

Elementi di controllo robusto

L. Lanari

Indice

1	Well-posedness	1
2	Stabilità interna	4
3	Formulazione generale in assenza di incertezze	6
3.1	Esempio: sistema a retroazione 1 D.o.F.	7
3.2	Chiusura dell'anello di controllo	9
3.3	Esempio: sensitività mista	10
3.4	Estensioni	12
4	Incertezze e modelli	12
4.1	Modello additivo dell'incertezza	14
4.2	Modello moltiplicativo dell'incertezza	16
4.3	Individuazione della funzione peso	17
4.4	Esempi	18
4.5	Isolare l'incertezza	24
5	Criterio di Nyquist: stabilità robusta	25
5.1	Incertezza additiva	25
5.2	Incertezza moltiplicativa	26
6	Formulazione generale in presenza di incertezze	27
6.1	Chiusura dell'anello di controllo	28
6.2	Chiusura dell'anello con l'incertezza	30
6.3	Esempio: incertezza moltiplicativa	31
6.4	Esempio: incertezza additiva	33
7	Teorema del piccolo guadagno	33
8	Stabilità robusta: formulazione generale	36
8.1	Stabilità robusta - Esempio	37

(Ultima modifica 31 dicembre 2009)

Queste note sono ancora in fase di elaborazione e quindi costituiscono solo una prima bozza con relativi errori ed imperfezioni. Si prega di segnalare eventuali errori e suggerire le parti che richiedono una migliore spiegazione.

Gli argomenti che qui si cercherà di esporre non verranno concretizzati con l'introduzione di algoritmi di controllo robusto purtroppo ben al di là dello scopo del corso.

1 Well-posedness

Si consideri il seguente sistema di controllo a retroazione.

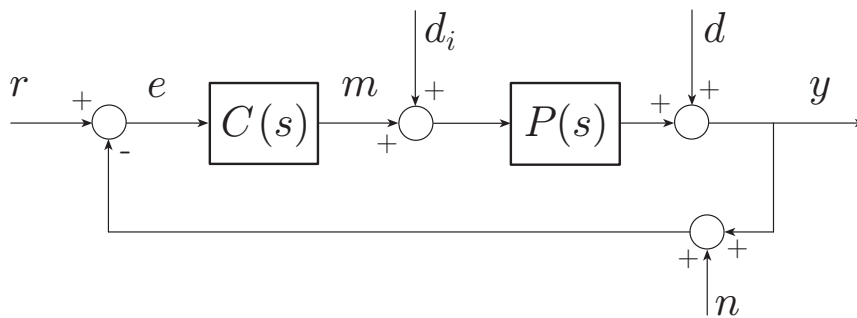


Figura 1: Sistema di controllo a retroazione

con

$$P(s) = -\frac{s-1}{s+2}, \quad C(s) = K$$

entrambe proprie. Si considerano due casi particolari:

- $C(s) = 1$. La funzione di trasferimento riferimento/uscita, per il sistema SISO in Fig. 1, è impropria

$$W_{ry}(s) = L(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} = \frac{1-s}{3}$$

e l'ingresso di controllo

$$\begin{aligned} m(s) &= \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}[r(s) - d(s) - n(s)] + \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}d_i(s) \\ &= \frac{(s+2)}{3}[r(s) - n(s) - d(s)] - \frac{(s-1)}{3}d_i(s) \end{aligned}$$

non è fisicamente realizzabile (funzione razionale impropria).

- $C(s) = 2$. Benché ancora propria, con questa scelta di $C(s)$ non si hanno problemi. Infatti

$$L(s) = \frac{2(s-1)}{s-4}$$

$$m(s) = \frac{2(s+2)}{4-s} [r(s) - n(s) - d(s)] - \frac{(s-1)}{4-s} d_i(s)$$

La differenza tra i due casi considerati diventa evidente se si calcola il termine $1 + C(s)P(s)$

$$1 + C(s)P(s) = 1 - K \frac{s-1}{s+2} = \frac{s(1-K) + 2 + K}{s+2}$$

Il numeratore di tale funzione razionale, pari al denominatore di tutte le possibili funzioni di trasferimento tra i diversi ingressi e i segnali di interesse del sistema ad anello chiuso (in assenza di modi naturali nascosti), si abbassa di grado solo per $K = 1$.

In generale, si dirà che un sistema a controreazione è **ben posto** (well-posed in inglese) se tutte le funzioni di trasferimento, tra i diversi ingressi e le variabili di interesse, sono ben definite e al massimo proprie¹.

Per individuare le condizioni generali di well-posedness, si considera una versione semplificata dello schema precedente ponendo sia r che n a 0 come illustrato in Fig. 2.

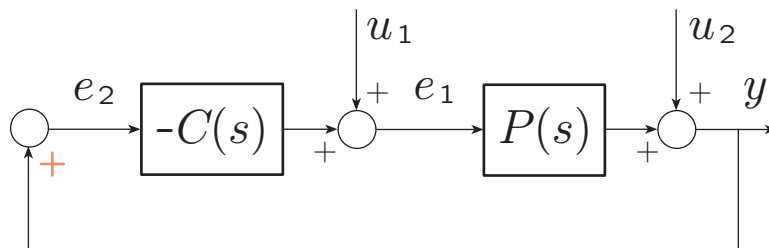


Figura 2: Sistema di controllo a retroazione semplificato

Infine si rielabora lo schema precedente come riportato in Fig. 3 nel quale si è posto $\hat{C}(s) = -C(s)$.

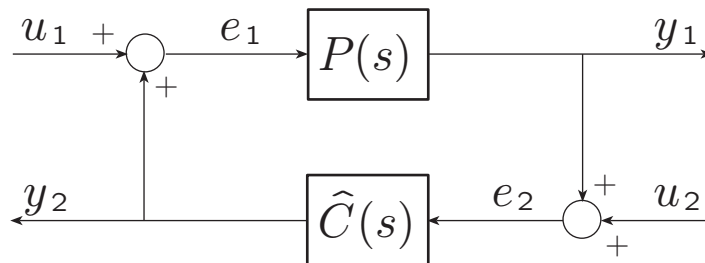


Figura 3: Sistema di controllo a retroazione rielaborato

¹Si noti che il contributo di n e d ad m è uguale mentre quello di r cambia di segno.

Date le seguenti rappresentazioni dei singoli sottosistemi $P(s)$ e $\widehat{C}(s)$

$$P(s) \sim \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}(s) \sim \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

con variabili di stato/ingresso/uscita rispettivamente (x_1, e_1, y_1) e (x_2, e_2, y_2) , il sistema ad anello chiuso può essere descritto tramite la sua rappresentazione nello spazio di stato sfruttando le equazioni di interconnessione

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 + y_2 = u_1 + C_2 x_2 + D_2 e_2 \\ e_2 &= u_2 + y_1 = u_2 + C_1 x_1 + D_1 e_1 \end{aligned}$$

o in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & -D_2 \\ -D_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Def. Il sistema interconnesso è **ben posto** se i segnali interni² e_1 e e_2 sono definiti univocamente per ogni scelta delle variabili di stato x_1 e x_2 e degli ingressi u_1 e u_2 .

Quindi la C.N & S. affinché il sistema interconnesso sia ben posto è che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -D_2 \\ -D_1 & 1 \end{pmatrix}$$

sia invertibile o, equivalentemente, che

$$1 - D_2 D_1 \neq 0 \tag{1}$$

△

Si noti che

- se D_2 è il legame diretto ingresso-uscita di $\widehat{C}(s) = -C(s)$ allora $-D_2$ è il legame diretto di $C(s)$;
- se e_1 e e_2 sono determinabili univocamente, allora possono essere espressi in funzione dello stato e degli ingressi. Si può quindi ottenere una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso;
- la condizione precedente è esprimibile in modo equivalente tramite le **funzioni di trasferimento**

$$\left[1 - \widehat{C}(s)P(s)\right]^{-1} = [1 + C(s)P(s)]^{-1} \quad \text{esiste ed è propria}$$

²Si noti che i segnali y_1 e y_2 sono definiti univocamente se lo sono e_1 e e_2 .

- infine, ricordando che $D_1 = P(\infty)$ e $D_2 = \widehat{C}(\infty)$, il sistema interconnesso è ben posto sse

$$\left[1 - \widehat{C}(\infty)P(\infty)\right]^{-1} \text{ è invertibile}$$

- Si noti che molto spesso si ha $D_1 = 0$ o $D_2 = 0$ (o entrambe) e cioè raramente, per motivi fisici, entrambe le funzioni di trasferimento sono proprie. Un sistema mal posto è un'eccezione.

