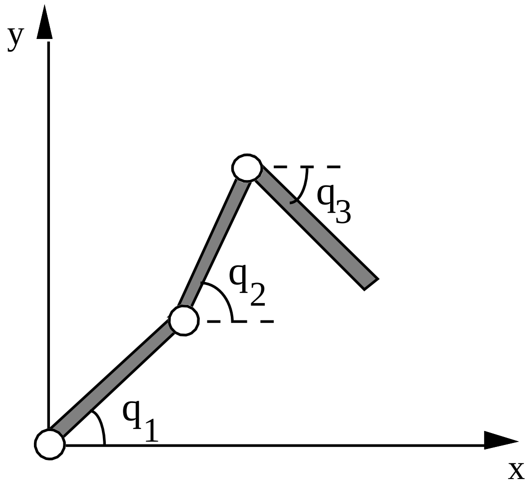
Compito di Robotica I

Origine: Automazione Industriale, 13 Gennaio 1992

Si consideri il manipolatore planare a tre gradi di libertà in figura, dove sono mostrate le variabili di giunto assolute q_1, q_2 e q_3. I bracci sono lunghi rispettivamente ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3. Sia $z = [p_x \; p_y \; \phi]^{\mathrm{T}}$ il vettore che contiene le componenti di posizione cartesiana dell'elemento terminale del robot ed il suo orientamento ϕ rispetto all'asse x. Si assumano le accelerazioni di giunto $\ddot{q}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ come ingressi di controllo.



- Studiare la proprietà di disaccoppiamento ingresso-uscita quando si consideri come uscita il vettore $y = z$. Individuare le condizioni di singolarità della matrice di disaccoppiamento, interpretandole da un punto di vista fisico. Determinare analiticamente le direzioni di moto ammissibile nello spazio delle uscite quando la suddetta matrice è singolare. Fornire infine l'espressione della legge di controllo linearizzante e disaccoppiante.

- ...

[90 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzione

La cinematica diretta è data da

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \cos q_1 + \ell_2 \cos q_2 + \ell_3 \cos q_3 \\ \ell_1 \sin q_1 + \ell_2 \sin q_2 + \ell_3 \sin q_3 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

per cui i legami differenziali del primo e del secondo ordine sono

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell_1 \sin q_1 & -\ell_2 \sin q_2 & -\ell_3 \sin q_3 \\ \ell_1 \cos q_1 & \ell_2 \cos q_2 & \ell_3 \cos q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

e, rispettivamente,

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = J(q)\ddot{q} - \begin{bmatrix} \ell_1 \dot{q}_1^2 \cos q_1 + \ell_2 \dot{q}_2^2 \cos q_2 + \ell_3 \dot{q}_3^2 \cos q_3 \\ \ell_1 \dot{q}_1^2 \sin q_1 + \ell_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 + \ell_3 \dot{q}_3^2 \sin q_3 \\ 0 \end{bmatrix} = J(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}).$$

Definendo come ingressi, stati ed uscite

$$u = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix}, \tag{1}$$

si ottiene un sistema nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = h(x)$$

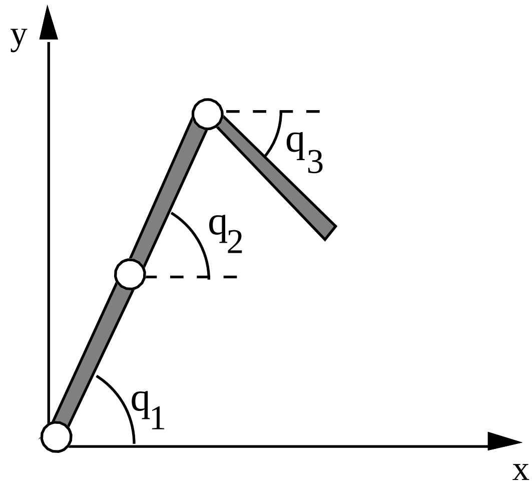
con grado relativo uniforme pari a 2 e matrice di disaccoppiamento $\mathcal{A} = J(q)$. Esso risulta dunque disaccoppiabile ingresso-uscita mediante la legge di controllo

$$u = \ddot{q} = J^{-1}(q)\big(v - n(q, \dot{q})\big) = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{2}$$

se e solo se lo Jacobiano $J(q)$ è non singolare. Poichè

$$\det J(q) = \ell_1 \ell_2 \sin(q_2 - q_1)$$

il disaccoppiamento fallisce quando il robot ha *i primi due bracci allineati* ($q_2 = q_1$ o $q_2 = q_1 \pm \pi$), come ad esempio in figura.



In tale configurazione si hanno velocità di uscita ammissibili (appartenenti all'immagine di $J(q_1, q_1, q_3)$) solo della forma

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} (\ell_1 \dot{q}_1 + \ell_2 \dot{q}_2) + \begin{bmatrix} -\ell_3 \sin q_3 \\ \ell_3 \cos q_3 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_3 \in \mathcal{R}(J).$$

Di conseguenza, un vettore di velocità di giunto non nullo di componenti

$$\dot{q}_1 \neq 0, \qquad \dot{q}_2 = -\frac{\ell_1}{\ell_2}\dot{q}_1, \qquad \dot{q}_3 = 0$$

produce un moto istantaneo nullo dell'elemento terminale del robot. Dualmente, vettori non nulli di forza/coppia generalizzata della forma

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tan q_1 \\ \ell_3(\sin q_3 - \cos q_3 \tan q_1) \end{bmatrix} F_x \in \mathcal{N}(J^{\mathrm{T}})$$

applicati all'elemento terminale producono coppie nulle ai giunti.

Al di fuori delle singolarità di natura cinematica, il sistema con la legge disaccoppiante (2) risulta completamente linearizzato

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

ossia equivalente a doppi integratori rispetto a ciascuna coordinata d'uscita.