v_{d,y} + \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,x}\}. \quad (9)$$

Da questa si determina poi $\mathbf{B}^{+,-}$ tramite la (2) valutata con $\theta_1 = \theta_1^{+,-}$. Infine, per il calcolo della velocità cartesiana, al posto della (8) si utilizza in questo caso

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\ell_1^2 V_1^2 + \ell_2^2 (V_1 + V_2)^2} \cdot \mathbf{v}_d, \quad (10)$$

dove lo Jacobiano è ora valutato nella configurazione $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1^{+,-}, \pi/2)$.

Con i dati numerici del testo, si ha:

$$\mathbf{B}^{+,-} = \begin{pmatrix} 0.9214 \\ 0.7058 \end{pmatrix} [\text{m}], \quad \theta_1^{+,-} = 2.9442 [\text{rad}] = -11.31^\circ, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} [\text{rad}] = 90^\circ.$$

Ovviamente la velocità cartesiana \mathbf{v} che si ottiene è la stessa del caso precedente.

Le due soluzioni con $\theta_2 = \pi/2$ sono riportate in Figura 3, dove è mostrato anche l'ellisse di manipolabilità, identico nelle due configurazioni.

A tale proposito, si può notare che l'asse principale dell'ellisse non è allineato alla direzione di massima velocità ottenibile. Questo indica che i limiti massimi delle velocità di giunto V_1 e V_2 forniti nel problema non sono quelli "ottimali" da questo punto di vista! D'altronde il concetto di manipolabilità non include la considerazione di eventuali limiti massimi sulle velocità di giunto, ma è relativo solo alla trasformazione di velocità di giunto con $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| = 1$ (o pari a un arbitrario k) in velocità cartesiane.

In modo analogo si può procedere per trovare le altre due soluzioni corrispondenti alla scelta iniziale *negativa* per $\theta_2 = -\pi/2$ (il primo apice nella notazione della soluzione diventa negativo). Le formule relative sono:

$$\theta_1^{-,+} = \text{ATAN2}\{-\ell_1 V_1 v_{d,x} + \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,y}, \ell_1 V_1 v_{d,y} + \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,x}\} \quad (11)$$

per la scelta di massime velocità di giunto *positive*, e

$$\theta_1^{-,-} = \text{ATAN2}\{\ell_1 V_1 v_{d,x} - \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,y}, -\ell_1 V_1 v_{d,y} - \ell_2 (V_1 + V_2) v_{d,x}\} \quad (12)$$

per il caso di massime velocità di giunto *negative*. Le due posizioni $\mathbf{B}^{-,+}$ e $\mathbf{B}^{-,-}$ della base sono ottenute questa volta dalla formula (analoga alla (2))

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} - \mathbf{p}_{\theta_2 = -\pi/2} = \mathbf{P} - \begin{pmatrix} \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_1 \\ \ell_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix},$$

utilizzando rispettivamente la (11) o la (12) per θ_1 .

Con i dati numerici del testo, per la scelta positiva delle massime velocità di giunto si ottiene

$$\mathbf{B}^{-,+} = \begin{pmatrix} 2.2942 \\ 2.0786 \end{pmatrix} [\text{m}], \quad \theta_1^{-,+} = -1.3734 [\text{rad}] = -78.69^\circ, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2} [\text{rad}] = -90^\circ,$$

mentre per quella negativa si ha

$$\mathbf{B}^{-,-} = \begin{pmatrix} 1.7058 \\ -0.0786 \end{pmatrix} [\text{m}], \quad \theta_1^{-,-} = 1.7682 [\text{rad}] = 101.31^\circ, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2} [\text{rad}] = -90^\circ.$$

Le due soluzioni con $\theta_2 = -\pi/2$ sono mostrate in Figura 4.

Secondo metodo

Agli stessi risultati si perviene attraverso la soluzione di un problema di ottimizzazione vincolata. Si assuma $\theta_2 = \pi/2$. Ripetendo l'analisi fatta per pervenire alle (3)-(4), si può scrivere in generale per arbitrarie velocità di giunto $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(\theta_1) \begin{pmatrix} -\ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \ell_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

La seconda specifica si traduce nella seguente formulazione:

$$\begin{aligned} \max_{\theta_1, \dot{\boldsymbol{\theta}}} \quad & \mathbf{v}_d^T \mathbf{v} \\ \text{s.t.} \quad & -\pi \leq \theta_1 \leq \pi \\ & -V_1 \leq \dot{\theta}_1 \leq V_1 \\ & -V_2 \leq \dot{\theta}_2 \leq V_2, \end{aligned} \quad (14)$$

dove la \mathbf{v} è data dalla (13). La funzione obiettivo in (14) tende ad allineare \mathbf{v} con \mathbf{v}_d , massimizzando al contempo la norma di \mathbf{v} .