Nell'esempio precedente $\widehat{C}(\infty) = -K$ e $P(\infty) = -1$ quindi il sistema interconnesso è ben posto se $K \neq 1$.

2 Stabilità interna

Come già noto, un sistema \mathcal{S} è detto **stabile internamente** (o stabile asintoticamente) se tutti gli autovalori della matrice dinamica hanno parte reale strettamente minore di zero.

Se si considera un generico sistema di controllo a retroazione, è possibile ottenere una sua rappresentazione con lo spazio di stato (dalle singole rappresentazioni del controllore e del processo + le equazioni di interconnessione) e verificarne la stabilità interna.

Sappiamo inoltre che la stabilità interna di un sistema implica la **stabilità esterna** o stabilità BIBO³ (la risposta in uscita ad un ingresso limitato – bounded – è anch'essa limitata). Il vice-versa è vero se il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

Esistono altre caratterizzazioni equivalenti per definire la stabilità interna di un sistema di controllo a partire dallo studio del comportamento del sistema rappresentato attraverso le singole funzioni di trasferimento⁴ dei sotto-sistemi che lo compongono.

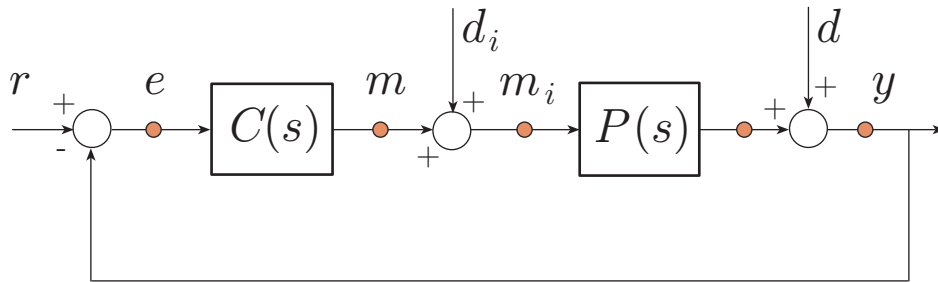


Figura 4: Sistema di controllo a retroazione con possibili segnali di interesse

³BIBO = Bounded Input– Bounded Output

⁴Si ipotizza che i singoli sotto-sistemi, controllore e processo, siano privi di dinamiche nascoste e quindi siano singolarmente completamente raggiungibili e osservabili.

Il risultato è dato dal seguente teorema

Th. Un sistema di controllo è **internamente stabile** se nessun suo componente contiene dinamiche nascoste e, immettendo segnali limitati in punti qualsiasi del sistema, le uscite corrispondenti misurate in qualsiasi punto del sistema risultano anch'esse limitate.

△

Con riferimento allo schema di controllo a retroazione di Fig. 4 si dovrebbero verificare $3 \times 5 = 15$ coppie ingresso/uscita.

Si noti però che molte scelte sono equivalenti e quindi possono essere scartate. Ad esempio, y ed e differiscono solo per una quantità limitata r e la loro osservazione fornisce la stessa informazione rispetto alla stabilità del sistema interconnesso. In modo duale, gli effetti prodotti da d ed r sono equivalenti.

Ragionamenti analoghi portano alla conclusione che ci sono solo 2 ingressi indipendenti e sole 2 uscite indipendenti.

Una possibile scelta è

- r e d_i per gli ingressi
- y e m per le uscite

Th. Il sistema a retroazione è stabile internamente sse è ben posto e tutte le funzioni di trasferimento della matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} y \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{PC}{1+PC} & \frac{P}{1+PC} \\ \frac{C}{1+PC} & -\frac{PC}{1+PC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & PS \\ CS & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_i \end{pmatrix}$$

hanno poli a parte reale strettamente minore di zero.

△

Una scelta alternativa è

- d_i e d per gli ingressi
- m_i e y per le uscite

e porta allo schema di controllo di Fig. 5.

Se il sistema è ben posto, si ha

$$\begin{pmatrix} m_i \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+PC} & -\frac{C}{1+PC} \\ \frac{P}{1+PC} & \frac{1}{1+PC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_i \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & -CS \\ PS & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_i \\ d \end{pmatrix}$$

Si noti che

- la necessità di verificare tutte e 4 le funzioni di trasferimento della matrice 2×2 deriva dall'esistenza di possibili cancellazioni poli/zeri non a parte reale negativa tra $C(s)$ e $P(s)$ e quindi dalla necessità di rilevare queste eventuali cancellazioni. Tali cancellazioni non possono essere rilevate da criteri, come il criterio di Nyquist, che si basano sul solo prodotto $C(s)P(s)$.

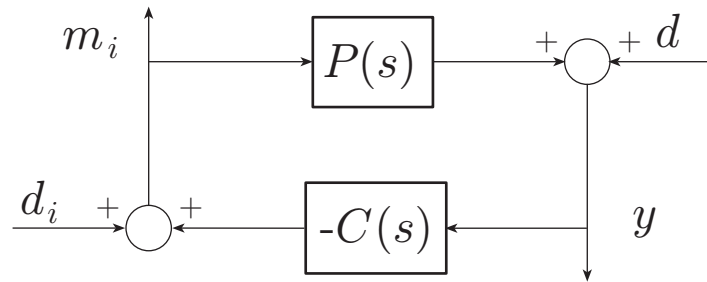


Figura 5: Sistema di controllo a retroazione

- Le funzioni di trasferimento che compaiono nella matrice 2×2 possono essere espresse in termini delle “funzioni di sensitività” che caratterizzano le prestazioni di un sistema di controllo.
- Il sistema di controllo può ovviamente essere stabile internamente (o asintoticamente) anche se il processo e/o il controllore risultano instabili⁵.
- Ai fini della stabilità interna, nel caso in cui sia $C(s)$ che $P(s)$ siano entrambe stabili asintoticamente, la condizione precedente si riduce allo studio degli zeri di $1 + C(s)P(s)$ (poli del sistema di controllo) o in modo equivalente alla stabilità della funzione di sensitività $S(s)$.
- Questa formulazione si presta alla verifica automatica della stabilità interna di un sistema di controllo.

Esempio. Siano

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad C(s) = \frac{1}{s-1}$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} S & -CS \\ PS & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & -\frac{s+1}{(s-1)(s+2)} \\ \frac{s-1}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema interconnesso è instabile malgrado la stabilità di ben tre delle funzioni che compaiono nella matrice.

3 Formulazione generale in assenza di incertezze

Una formulazione generale di un problema di controllo molto utilizzata anche nelle procedure automatiche di individuazione di un controllore fa riferimento allo schema fondamentale indicato in Fig. 6.

⁵Ad esempio nella sintesi diretta possono essere generati dei controllori instabili.

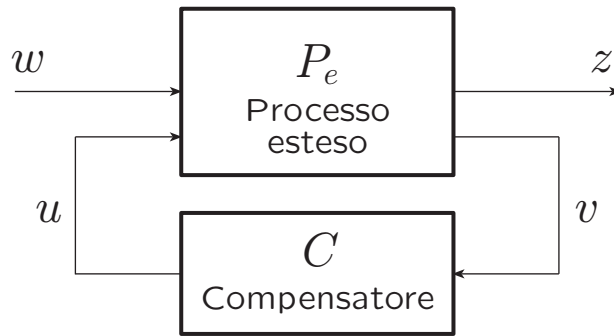


Figura 6: Generico schema di controllo senza incertezze

In tale schematizzazione il processo originale $P(s)$ è stato trasformato opportunamente (tramite le opportune interconnessioni come successivamente illustrato in alcuni esempi) in un **processo esteso** $P_e(s)$ mentre i segnali coinvolti sono stati ridefiniti come segue:

- in ingresso al processo esteso $P_e(s)$ (o generalizzato), le variabili u comprendono tutte le grandezze manipolabili (ingressi di controllo);
- il secondo insieme w di variabili in ingresso include le variabili esogene agenti sul sistema (riferimenti, disturbi, rumore di misura);
- in uscita, si distinguono le variabili v misurate e disponibili per la controreazione (ingresso del controllore);
- dalle variabili z , anche diverse dalle v , rispetto alle quali sono state definite le specifiche e non necessariamente misurabili.

