

**Esame di Controlli Automatici**  
**08 Gennaio 2010**

Cognome
Nome

1) Per uno schema di controllo a retroazione con processo  $P(s)$  e controllore  $C(s)$ ,

- individuare il processo esteso in presenza di un'incertezza di tipo additivo nel processo. Nello schema di partenza sono presenti un riferimento  $r$  e un disturbo  $d$  in uscita al processo mentre si desidera valutare le prestazioni del sistema di controllo sull'errore  $e = r - y$  e sull'ingresso di controllo  $u$  al processo.
- Calcolare il legame  $u_{\Delta} \rightarrow y_{\Delta}$  (coincidente con il termine  $G_{11}$ ) dopo la chiusura dell'anello di controllo.

2) Dato il processo

$$P(s) = \frac{1}{(s - 10)(s + 1)^2}$$

in uno schema di controllo a retroazione unitaria.

- Discutere sulla possibilità di cancellare alcuni dei poli del processo tramite un opportuno controllore in un problema di stabilizzazione con reazione dall'uscita.
- Individuare un controllore  $C(s)$  in uno schema di controllo a retroazione che assicuri la stabilità asintotica del sistema di controllo con il metodo di sintesi basato sul Luogo delle Radici.
- Verificare (qualitativamente) tramite il criterio di Nyquist la stabilità del sistema di controllo con il controllore precedentemente individuato.

3) Sia il sistema caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = ( -1 \quad 1 \quad 0 ), \quad D = 0$$

- Individuare una reazione dallo stato in grado di stabilizzare il sistema.
- Discutere sulla possibilità di individuare un osservatore o un ricostruttore asintotico dello stato per il sistema considerato.
- Discutere sulla possibilità di assegnare una velocità di convergenza dell'errore di osservazione a zero almeno pari a  $e^{-2t}$ .

4) L'importanza della funzione di sensitività  $S(s)$  in uno schema di controllo a retroazione.

## Bozza di soluzione

1) Si considera lo schema di controllo di Fig. 1 nel quale si valutano le prestazioni sulle variabili  $e = r - y$  e  $u$  in presenza di un'incertezza di tipo additivo sul processo.

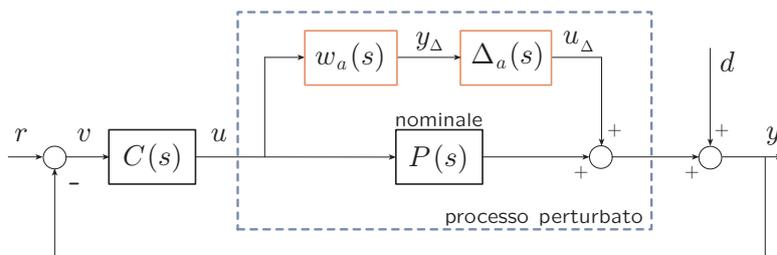


Figura 1: Controllo a retroazione con incertezza additiva - caso 1

Per la determinazione del processo esteso  $P_{e1}$  è necessario individuare:

- le variabili  $w$  (variabili esogene) in ingresso;
- le variabili  $z$  di prestazione;
- le relazioni che legano le uscite ( $y_\Delta, z, v$ ) agli ingressi ( $u_\Delta, w, u$ ) del processo esteso.

Nello schema di Fig. 1 sono presenti due ingressi esogeni  $r$  e  $d$  e pertanto  $w$  avrà dimensione 2

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$$

mentre le variabili  $z$  sono

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - y \\ u \end{pmatrix}$$

Le relazioni si deducono direttamente dallo schema di Fig. 1 e sono

$$\begin{aligned} y_\Delta &= w_a u \\ z_1 &= r - y = r - (d + u_\Delta + Pu) = w_1 - w_2 - u_\Delta - Pu \\ z_2 &= u \\ v &= r - y = r - (d + u_\Delta + Pu) = w_1 - w_2 - u_\Delta - Pu \end{aligned}$$

e quindi il processo esteso è dato da

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ z_1 \\ z_2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w_a \\ -1 & 1 & -1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix} = P_{e1} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix}$$

Si noti che

- la matrice  $P_{e1}$  è quadrata (ma non lo è necessariamente nel caso generale);

- il segnale  $v$  (ingresso al controllore) coincide con il segnale di errore  $r - y$  e cioè con  $z_1$ . La suddivisione dei segnali in uscita o in ingresso al processo esteso serve per distinguerne il loro uso. In questo caso si è deciso di valutare una parte delle prestazioni sull'errore (da cui la scelta di  $z_1$ ) e contemporaneamente si ammette che tale segnale sia disponibile per il controllore.
- Analogamente per la relazione  $z_2 = u$ . Si è deciso di valutare parte delle prestazioni in termini di sforzo di controllo e quindi si ha come seconda variabile di prestazione proprio  $u$ . Un esempio simile è già stato incontrato nel caso di sensitività pesata nel quale l'ingresso di controllo veniva pesato da una funzione peso  $w_U(s)$  (si veda la dispensa).

