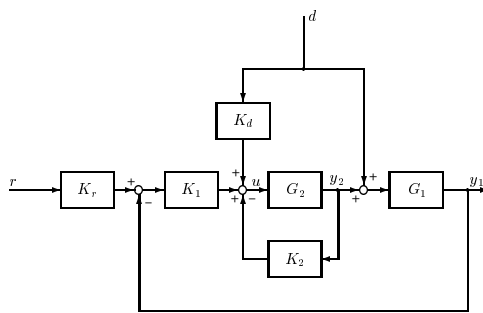


Esame di Controlli Automatici 01 Febbraio 2010

Cognome
Nome

1) Si consideri lo schema di controllo di figura nel quale vengono misurate entrambe le grandezze y_1 e y_2 così come il disturbo d . La variabile rispetto alla quale si valutano le prestazioni è $y_1 - r$ mentre il compensatore è costituito dalle funzioni $K_r(s)$, $K_d(s)$, $K_1(s)$ e $K_2(s)$. Individuare il processo esteso.



2) Sia il processo

$$P(s) = \frac{s + 1}{(s + 10)(s - 1)}$$

Individuare un controllore $C(s)$, in uno schema di controllo a retroazione unitaria, in grado di assicurare che l'effetto di un disturbo costante (non noto di ampiezza arbitraria) agente sull'uscita controllata del processo tenda a zero asintoticamente.

Verificare la stabilità del sistema di controllo tramite il criterio di Nyquist.

3) Sia il sistema caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1), \quad D = 0$$

per il quale è disponibile una misura dello stato x .

- Individuare una reazione dallo stato in grado di stabilizzare il sistema.
 - Individuare uno schema di controllo in grado di assicurare autovalori coincidenti in -1 ad anello chiuso e un errore nullo a regime permanente rispetto ad un riferimento costante.
- 4) Illustrare come includere eventuali specifiche sulla $L(s)$ tramite un'opportuna funzione peso.

Bozza di soluzione

1) Dal testo si deduce

$$w = \begin{pmatrix} d \\ r \end{pmatrix}, \quad z = y_1 - r, \quad v = \begin{pmatrix} r \\ y_1 \\ y_2 \\ d \end{pmatrix}$$

quindi il processo esteso sarà rappresentato da una matrice 5×3 . In particolare il controllore ha 1 uscita u e 4 ingressi r , y_1 , y_2 e d . Il legame ingressi/uscita è dato da

$$u = K_d d - K_2 y_2 + K_1 [K_r r - y_1] = \begin{pmatrix} K_1 K_r & -K_1 & -K_2 & K_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ y_1 \\ y_2 \\ d \end{pmatrix} = K v$$

Per individuare il processo esteso si procede per via algebrica

$$\begin{aligned} z &= y_1 - r = G_1 d + G_1 G_2 u - r \\ v_1 &= r \\ v_2 &= y_1 = G_1 d + G_1 G_2 u \\ v_3 &= y_2 = G_2 u \\ v_4 &= d \end{aligned}$$

In forma matriciale si ottiene

$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & -1 & G_1 G_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ G_1 & 0 & G_1 G_2 \\ 0 & 0 & G_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = P_e \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

2) Per avere astatismo rispetto al disturbo costante agente in uscita del processo si inserisce un polo in $s = 0$ nel controllore (il processo ne è privo). Si deve tuttavia assicurare la stabilità asintotica del sistema di controllo. A tal fine, si prova se si è in grado di assicurare tale stabilità mediante un semplice guadagno K . Tracciando il luogo delle radici relativo a

$$F(s) = \frac{K}{s} \frac{s+1}{(s+10)(s-1)}$$

si ottiene l'andamento riportato in Fig. 1 dal quale si nota che esiste un guadagno positivo oltre il quale tutti i 3 poli del sistema ad anello chiuso sono a parte reale negativa.

Per individuare il valore critico del guadagno K_{crit} si utilizza il criterio di Routh applicato al polinomio del sistema ad anello chiuso

$$\begin{aligned} p(s, K) &= s(s+10)(s-1) + K(s+1) \\ &= s^3 + 9s^2 + s(K-10) + K \end{aligned}$$

La condizione necessaria richiede $K > 0$ e $K > 10$. La tabella di Routh è

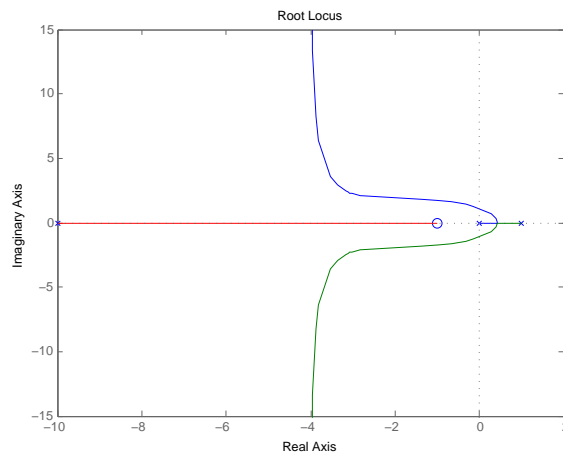


Figura 1: Luogo positivo

$$\begin{cases} 1 & K - 10 \\ 9 & K \\ 8K - 90 \\ K \end{cases}$$

quindi $K_{crit} = 90/8$. Il controllore

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad K > K_{crit}$$

risolve il problema.