Si noti che in generale $P_e(s)$ sarà una matrice di funzioni di trasferimento avendo 2 classi di segnali in ingresso (w e u) e 2 classi di segnali in uscita (z e v).

Per individuare P_e e C in un particolare problema di controllo è necessario aprire tutti gli anelli che entrano ed escono dal controllore.

Questa formulazione permette inoltre di includere eventuali funzioni peso per la definizione delle specifiche sulle diverse funzioni di sensitività (si veda ad esempio la sezione 3.3).

3.1 Esempio: sistema a retroazione 1 D.o.F.

Si consideri ad esempio il classico sistema di controllo a retroazione di Fig. 7 nel quale si desidera minimizzare il segnale di errore $y - r$ (e quindi la variabile di prestazione è $z = y - r$).

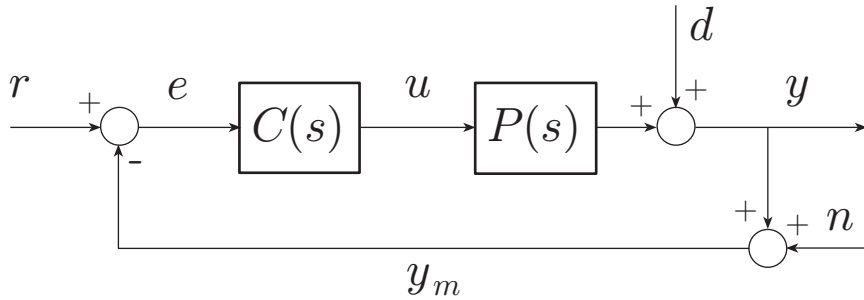


Figura 7: Schema di controllo a retroazione a 1 D.o.F.

Il primo passo consiste nell'individuare gli ingressi e le uscite del processo generalizzato. Oltre all'ingresso di controllo u si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} z &= y - r \\ v &= r - y_m = r - y - n \\ w &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ r \\ n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si noti che la variabile di prestazione z è definita in termini dell'uscita effettiva y (comunque affetta da un disturbo d) e non di quella misurata y_m . Il processo esteso è individuato dallo schema di Fig. 8.

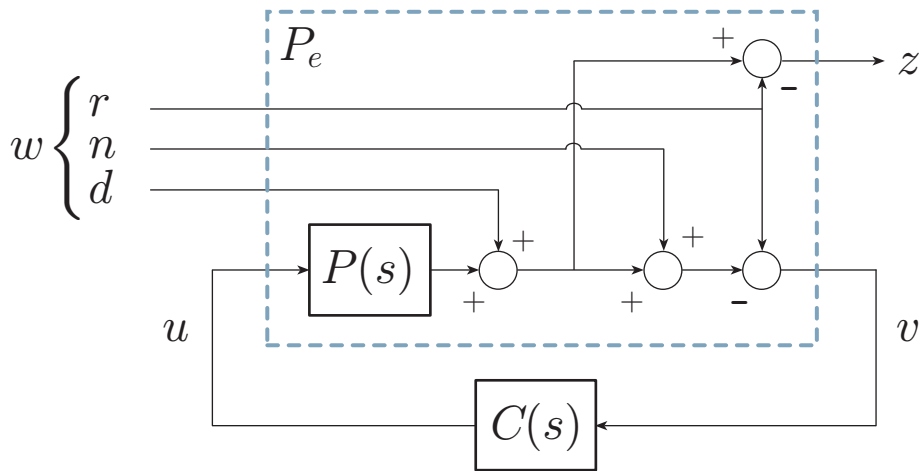


Figura 8: Schema di controllo a retroazione 1 D.o.F.: processo esteso

In tale schema valgono le relazioni

$$\begin{aligned} z &= y - r = Pu + d - r = w_1 - w_2 + 0w_3 + Pu \\ v &= r - y_m = r - Pu - d - n = -w_1 + w_2 - w_3 - Pu \end{aligned}$$

nelle quali si è accuratamente evitato di includere il controllore proprio per ottenere il processo esteso. La matrice di funzioni di trasferimento tra $[w \ u]^T$ e $[z \ v]^T$ è pari a

$$P_e(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & P(s) \\ -1 & 1 & -1 & -P(s) \end{pmatrix}$$

e ovviamente non contiene il controllore $C(s)$.

3.2 Chiusura dell'anello di controllo

Lo schema generale di controllo (in assenza di incertezze) è utile sia per l'analisi che per la sintesi del controllore. Qualora le specifiche fossero date direttamente sul sistema di controllo (cioè sul sistema ad anello chiuso) è necessario risolvere l'anello di reazione $u(s) = C(s)v(s)$ e ottenere $z(s) = G(s)w(s)$ (con G funzione di C).

A tal fine si partiziona la matrice P_e relativa al processo generalizzato in funzione delle dimensioni degli ingressi $(w \ u)^T$ e delle uscite $(z \ v)^T$. Se le dimensioni delle varie variabili sono⁶

$$\dim(w) = n_w, \quad \dim(u) = n_u, \quad \dim(z) = n_z, \quad \dim(v) = n_v$$

si ottiene la seguente partizione di P_e

$$P_e = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

con $P_{11} : (n_z \times n_w)$, $P_{12} : (n_z \times n_u)$, $P_{21} : (n_v \times n_w)$ e $P_{22} : (n_v \times n_u)$. I legami ingressi-uscite del sistema esteso sono quindi

$$z = P_{11}w + P_{12}u \tag{2}$$

$$v = P_{21}w + P_{22}u \tag{3}$$

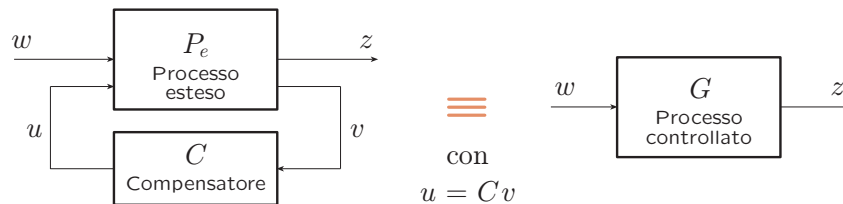


Figura 9: Chiusura dell'anello di controllo

⁶Si noti che anche per un sistema SISO si può avere sia $n_w > 1$ (ad es. in presenza di un riferimento e un disturbo) sia $n_z > 1$ (se si vogliono soddisfare specifiche su più segnali contemporaneamente, per esempio e e u).

Per individuare la matrice di funzioni di trasferimento del sistema ad anello chiuso, si sostituisce $u = Cv$ in (3) e (2), si ricava v dalla seconda equazione e si sostituisce nella prima. Il risultato è

$$z = [P_{11} + P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21}] w$$

Il sistema ad anello chiuso (legame $w \rightarrow z$) è quindi rappresentato dalla matrice di funzioni di trasferimento

$$G(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s)C(s)(1 - P_{22}(s)C(s))^{-1}P_{21}(s)$$

Quest'ultima espressione viene indicata in modo compatto⁷ con

$$G = F_\ell(P_e, C) = P_{11} + P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21} \quad (4)$$

dove $F_\ell(P_e, C)$ indica la **lower linear fractional transformation (LFT)** di P_e con parametro C .

3.3 Esempio: sensitività mista

Si consideri lo schema a retroazione di Fig. 10 per il quale si desidera formulare un problema di minimizzazione della norma \mathcal{H}_∞ della funzione di sensitività mista

$$\min_C \|N(C)\|_\infty \quad \text{con} \quad N(C) = \begin{pmatrix} w_U C S \\ w_L L \\ w_S S \end{pmatrix}$$

nella quale, si ricorda, i termini $w_S S$, $w_L L$ e $w_U C S$ rappresentano le varie funzioni di sensitività pesate. Nei pesi $w_S(s)$, $w_L(s)$ e $w_U(s)$ sono inglobate le specifiche sul comportamento desiderato del sistema di controllo.

Definendo opportunamente il processo esteso, è possibile includere questo problema nello schema generale di Fig. 6.