Nel caso SISO considerato si poteva anche scegliere di rappresentare l'incertezza additiva come riportato nello schema di Fig. 2 nel quale l'ordine di  $w_a(s)$  e  $\Delta_a(s)$  sono invertiti.

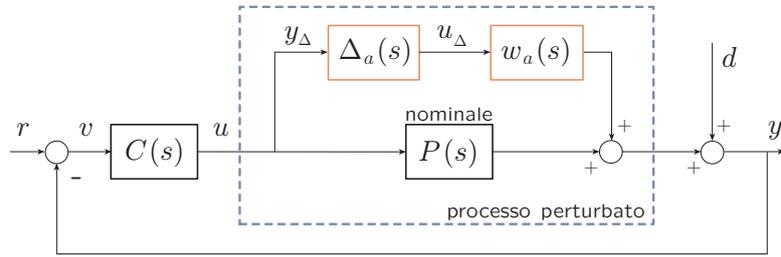


Figura 2: Controllo a retroazione con incertezza additiva - caso 2

In questo caso si ottiene un processo esteso  $P_{e2}$  diverso. Infatti le relazioni sono

$$\begin{aligned}
 y_\Delta &= u \\
 z_1 &= r - y = r - (d + w_a u_\Delta + Pu) = w_1 - w_2 - w_a u_\Delta - Pu \\
 z_2 &= u \\
 v &= r - y = r - (d + w_a u_\Delta + Pu) = w_1 - w_2 - w_a u_\Delta - Pu
 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ z_1 \\ z_2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -w_a & 1 & -1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -w_a & 1 & -1 & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix} = P_{e2} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix}$$

La chiusura dell'anello di controllo  $u = Cv$  può essere effettuata tramite la lower LFT

$$\begin{aligned}
 G_1 &= F_\ell(P_{e1}, C) \\
 G_2 &= F_\ell(P_{e2}, C)
 \end{aligned}$$

nelle quali si è distinto tra le due descrizioni del processo esteso individuate.

Partizionando opportunamente le  $P_{e1}$  e  $P_{e2}$  e utilizzando la formula relativa (o sostituendo  $u = Cv$ ) si ottiene

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_a \\ -P \\ 1 \end{pmatrix} \frac{C}{1+PC} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_a & w_a & -w_a \\ P & -P & P \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{C}{1+PC}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -w_a CS_n & w_a CS_n & -w_a CS_n \\ -S_n & S_n & -S_n \\ -CS_n & CS_n & -CS_n \end{pmatrix}$$

nella quale si è posto

$$S_n = \frac{1}{1+PC} \quad \text{sensitività nominale}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} G_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -w_a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -P \\ 1 \end{pmatrix} \frac{C}{1+PC} \begin{pmatrix} -w_a & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -w_a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_a & 1 & -1 \\ w_a P & -P & P \\ -w_a & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{C}{1+PC} \\ &= \begin{pmatrix} -w_a CS_n & CS_n & -CS_n \\ -w_a S_n & S_n & -S_n \\ -w_a CS_n & CS_n & -CS_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si noti che in entrambi i casi il legame  $u_\Delta \rightarrow y_\Delta$  (individuato, nel caso considerato, dal primo elemento della prima riga) coincide.

Quindi nel caso di incertezza additiva si ha

$$G_{11} = -(I + CP_n)^{-1} C w_a = -w_a CS_n \quad (1)$$

utile per l'individuazione della condizione di stabilità robusta.