La formulazione (14) si decompone naturalmente in una sequenza di due problemi di massimo vincolato:

$$\max_{\substack{-V_1 \leq \dot{\theta}_1 \leq V_1 \\ -V_2 \leq \dot{\theta}_2 \leq V_2}} \left\{ \max_{-\pi \leq \theta_1 \leq \pi} \mathbf{v}_d^T \mathbf{v} \right\}. \quad (15)$$

Per il problema interno alle parentesi graffe, si ha dalla (13)

$$\mathbf{v}_d^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{d,x} & v_{d,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\ell_1 \dot{\theta}_1 & -\ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -\ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \ell_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

che viene evidentemente massimizzato rispetto a θ_1 dal vettore

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_1 \dot{\theta}_1 & -\ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -\ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \ell_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_{d,x} \\ v_{d,y} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Sostituendo questa espressione nella (13) si ottiene

$$\mathbf{v} = \left(\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right) \mathbf{v}_d.$$

Pertanto, il problema esterno in (15) diventa

$$\max_{\substack{-V_1 \leq \dot{\theta}_1 \leq V_1 \\ -V_2 \leq \dot{\theta}_2 \leq V_2}} \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2,$$

essendo $\mathbf{v}_d^T \mathbf{v}_d = 1$. Dalla forma della funzione obiettivo segue immediatamente che il massimo si ha per

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

confermando l'intuizione che i giunti cooperano al meglio con velocità massime in modulo e di segno concorde. Sostituendo i singoli valori in (17) nella (16) e calcolando quindi $\theta_1 = \text{ATAN2}\{\sin \theta_1, \cos \theta_1\}$ e poi \mathbf{B} tramite la (2), si ottengono rispettivamente le soluzioni $(\theta_1^{+,+}, \mathbf{B}^{+,+})$ e $(\theta_1^{+,-}, \mathbf{B}^{+,-})$. In modo analogo si procede per $\theta_2 = -\pi/2$.

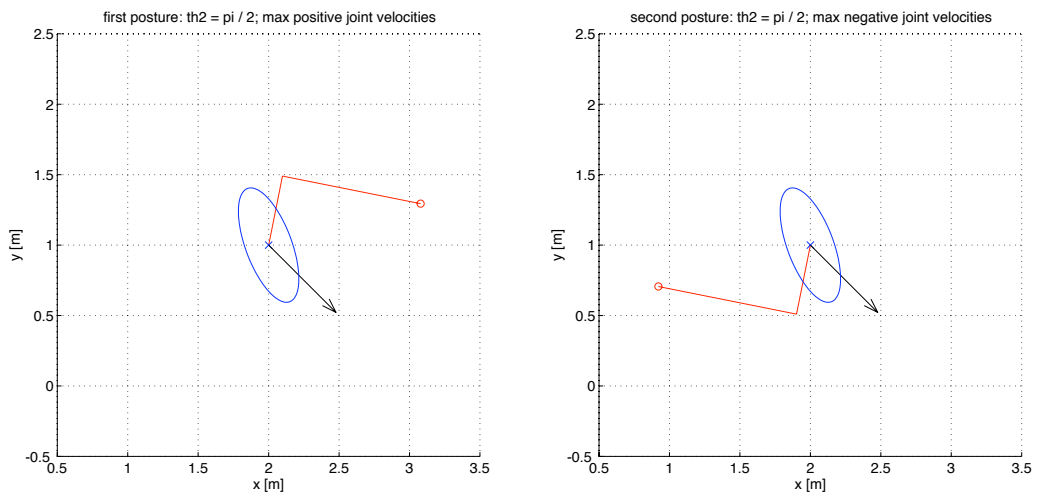


Figura 3: Le due soluzioni con $\theta_2 = \pi/2$ (sono mostrate anche l'ellisse di manipolabilità e la velocità massima cartesiana ottenuta, entrambe non in scala)

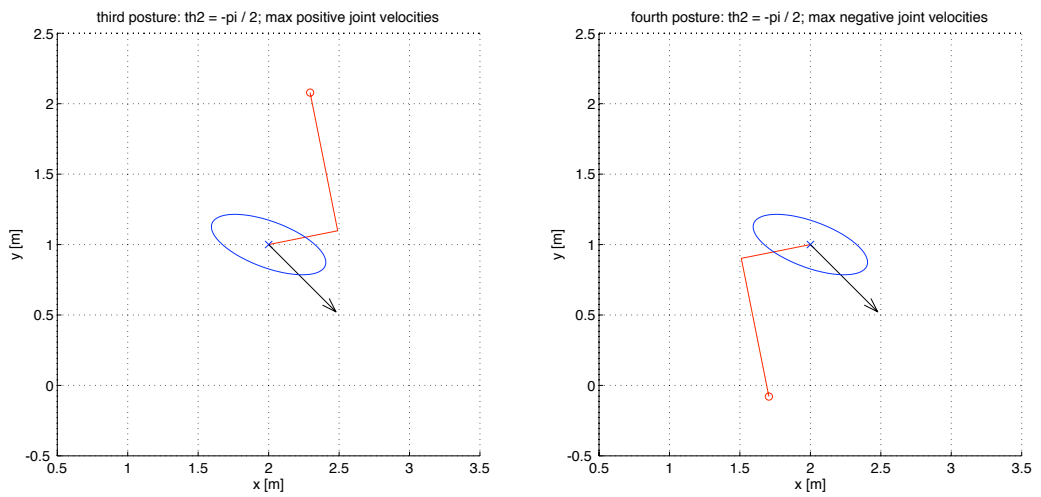


Figura 4: Le due soluzioni con $\theta_2 = -\pi/2$

* * * * *