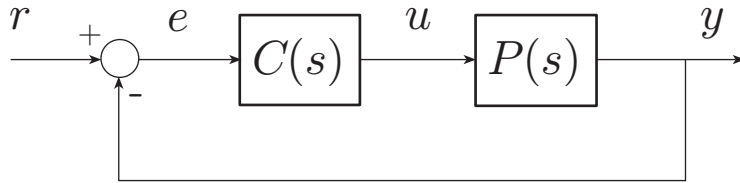


Figura 10: Sistema di controllo a retroazione

⁷Questa espressione è valida per il sistema SISO considerato nel quale si ha $n_v = n_u = 1$. Nel caso generale MIMO il termine 1 è sostituito dalla matrice identità

$$F_\ell(P_e, C) = P_{11} + P_{12}C(I - P_{22}C)^{-1}P_{21}$$

Nel problema considerato le variabili rispetto alle quali si valutano le prestazioni del sistema di controllo non sono indicate nello schema di Fig. 10, tuttavia si noti che le diverse funzioni di sensitività non pesate rappresentano particolari funzioni di trasferimento tra segnali specifici del sistema di controllo. Ad esempio la $S(s)$ rappresenta il legame $r(s) \rightarrow e(s)$, quindi $w_S(s)S(s)$ rappresenta il legame tra $r(s)$ e $w_S(s)e(s)$. Definendo quindi quest'ultima variabile come z_3 , essa rappresenta una delle variabili rispetto alle quali sono definite le prestazioni del sistema di controllo. Procedendo in modo analogo e ponendo $w = r$ si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} z_1 &= w_U u \\ z_2 &= w_L P u \\ z_3 &= w_S (w + P u) \\ v &= -(w + P u) \end{aligned}$$

Definendo $z^T = (z_1 \ z_2 \ z_3)$ si ha in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_U \\ 0 & w_L P \\ w_S & w_S P \\ -1 & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = P_e \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

Il processo esteso è rappresentato in Fig. 11

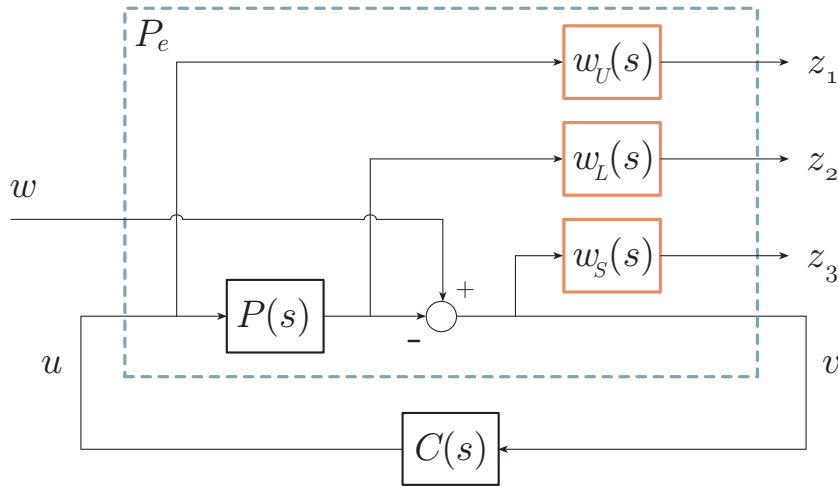


Figura 11: Sensitività mista: processo esteso

Per verificare che lo schema effettivamente implementi il problema di controllo considerato è sufficiente chiudere l'anello di controllo. Utilizzando la lower LFT (4), il sistema ad anello chiuso tra w e z è rappresentato da

$$G = F_\ell(P_e, C) = P_{11} + P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_U \\ w_LP \\ w_SP \end{pmatrix} C(1 + PC)^{-1}(-1) \\
&= \begin{pmatrix} -w_UCS \\ -w_LL \\ w_SS \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Essendo $\|G\|_\infty = \|N\|_\infty$, lo schema di Fig. 11 permette di formulare il problema considerato.

3.4 Estensioni

Si noti che nell'esempio considerato al punto 3.1, il processo esteso è stato ottenuto mediante una semplice riorganizzazione dei segnali coinvolti mentre nel problema di sensitività mista 3.3 il processo esteso include, oltre al processo originario, anche i pesi delle funzioni di sensitività. In modo del tutto duale è possibile pesare i segnali in ingresso per dare maggiore importanza ad alcune bande di frequenza di interesse o per rappresentare il contenuto frequenziale dei segnali.

Ad esempio, per rappresentare un disturbo d con contenuto frequenziale maggiormente concentrato in bassa frequenza, si può immaginare d come l'uscita di un filtro passa-basso forzato da un segnale a energia limitata o un rumore bianco come illustrato in Fig. 12.

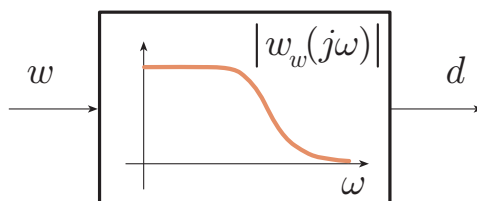


Figura 12: Disturbo come uscita di un filtro

Indicando con \tilde{w} il segnale “fisico” (riferimento r , disturbo d o rumore n) che entra nel sistema, si può definire la variabile

$$w = w_w(s)\tilde{w}$$

e ottenere il processo esteso come illustrato in Fig. 13.

4 Incertezze e modelli

Il termine incertezza si riferisce alle differenze o errori tra modelli e realtà. Qualsiasi meccanismo venga utilizzato per esprimere tali errori questo viene chiamato “rappresentazione dell'incertezza”. Tali rappresentazioni variano principalmente per la quantità di struttura che essi contengono.

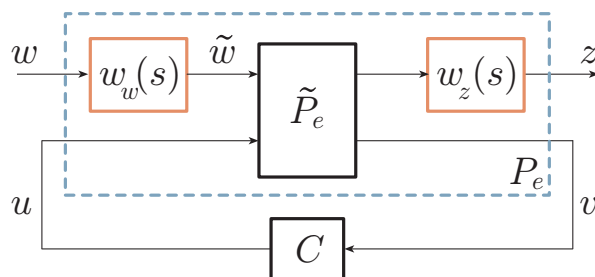


Figura 13: Generico schema di controllo con funzioni peso

Si assume che il processo sia descritto non più da un solo ma da un insieme di modelli lineari stazionari ognuno dei quali, nel dominio della frequenza, è descrivibile sulla base di due grandezze: il modulo e la fase.

Dato un modello nominale, si possono definire per la pulsazione che varia in un certo intervallo, dei limiti ai valori del modulo e della fase dando luogo a una regione – nel piano complesso – di incertezza. Lo stesso principio vale se si fanno variare dei parametri. Ad ogni pulsazione, al variare dei parametri, si ottiene una regione di incertezza approssimabile con un disco.

La forma di tale regione di incertezza purtroppo non ha una semplice caratterizzazione in termini geometrici; si definisce quindi un disco che includa tale regione. Tale disco è caratterizzato da un raggio $\gamma^a(\omega)$ funzione della pulsazione ω . Il processo di approssimazione è illustrato nelle Fig. 14(a) e Fig. 14(b).

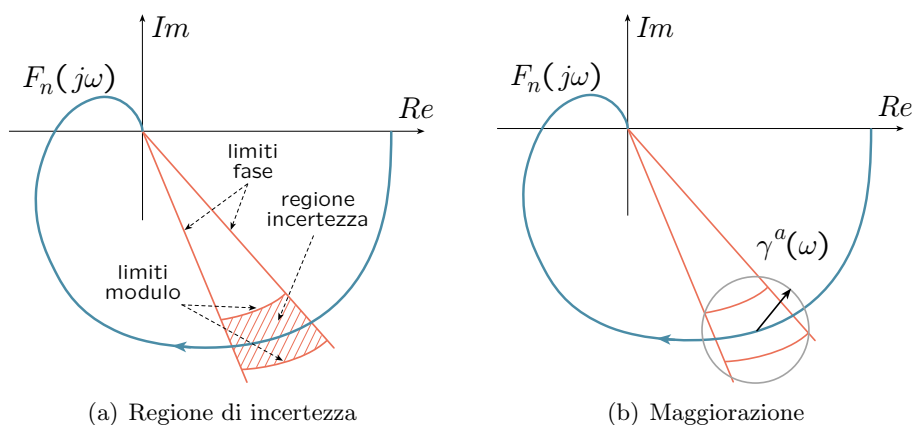


Figura 14: Approssimazione della regione di incertezza

L'insieme dei processi è definito come

$$\{P : |P(j\omega) - P_n(j\omega)| \leq \gamma^a(\omega)\}$$

con $P(j\omega)$ processo perturbato e $P_n(j\omega)$ processo nominale. La Fig. 15(a) illustra le varie grandezze introdotte.