**2)** Si ricorda che una cancellazione polo/zero (o zero/polo) tra il controllore  $C(s)$  e il processo  $P(s)$  (in serie) crea una dinamica nascosta (non raggiungibile o inosservabile) nell'interconnessione in serie e quindi tale dinamica nascosta rimarrà tale per il sistema ad anello chiuso. Ad esempio se

$$C(s) = \frac{(s+p)N_1(s)}{D_1(s)}, \quad P(s) = \frac{N_2(s)}{(s+p)D_2(s)}$$

e cioè in presenza di una cancellazione del polo  $s = -p$  del processo da parte di uno zero uguale nel controllore, ad anello chiuso si avrà

$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{(s+p)N_1(s)N_2(s)}{(s+p)[D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)]}$$

In conclusione il controllore, ai fini della sola stabilità del sistema a retroazione, può cancellare i soli poli del processo a parte reale strettamente minore di zero.

Dato il processo in esame, il tracciamento del luogo delle radici riportato in Fig. 3, corrispondente ad una scelta di un controllore statico  $C(s) = K$ , dimostra che non basta un controllore statico per stabilizzare il sistema.

Si nota però che il processo ha un eccesso poli/zeri pari a 3 ( $n - m = 3$ ) ed è privo di zeri a parte reale positiva o nulla; pertanto si può procedere con l'algoritmo per la determinazione di un controllore stabilizzante basato sul Luogo delle Radici.

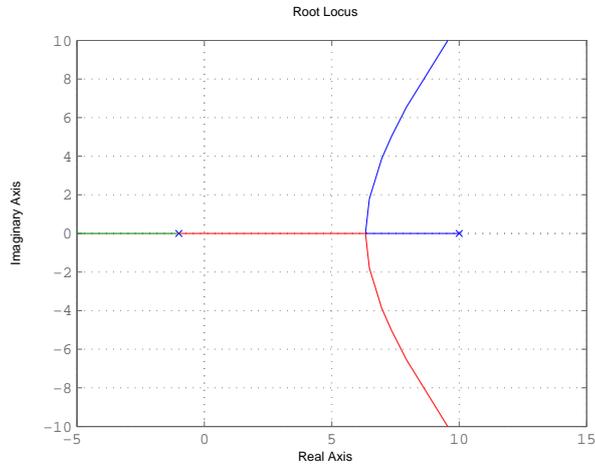


Figura 3: Luogo positivo

Il primo passo consiste nel riportare il sistema in catena diretta al caso  $n - m = 2$  introducendo uno zero (ovviamente a parte reale negativa). Tra tutte le scelte possibili, per semplificare i calcoli successivi si decide di scegliere

$$z_1 = -1$$

introducendo cioè il termine  $(s + 1)$ . Tale scelta è ammissibile sulla base delle considerazioni precedentemente effettuate. Si ottiene

$$F_1(s) = (s + 1)P(s) = \frac{1}{(s - 10)(s + 1)}$$

Il corrispondente luogo delle radici ha un centro degli asintoti positivo pari a

$$s_{o1} = \frac{10 - 1}{2} = \frac{9}{2}$$

Per spostare tale centro degli asintoti a sinistra dell'asse immaginario, si sceglie una coppia polo/zero (entrambi negativi) con il polo più a sinistra dello zero. Lo zero, sempre per semplificare i calcoli, può essere scelto pari a

$$z_2 = -1$$

e quindi un polo che assicuri un nuovo centro degli asintoti negativo deve essere minore di  $-10$ . Si sceglie ad esempio  $p_1 = -20$ .

A questo punto l'algoritmo prevede la scelta di un guadagno  $K^*$  tale da garantire la stabilità del sistema così ottenuto e la successiva scelta di una dinamica ad alta frequenza nella forma  $(1 + \tau s)$  (con  $\tau$  determinabile tramite l'applicazione del criterio di Routh al denominatore del sistema ad anello chiuso) per rendere il controllore almeno proprio. Quindi con

$$C_1(s) = \frac{K^*(s + 1)^2}{(s + 20)(1 + \tau s)}$$

il sistema in catena diretta diventa

$$F_1(s) = C_1(s)P(s) = \frac{K^*}{(s - 10)(s + 20)(1 + \tau s)}$$

e il polinomio dei poli ad anello chiuso è

$$\begin{aligned} p_1(s, K^*) &= (s - 10)(s + 20)(1 + \tau s) + K^* \\ &= \tau s^3 + (1 + 10\tau)s^2 + (10 - 200\tau)s + K^* - 200 \end{aligned}$$

con  $\tau$  da determinare tramite il criterio di Routh applicato alla tabella

$$\begin{array}{c|cc} & \tau & 10 - 200\tau \\ & 1 + 10\tau & K^* - 200 \\ & c & \\ & d & \end{array}$$

Si noti che il calcolo dei termini  $c$  e  $d$  della tabella comporta un discreto numero di calcoli. Tuttavia, come fatto notare durante l'esame, in questa situazione particolare si può procedere in modo leggermente diverso. Invece di scegliere  $K^*$  e successivamente  $\tau$  con il criterio di Routh, è possibile prima scegliere un polo "lontano" opportuno, riportando la differenza poli/zeri a 3, e poi determinare il guadagno  $K^*$  che assicuri la stabilità asintotica del sistema a retroazione. In entrambi i casi si ha un solo parametro libero:  $\tau$  con il metodo classico o  $K^*$  con la variante introdotta.