Per semplicità nel tracciamento dei diagrammi di Bode si sceglie $K = 100$, quindi

$$F(s) = \frac{100}{s} \frac{s+1}{(s+10)(s-1)} = \frac{-10(1+s)}{s(1-s)(1+s/10)}$$

con relativo diagramma di Nyquist di Fig. 2 dal quale si verifica il soddisfacimento del criterio di Nyquist (1 giro in senso anti-orario intorno al punto $(-1, 0)$).

Si noti infine che l'eventuale uso, in questo caso, della tecnica di sintesi per tentativi non è consigliato in quanto il sistema in catena diretta presenta un polo a parte reale positiva e quindi non è possibile sfruttare il teorema di Bode per garantire la stabilità asintotica del sistema di controllo.

3) In primo luogo si individuano gli autovalori del sistema

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

Il sistema è instabile per la presenza di un autovalore reale positivo.

La matrice di raggiungibilità è

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det[R] = 0$$

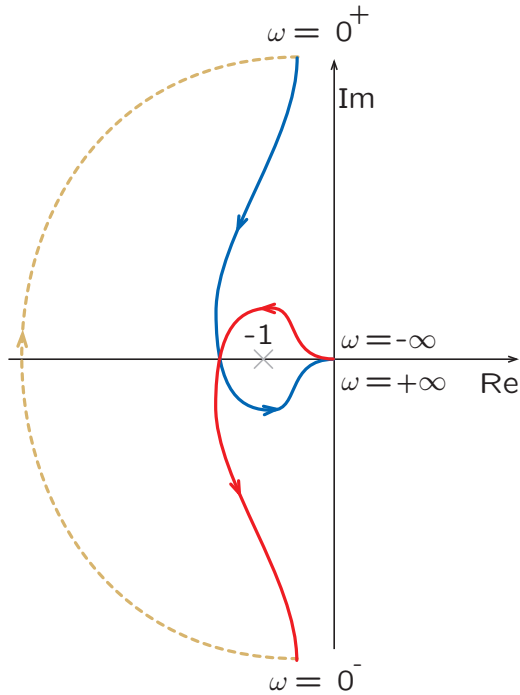


Figura 2: Diagramma di Nyquist

singolare quindi non è possibile assegnare a piacere gli autovalori alla matrice $A + BF$ tramite una reazione dallo stato $u = Fx$. Si effettua la scomposizione rispetto alla raggiungibilità per individuare il sottosistema non raggiungibile.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi nelle nuove coordinate

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che si sarebbe potuto utilizzare il test di Hautus per verificare la stabilizzabilità del sistema. La dinamica del sottosistema non raggiungibile è caratterizzata dall'autovalore $\lambda_1 = -1$ e quindi il sistema è stabilizzabile. Per assegnare l'autovalore λ_{des} al sottosistema raggiungibile $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ è sufficiente lo scalare f tale che

$$\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 f = 1 + f = \lambda_{des}$$

Ad esempio scegliendo $\lambda_{des} = -2$ si ha $f = -3$. Nelle coordinate di partenza

$$F = \begin{pmatrix} f & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} f & 0 \end{pmatrix}$$

Per soddisfare le specifiche del punto 2, si adotta lo schema misto riportato in Fig. 3. Tale sistema di controllo ammette la seguente rappresentazione nello spazio di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BF)x + Bkz \\ \dot{z} &= -Cx + r \end{aligned}$$

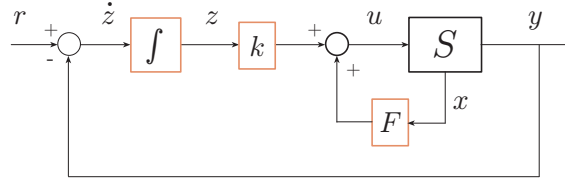


Figura 3: Schema misto

e quindi la matrice dinamica è

$$A_e = \begin{pmatrix} A + BF & Bk \\ -C & 0 \end{pmatrix}$$

riscrivibile come

$$A_e = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (F \quad k) = A_1 + B_1 F_1$$

con F_1 contenente tutti i parametri incogniti (del controllore). Affinché esista una F_1 tale da assegnare arbitrariamente gli autovalori a $A_1 + B_1 F_1$ la coppia (A_1, B_1) deve essere raggiungibile. Il calcolo della relativa matrice di raggiungibilità

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{pmatrix} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B \\ 0 & -CB & -CAB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mette in evidenza l'esistenza di una dinamica non raggiungibile (prevedibile perché il sistema originario non era completamente raggiungibile). Per capire se la matrice $(A_1 + B_1 F_1)$ è stabilizzabile o si applica il test di Hautus oppure si procede all'individuazione del sottosistema non raggiungibile. A tal fine si ha

$$\text{Im}[R_1] = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

pertanto

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che la richiesta è di assicurare che tutti gli autovalori del sistema ad anello chiuso siano coincidenti in -1 . Essendo la dinamica del sottosistema non raggiungibile proprio caratterizzata dall'autovalore -1 è possibile soddisfare la specifica richiesta. La procedura consiste nell'individuare con il metodo standard una \tilde{F}_1^a (1×2) tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{F}_1^a$$

abbia autovalori coincidenti in -1 e successivamente riportare tale risultato nelle coordinate di partenza.