- Al variare di ω si ottiene una banda di incertezza intorno all'andamento relativo al valore nominale;
- come illustrato in Fig. 15(b), il raggio $\gamma^a(\omega)$ di solito aumenta con l'aumentare della pulsazione in quanto il modello a bassa frequenza è più facile da determinare (le incertezze sono maggiori ad alta frequenza per la presenza di fenomeni non modellati o difficilmente modellabili);
- la descrizione dell'incertezza tramite il disco di raggio $\gamma^a(\omega)$ è comoda ma conservativa⁸.

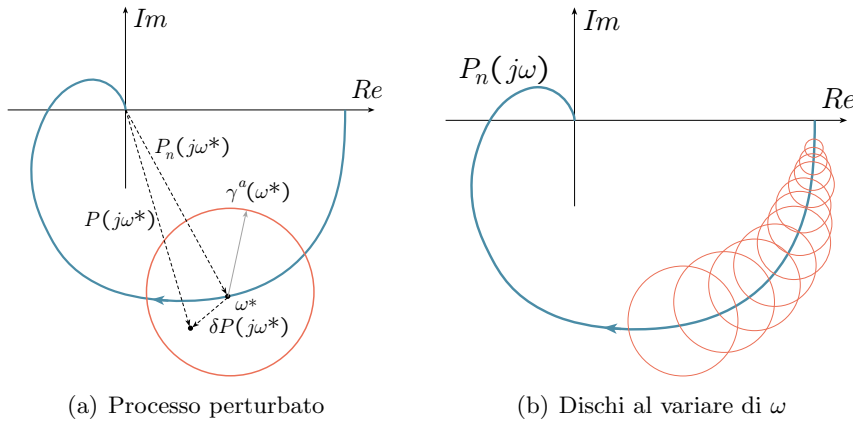


Figura 15: Rappresentazione frequenziale del processo perturbato

Ai fini dell'analisi e della sintesi, esistono diversi modelli dell'incertezza; verranno di seguito illustrati i due più comuni: modello additivo o incertezza additiva e modello moltiplicativo o incertezza moltiplicativa.

4.1 Modello additivo dell'incertezza

Ogni processo perturbato può essere rappresentato come la somma del processo nominale $P_n(j\omega)$ e di una perturbazione $\delta P(j\omega)$. Il processo perturbato soddisfa quindi la relazione

$$P(j\omega) = P_n(j\omega) + \delta P(j\omega)$$

con $\delta P(j\omega)$ **incertezza additiva** (non nota), limitata da $\gamma^a(\omega)$ e cioè

$$|\delta P(j\omega)| \leq \gamma^a(\omega)$$

⁸Le successive considerazioni su stabilità e prestazioni robuste saranno di conseguenza conservative. In questo modo si considera il "caso peggiore". In alternativa si possono considerare approcci basati sull'ottimizzazione di qualche valor medio oppure facendo ricorso al controllo adattativo

Un possibile [modello dell'incertezza additiva](#) è dato dalla seguente caratterizzazione dell'insieme dei processi incerti

$$\mathcal{P} = \{P(s) : P(s) = P_n(s) + w_a(s)\Delta_a(s)\}$$

con $\Delta_a(s)$ una funzione di trasferimento arbitraria (non nota) stabile asintoticamente con modulo inferiore a 1 per tutte le pulsazioni

$$|\Delta_a(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$$

(o equivalentemente $\|\Delta_a(j\omega)\|_\infty \leq 1$), mentre $w_a(s)$ è una funzione razionale propria⁹ stabile asintoticamente e fornisce l'informazione di come l'accuratezza del modello nominale varia con la frequenza. Si noti che in questa formulazione le perturbazioni sono rappresentate da Δ_a .

La Fig. 16(a) riporta una schematizzazione del processo perturbato mentre il modello additivo dell'incertezza è illustrato in Fig. 16(b).

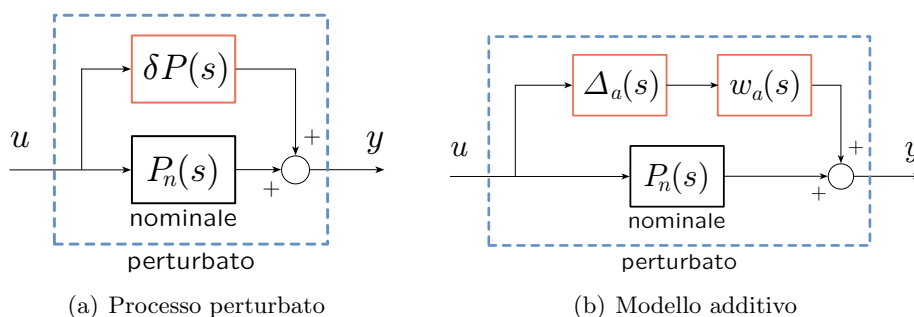


Figura 16: Schema a blocchi dell'incertezza additiva

Si noti che

- la rappresentazione grafica con gli schemi a blocchi non corrisponde a una situazione fisica reale;
- l'insieme \mathcal{P} include modelli di ordine arbitrario;
- se le incertezze preponderanti sono di tipo parametrico, la maggiorazione utilizzata rischia di essere largamente sovrabbondante. La variazione di un parametro reale del processo (ad es. il valore di una massa, del guadagno o di una costante di tempo) corrisponde ad un Δ reale. Assumendo invece Δ complesso si amplia inutilmente la classe dei sistemi perturbati (si veda l'esempio sull'incertezza di guadagno a pagina 18);
- essendo Δ_a qualsiasi con $\|\Delta_a\|_\infty \leq 1$, a ogni pulsazione ω la quantità Δ_a rappresenta un disco con raggio pari a 1 centrato nell'origine. Di

⁹Nell'ipotesi molto realistica che l'incertezza cresca con la frequenza.

conseguenza $P_n(j\omega) + w_a(j\omega)\Delta_a(j\omega)$, per ogni pulsazione ω , rappresenta un disco centrato in $P_n(j\omega)$ con raggio $|w_a(j\omega)|$. Si può quindi anche interpretare $w_a(s)$ come un peso introdotto per normalizzare la perturbazione Δ_a che assume al massimo il valore 1 in modulo.

4.2 Modello moltiplicativo dell'incertezza

In alternativa al modello additivo dell'incertezza, si può definire l'incertezza in termini di deviazione del processo reale da quello nominale. In tal caso l'insieme dei modelli perturbati diventa

$$\left\{ P : \frac{|P(j\omega) - P_n(j\omega)|}{|P_n(j\omega)|} \leq \gamma^m(\omega) \right\}$$

e ogni sistema perturbato $P(s)$ soddisfa la relazione

$$P(j\omega) = P_n(j\omega)(1 + \delta^m P(j\omega))$$

con $\delta^m P(j\omega)$ **incertezza moltiplicativa** (complessa) limitata in modulo dalla quantità reale positiva $\gamma^m(\omega)$

$$|\delta^m P(j\omega)| \leq \gamma^m(\omega)$$

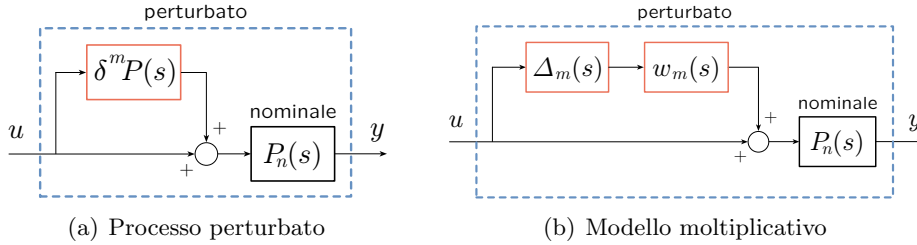


Figura 17: Schema a blocchi dell'incertezza moltiplicativa

Un possibile **modello dell'incertezza moltiplicativa** è dato dalla seguente caratterizzazione dell'insieme dei processi perturbati

$$\mathcal{P} = \{P(s) : P(s) = P_n(s)(1 + w_m(s)\Delta_m(s))\} \quad (5)$$

con $|\Delta_m(j\omega)| \leq 1 \forall \omega$, (o $\|\Delta_m\|_\infty \leq 1$), $w_m(s)$ stabile asintoticamente e propria, $\Delta_m(s)$ arbitraria e stabile asintoticamente.