Per quanto riguarda la scelta del polo "lontano" opportuno  $-p$ , si noti che il polinomio dei poli ad anello chiuso vale

$$\begin{aligned} p_2(s, K) &= (s - 10)(s + 20)(s + p) + K \\ &= s^3 + (10 + p)s^2 + (10p - 200)s + K - 200p \end{aligned}$$

quindi le condizioni necessarie sono verificate se

$$p > 20, \quad K > 200p$$

In effetti si noti che in corrispondenza alla scelta  $p = 20$ , i punti singolari sono, oltre al polo multiplo ad anello aperto in  $-2$ , dati da

$$\frac{1}{s - 10} + \frac{1}{s + 20} + \frac{1}{s + 20} = \frac{3s}{(s - 10)(s + 20)} = 0$$

e cioè  $s = 0$ . In tale situazione non esistono valori del guadagno in grado di stabilizzare il sistema di controllo, mentre per  $p > 20$  il punto singolare del luogo positivo è minore di zero e quindi esistono valori opportuni del guadagno tali da rendere il sistema ad anello chiuso stabile asintoticamente.

Si scelga ad esempio il polo "lontano" pari a  $-30$  e quindi il controllore diventa

$$C_2(s) = \frac{K(s + 1)^2}{(s + 20)(s + 30)}$$

e il polinomio dei poli ad anello chiuso è

$$\begin{aligned} p_2(s, K) &= (s - 10)(s + 20)(s + 30) + K \\ &= s^3 + 40s^2 + 100s + K - 6000 \end{aligned}$$

con relativa tabella di Routh

$$\begin{array}{|l} 1 & 100 \\ 40 & K - 6000 \\ 10000 - K \\ K - 6000 \end{array}$$

Il guadagno  $K$  deve quindi essere tale che

$$6000 < K < 10000$$

Scegliendo ad esempio  $K^* = 8000$ , il controllore finale sarà

$$C_2(s) = \frac{K^*(s+1)^2}{(s+20)(s+30)}$$

Per il tracciamento dei diagrammi di Bode e del relativo diagramma di Nyquist si riscrive la  $F_2(s)$  nella forma canonica di Bode

$$F_2(s) = \frac{8000}{(s-10)(s+20)(s+30)} = \frac{-4/3}{(1-s/10)(1+s/20)(1+s/30)}$$

Tracciando i diagrammi di Bode (su carta semi-logaritmica) si nota che la fase vale  $-\pi$  in corrispondenza ad una pulsazione per la quale il modulo è negativo in dB (e quindi minore di 1). Qualora ci fossero difficoltà nel tracciamento sufficientemente accurato di tali diagrammi di Bode, dovendo (ai fini della stabilità asintotica) il diagramma di Nyquist compiere 1 giro in senso antiorario intorno al punto  $(-1, 0)$ , si arrivava alla stessa conclusione precedente. Il diagramma di Nyquist finale ha la forma riportata in Fig. 4.

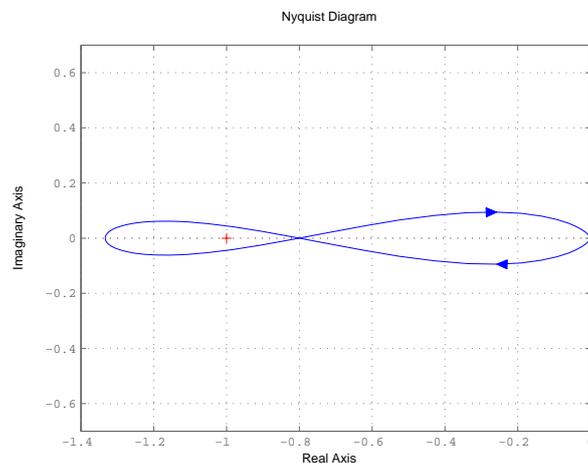


Figura 4: Diagramma di Nyquist

Nel risolvere questo esercizio si potrebbe aver scelto, partendo dal processo  $P(s)$ , di aggiungere una coppia polo/zero per spostare il centro degli asintoti a sinistra. Scegliendo ad esempio lo zero in  $-1$ , l'aggiunta di un polo in  $-p$  con il controllore