Valutando la relazione (5) precedente in $s = j\omega$ e dividendo per $P_n(j\omega)$ si ottiene

$$\frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} = 1 + w_m(j\omega)\Delta_m(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} = w_m(j\omega)\Delta_m(j\omega)$$

e quindi, data la limitatezza di $|\Delta_m(j\omega)|$, si ottiene

$$\left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| \leq |w_m(j\omega)|, \quad \forall \omega \geq 0$$

Per ogni pulsazione ω , la funzione $|w_m(j\omega)|$ rappresenta la massima “distanza relativa” tra il processo nominale $P_n(j\omega)$ e la funzione non nota $P(j\omega)$.

I metodi di sintesi sviluppati sulla base di queste rappresentazioni dell’incertezza sono tali da garantire le proprietà desiderate per ogni elemento $P(j\omega)$ dell’insieme \mathcal{P} ; in altri termini tali metodi considerano il sistema perturbato come se ogni elemento di \mathcal{P} fosse un’istanza del processo reale. La conservatività di tale approccio risiede nell’assumere che tutti gli elementi di \mathcal{P} siano possibili modelli del sistema perturbato.

Si noti infine che, anche per l’incertezza moltiplicativa, gli schemi a blocchi di Fig. 17(a) e Fig. 17(b) non corrispondono ad una situazione fisica reale. Ad esempio, si ha che ogni polo instabile di $P(s)$ è anche polo di $P_n(s)$ ma non vale necessariamente il vice-versa a causa di possibili cancellazioni tra $1 + w_m(s)\Delta_m(s)$ e $P_n(s)$. Ciò significa che il processo perturbato può anche avere meno poli a parte reale positiva di quello nominale; le cancellazioni tuttavia non danno luogo a modi nascosti instabili.

4.3 Individuazione della funzione peso

Si può utilizzare la seguente procedura per l’individuazione della funzione peso nei due casi considerati.

- Si seleziona un modello nominale (modello semplificato – ordine ridotto o senza ritardo – o basato sui valori medi dei parametri o infine tramite considerazioni sul diagramma di Nyquist);
- Incertezza additiva – individuare per ogni pulsazione il minor raggio $r_a(\omega)$ che includa tutti i possibili sistemi perturbati (ciò richiede comunque una conoscenza della struttura di ciò che si trascura, si veda la sezione 4.4)

$$r_a(\omega) = \max_{P \in \mathcal{P}} |P(j\omega) - P_n(j\omega)|$$

La $w_a(s)$ (funzione razionale di ordine ridotto) è scelta in modo tale che

$$|w_a(j\omega)| \geq r_a(\omega) \quad \forall \omega$$

- Incertezza moltiplicativa – si individua

$$r_m(\omega) = \max_{P \in \mathcal{P}} \left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right|$$

La funzione razionale peso $w_m(s)$ deve essere tale da soddisfare

$$|w_m(j\omega)| \geq r_m(\omega) \quad \forall \omega$$

4.4 Esempi

I concetti precedenti verranno illustrati tramite una serie di esempi man mano più complessi.

- **Incertezza sul guadagno**

Sia l'insieme dei processi perturbati dato da

$$P_p(s) = k_p P_o(s), \quad k_{min} \leq k_p \leq k_{max}$$

con $P_o(s)$ priva di incertezza (attenzione, $P_o(s)$ non è il processo nominale). Si noti che k_p , parametro incerto, può assumere solo valori reali. Definendo

$$k_p = \bar{k}(1 + r_k \Delta)$$

si assume che \bar{k} sia il valore nominale; inoltre Δ è reale con $\Delta \in [-1, 1]$. Per individuare \bar{k} e la funzione peso r_k basta notare che

$$\begin{aligned} \text{per } \Delta = -1 & \quad \text{si ha } \bar{k}(1 - r_k) = k_{min} \\ \text{per } \Delta = +1 & \quad \text{si ha } \bar{k}(1 + r_k) = k_{max} \end{aligned}$$

Effettuando la somma e la differenza si ottiene

$$\begin{aligned} k_{max} + k_{min} &= 2\bar{k} \\ k_{max} - k_{min} &= 2r_k \bar{k} \end{aligned}$$

da cui

$$\bar{k} = \frac{k_{max} + k_{min}}{2}, \quad r_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{2\bar{k}} = \frac{k_{max} - k_{min}}{k_{max} + k_{min}}$$

Si ottiene una rappresentazione **moltiplicativa** dell'incertezza

$$P_p(s) = \bar{k} P_o(s)(1 + r_k \Delta) = P(s)(1 + w_m(s)\Delta), \quad |\Delta| \leq 1$$

con Δ reale e $P(s) = \bar{k} P_o(s)$ **processo nominale**. Si è scelto come valore di \bar{k} il guadagno medio mentre la funzione peso $w_m(s) = r_k$ rappresenta l'ampiezza relativa dell'incertezza di guadagno.

- **Incertezza sulla costante di tempo**

Sia l'insieme dei processi perturbati dato da

$$P_p(s) = \frac{1}{1 + \tau_p s} P_o(s), \quad \tau_{min} \leq \tau_p \leq \tau_{max}$$

con $P_o(s)$ certo mentre la costante di tempo τ_p è il parametro incerto. Si può definire il parametro incerto τ_p come

$$\tau_p = \bar{\tau}(1 + r_\tau \Delta), \quad \text{con } \Delta \in [-1, 1] \text{ reale}$$

Con lo stesso ragionamento precedente si ottiene

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}, \quad r_{\tau} = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2\bar{\tau}}$$

Sostituendo il parametro incerto in $P_p(s)$ si ha la seguente rappresentazione [moltiplicativa inversa](#) dell'incertezza

$$\begin{aligned} P_p(s) &= \frac{P_o(s)}{1 + \bar{\tau}s + r_{\tau}\bar{\tau}s\Delta} \\ &= \frac{P_o(s)}{(1 + \bar{\tau}s)} \frac{1}{1 + w_i(s)\Delta} \\ &= P(s) \frac{1}{1 + w_i(s)\Delta} \end{aligned}$$

con

$$P(s) = \frac{P_o(s)}{(1 + \bar{\tau}s)}, \quad w_i(s) = \frac{r_{\tau}\bar{\tau}s}{1 + \bar{\tau}s}$$

- Come ulteriore esempio, si consideri il caso in cui si dispone di un modello della forma

$$P(s) = P_n(s)P_{\delta}(s)$$

nella quale $P_n(s)$ rappresenta il modello nominale (semplificato) e $P_{\delta}(s)$ una dinamica che si desidera trascurare per la sintesi del controllore (ad es. perché non nota con esattezza). $P_{\delta}(s)$ può sia essere una dinamica fissa o appartenere a un insieme \mathcal{P}_{δ} . Si desidera rappresentare la [dinamica trascurata](#) tramite un'incertezza moltiplicativa. L'ampiezza dell'incertezza relativa è data da

$$r_m(\omega) = \max_{P \in \mathcal{P}} \left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| = \max_{P_{\delta} \in \mathcal{P}_{\delta}} |P_{\delta}(j\omega) - 1| \quad (6)$$

Si considerano i seguenti casi particolari.

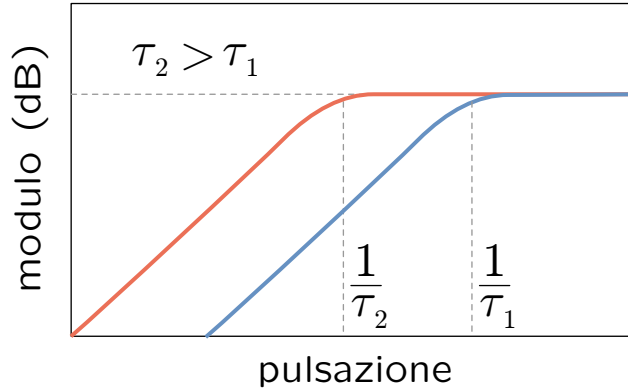
- [Dinamica del primo ordine trascurata](#)

$$P_{\delta}(s) = \frac{1}{1 + \tau_p s}, \quad 0 \leq \tau_p \leq \tau_{max}$$

In questa situazione l'incertezza relativa

$$|P_{\delta}(j\omega) - 1| = \left| \frac{-\tau_p s}{1 + \tau_p s} \right|$$

al variare di τ_p nell'intervallo $[0, \tau_{max}]$, assume il valore massimo in corrispondenza a $\tau_p = \tau_{max}$ come illustrato in Fig. 18.

Figura 18: Individuazione di $r_m(\omega)$

Come indicato nella sezione 4.3, la $r_m(\omega)$ può essere rappresentata da una funzione razionale $w_m(s)$ con

$$w_m(s) = \frac{\tau_{max}s}{1 + \tau_{max}s}$$

tale che $|w_m(j\omega)| = r_m(\omega)$. Ad alta frequenza il peso tende a 1 mentre l'asintoto a bassa frequenza passa per 1 a $1/\tau_{max}$.

- **Ritardo trascurato**

In questo caso si assume che la $P_\delta(s)$ sia un puro ritardo

$$P_\delta(s) = e^{T_p s}, \quad 0 \leq T_p \leq T_{max}$$

con l'entità del ritardo T_p incerto. Prendendo in considerazione il ritardo massimo T_{max} si ha l'errore relativo corrispondente (6)

$$|P_\delta(j\omega) - 1|_{T_p=T_{max}} = |1 - P_\delta(j\omega)|_{T_p=T_{max}} = |1 - e^{j\omega T_{max}}|$$

L'andamento di tale errore relativo è riportato in Fig. 19 nel quale l'ascissa rappresenta la pulsazione normalizzata ωT_{max} (ad es. in 1 si ha una pulsazione pari a $1/T_{max}$). Si noti che il modulo assume il valore massimo 2 in π/T_{max} e taglia l'asse 1 a circa π/T_{max} . Per ogni altro valore di $T_p < T_{max}$ l'andamento è simile con lo stesso massimo e al variare di T_p l'andamento di $\max_{P_\delta \in \mathcal{P}_\delta}$ si ottiene in corrispondenza di $T_p = T_{max}$. La $r_m(\omega)$ è data da

$$\begin{aligned} r_m(\omega) &= \max_{0 \leq T_p \leq T_{max}} |1 - e^{j\omega T_p}| \\ &= |1 - e^{j\omega T_{max}}| \\ &= \begin{cases} |1 - e^{j\omega T_{max}}| & \text{per } \omega < \pi/T_{max} \\ 2 & \text{per } \omega \geq \pi/T_{max} \end{cases} \end{aligned}$$

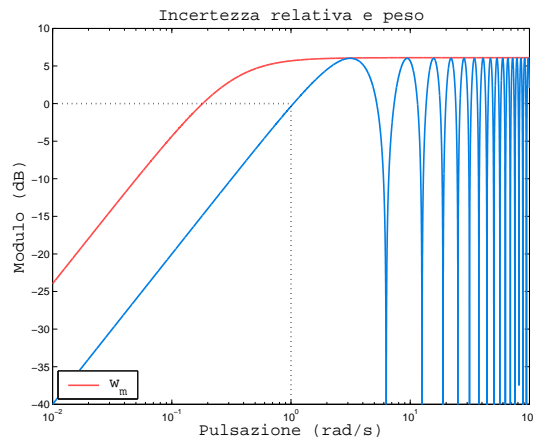


Figura 19: Funzione peso per un ritardo incerto

Una funzione razionale stabile che maggiora la $r_m(\omega)$ è ad esempio data da

$$w_m(s) = 2\alpha \frac{\pi T_{max}s}{\pi T_{max}s + 1}, \quad \alpha > 1$$

■ Il seguente esempio illustra una possibile individuazione della funzione peso $w_m(s)$ in un caso di **variazione parametrica** al variare contemporaneo di più parametri. Sia la famiglia di processi perturbati data da

$$P(s) = \frac{K}{1 + \tau s} e^{-Ts}$$

con i parametri K, τ e T che assumono valori nell'intervallo $[2, 3]$.

A titolo di esempio si riportano alcune regioni, per diversi valori della pulsazione ω , relative all'incertezza ipotizzata.

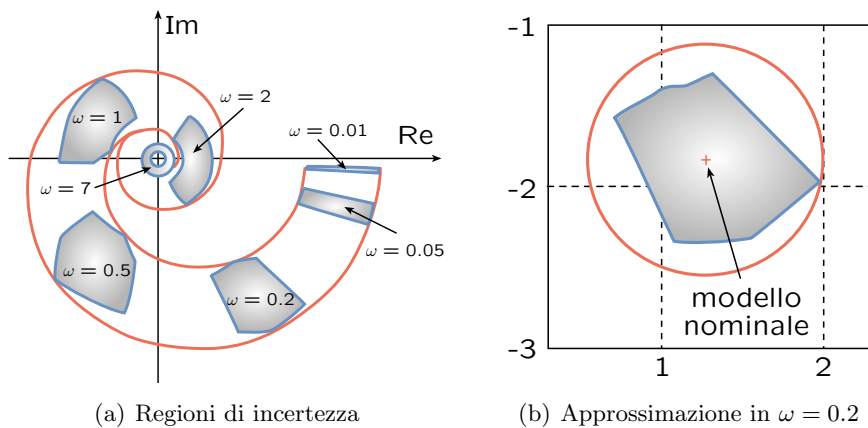


Figura 20: Regioni di incertezza e approssimazione

Si desidera rappresentare questo insieme di processi tramite il modello dell'incertezza moltiplicativa. Il modello nominale prescelto è privo del ritardo e assume i valori medi \bar{K} , $\bar{\tau}$ dei parametri K e τ

$$P_n(s) = \frac{\bar{K}}{1 + \bar{\tau}s} \quad \text{con} \quad \bar{K} = \bar{\tau} = 2.5$$

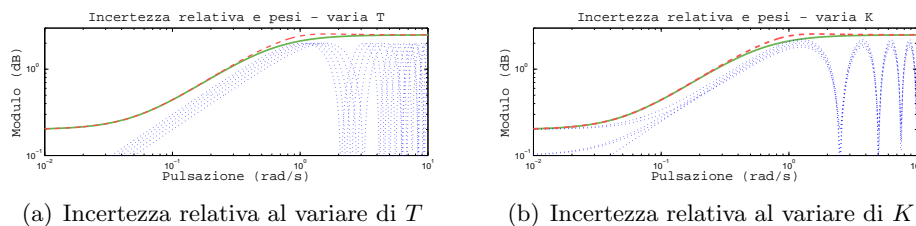


Figura 21: Incertezze relative

Nelle Fig. 21(a), 21(b) e 22(a) si riportano gli andamenti dell'errore relativo

$$\left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right|$$

relativi alle *singole* variazioni dei parametri.

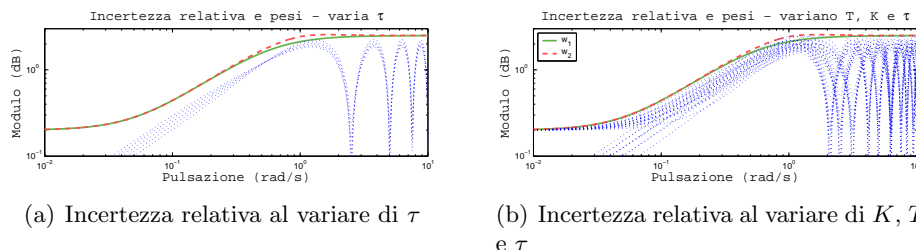


Figura 22: Incertezze relative

Tutte le curve si trovano al di sotto del valore 0.2 a bassa frequenza e 2.5 ad alta frequenza.

Una prima funzione peso con guadagno 0.2 a bassa frequenza e 2.5 ad alta frequenza è data da

$$w_1(s) = \frac{\tau_1 s + 0.2}{(\tau_1/2.5)s + 1}, \quad \tau_1 = 4$$

Facendo variare singolarmente i parametri, tutte le curve sono maggiorate dalla curva della candidata funzione peso $|w_1(j\omega)|$.

Tuttavia dall'errore relativo al variare *contemporaneo* dei tre parametri riportato in Fig. 22(b) si nota che nell'intorno della pulsazione $\omega = 1$ il

comportamento è diverso rispetto agli andamenti ottenuti facendo variare i parametri singolarmente.

La prima scelta della funzione peso fornisce una buona maggiorazione a tutte le pulsazioni eccetto nell'intorno della pulsazione $\omega = 1$. La funzione peso $w_1(s)$ non racchiude quindi tutte le possibili perturbazioni ammissibili. Per correggere tale scelta, si può introdurre un peso correttivo $w_{1b}(s)$

$$w_{1b}(s) = \frac{s^2 + 1.6s + 1}{s^2 + 1.4 + 1}$$

che aumenta leggermente il modulo in $\omega = 1$ come illustrato in Fig. 23.