$$C_3(s) = \frac{K(s+1)}{s+p}, \quad p > 0$$

può non risultare sufficiente per garantire l'esistenza di un guadagno  $K$  in grado di stabilizzare il sistema di controllo. In effetti, l'individuazione dei candidati punti singolari relativo a

$$F_3(s) = \frac{K}{(s-10)(s+1)(s+p)}$$

in catena diretta, porta a dover risolvere

$$\frac{1}{s-10} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+p} = \frac{3s^2 + s(2p-18) - 9p - 10}{\dots} = 0$$

e quindi il punto singolare (la cui esistenza è ovvia dal tracciamento del luogo) tra il polo in 10 e il polo in -1 sarà necessariamente a destra dell'asse immaginario. Infatti sicuramente esiste un punto singolare relativo al luogo negativo tra  $-p$  e  $-1$  (se  $p > 1$ ) e data l'alternanza dei segni (con  $p > 0$ ) nel polinomio che determina i candidati punti singolari, il secondo punto singolare è positivo. Stesso discorso se  $0 < p < 1$ . Di conseguenza il sistema non è stabilizzabile con  $C_3(s)$  e guadagno  $K$  positivo.

**3)** La matrice  $A$  è caratterizzata dagli autovalori (il calcolo si semplifica notando che la matrice  $A$  e quindi  $\lambda I - A$  è triangolare a blocchi superiore)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1$$

e quindi il sistema è instabile.

Per verificare la stabilizzabilità con reazione dello stato si può utilizzare il PBH test per l'autovalore  $\lambda_1 = 1$

$$\text{rango} \left( A - \lambda_1 I \quad B \right) = \text{rango} \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Il problema è quindi risolvibile. Si calcola quindi la matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la quale risulta singolare. Esiste quindi un sottosistema non raggiungibile di dimensione 1 (la dimensione di  $\text{Im}R$  è 2). Una base di tale sottospazio è data, ad esempio, dalle prime due colonne linearmente indipendenti di  $R$

$$\text{Im}R = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

risulta però più comodo scegliere una base diversa notando che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi lo stesso sottospazio è generato da

$$\text{Im}R = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

L'utilità di una tale scelta diventa evidente in quanto è possibile scegliere come matrice di cambiamento di coordinate (per scomporre il sistema rispetto alla raggiungibilità)  $T_1 = I$ . In altri termini il sistema è già scomposto rispetto alla raggiungibilità e il sottosistema raggiungibile (il solo al quale possiamo assegnare gli autovalori con una reazione dallo stato) è caratterizzato dalle matrici

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La corrispondente matrice di raggiungibilità, necessaria per il calcolo della reazione dallo stato, è

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per stabilizzare il sistema si scelgono due autovalori a parte reale negativa, ad esempio  $\lambda_1^* = -1$  e  $\lambda_2^* = -2$  da cui

$$p^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

La reazione dallo stato  $u = F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  è data da

$$\begin{aligned} F_1 &= -\gamma p^*(A_{11}) = -\gamma(A_{11}^2 + 3A_{11} + 2I) \\ &= -\gamma \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -9/2 & 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per rispondere alla seconda domanda, si calcola la matrice di osservabilità

$$O = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la quale è singolare e ha rango pari a 2. Non è quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato (con velocità di convergenza dell'errore arbitraria). Per verificare se esiste un ricostruttore asintotico si hanno diverse alternative

- effettuare la scomposizione rispetto all'osservabilità, verificare che la dinamica del sottosistema inosservabile è caratterizzabile dall'autovalore -1 e quindi concludere che esiste un ricostruttore asintotico dello stato ma che la velocità di convergenza dell'errore di osservazione è limitata da  $e^{-t}$ ;
- verificare tramite il PBH test (autovalore singolo) che l'autovalore  $\lambda_1 = 1$  corrisponde ad una dinamica osservabile, di conseguenza la dinamica del sottosistema inosservabile sarà caratterizzata dall'autovalore -1 con conclusioni identiche all'approccio precedente.

Il PBH test per l'osservabilità è

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$