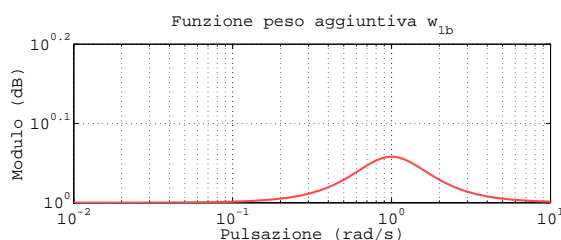


Figura 23: Funzione peso aggiuntiva

La funzione peso definitiva è

$$w_m(s) = w_1(s)w_{1b}(s) = \left(\frac{4s + 0.2}{(4/2.5)s + 1} \right) \left(\frac{s^2 + 1.6s + 1}{s^2 + 1.4 + 1} \right)$$

■ In tutti gli esempi precedenti la funzione peso dell'incertezza è stata ricavata ragionando in modo più o meno semplice sull'incertezza. Tuttavia non sempre è facile o possibile ricavare esplicitamente tale funzione peso. Molto spesso è possibile procedere come segue:

- si tracciano un insieme di andamenti corrispondenti dell'errore assoluto (modello additivo) o relativo (modello moltiplicativo)

$$|P(j\omega) - P_n(j\omega)| \quad \text{o} \quad \left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right|$$

al variare dei parametri incerti;

- si individua numericamente (tramite procedure più o meno automatizzate) una funzione peso a fase minima e stabile asintoticamente che maggiori tutti i tracciati precedenti.

Ad esempio, si consideri il processo perturbato

$$P(s) = \frac{K}{1 + \tau s} e^{-Ts}, \quad 4 \leq K \leq 9, \quad 2 \leq \tau \leq 3, \quad 1 \leq T \leq 2$$

e si scelga il seguente processo nominale

$$P_n(s) = \frac{6.5}{(1 + 2.5s)(1 + 1.5s)}$$

Si noti che il termine $(1 + 1.5s)$ corrisponde ad un'approssimazione del ritardo medio¹⁰ corrispondente a $T = 1.5$.

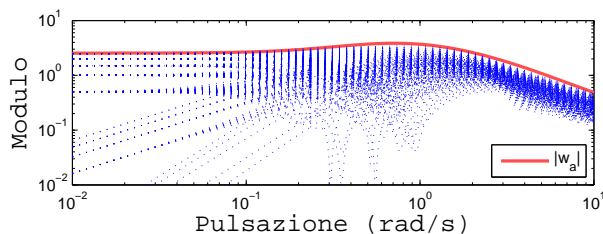


Figura 24: Funzione peso per perturbazione additiva

Facendo variare contemporaneamente tutti i parametri è possibile individuare la seguente funzione peso tramite l'ausilio del calcolatore

$$w_a(s) = \frac{0.0376(s + 116.4808)(s + 7.4514)(s + 0.2674)}{(s + 1.2436)(s + 0.5575)(s + 4.9508)}$$

che maggiora la quantità

$$|P(j\omega) - P_n(j\omega)|$$

come illustrato in Fig. 24. Si noti infine che il processo nominale prescelto ha una differenza tra il numero di poli e degli zeri (grado relativo) diversa da quella del sistema originale perturbato. In questa situazione l'errore relativo avrà un andamento maggiorato da una funzione impropria.

4.5 Isolare l'incertezza

Dopo aver introdotto i modelli additivo e moltiplicativo e illustrato tramite alcuni esempi l'individuazione delle relative funzioni peso, è utile far vedere come "isolare" l'incertezza e cioè separare in un processo incerto la parte nota dall'incertezza. A tal fine si definisce u_Δ l'uscita di un blocco avente funzione di trasferimento l'incertezza Δ mentre y_Δ ne indica l'ingresso.

In tal modo si individua un nuovo processo avente

- in ingresso non solo gli ingressi standard (ingresso di controllo e ingressi esogeni) ma anche l'ingresso fittizio y_Δ
- in uscita sia le grandezze controllate e le variabili misurate sia la variabile fittizia u_Δ .

Nelle Fig. 25(a) e Fig. 25(b) sono riportati due esempi nei quali è stata "isolata" l'incertezza Δ .

¹⁰ Approssimante (0, 1) di Padé.

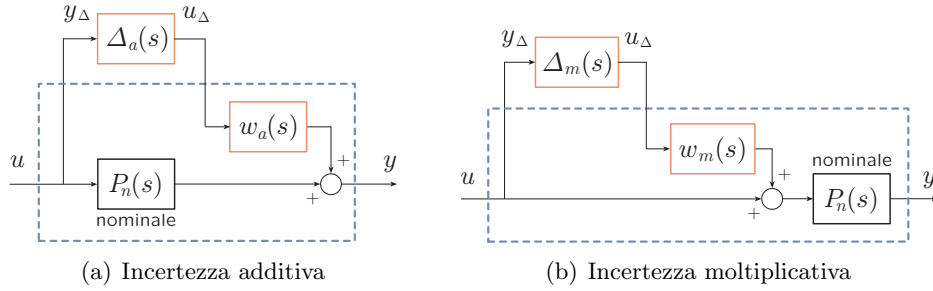


Figura 25: Incertezze “isolate”

5 Criterio di Nyquist: stabilità robusta

Sia il seguente problema di seguito indicato con RS (Robust Stability)

Stabilità robusta

Si desidera assicurare che un sistema di controllo rimanga stabile asintoticamente per tutte le perturbazioni Δ tali che $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1$.

Dal punto di vista del controllo, si richiede di individuare un controllore che assicuri la stabilità asintotica in presenza di incertezze Δ (Stabilizzazione robusta).

Per un sistema di controllo a retroazione unitaria, il criterio di Nyquist permette di ricavare delle condizioni di stabilità robusta direttamente dal grafico del diagramma di Nyquist del sistema in catena diretta.

Di seguito verranno illustrati i due casi finora considerati, incertezza additiva e moltiplicativa, nell'ipotesi in cui il sistema ad anello aperto sia privo di poli a parte reale positiva. In tale situazione, purché il diagramma di Nyquist compia un solo attraversamento del cerchio di raggio unitario, si ha stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso in presenza di perturbazioni se il diagramma di Nyquist relativo al sistema incerto non compie giri intorno al punto di coordinate $(-1, 0)$.

5.1 Incertezza additiva

Il processo perturbato è dato da

$$P(s) = P_n(s) + w_a(s)\Delta(s)$$

con $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1$. Di conseguenza il sistema in catena diretta è

$$F(s) = C(s)P(s) = C(s)[P_n(s) + w_a(s)\Delta(s)] = F_n(s) + C(s)w_a(s)\Delta(s)$$

nel quale si è posto $F_n(s) = C(s)P_n(s)$.

Come direttamente deducibile dalla Fig. 26, il diagramma di Nyquist perturbato non compie giri intorno al punto $(-1, 0)$ se e solo se

$$\begin{aligned} \text{(RS)} &\Leftrightarrow |w_a(j\omega)C(j\omega)| < |1 + F_n(j\omega)| \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{w_a(j\omega)C(j\omega)}{1 + F_n(j\omega)} \right| < 1 \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow \|w_a(j\omega)C(j\omega)S_n(j\omega)\|_\infty < 1 \end{aligned}$$

dove $S_n(j\omega)$ indica la funzione di sensitività del sistema nominale.

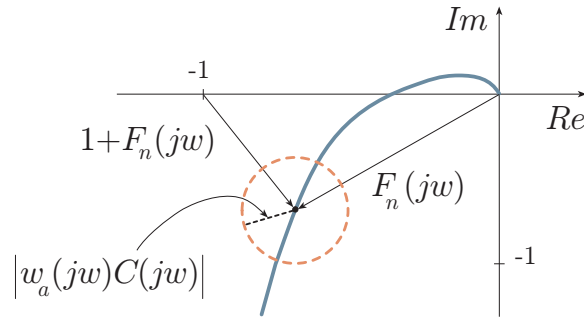


Figura 26: Criterio di robustezza: incertezza additiva

Si noti che se si fosse considerato un'incertezza strettamente minore di 1 in modulo

$$\|\Delta(j\omega)\|_\infty < 1$$

allora la condizione sarebbe stata

$$\|w_a(j\omega)C(j\omega)S_n(j\omega)\|_\infty \leq 1$$

5.2 Incertezza moltiplicativa

Il processo perturbato è dato da

$$P(s) = P_n(s)(1 + w_m(s)\Delta(s))$$

con $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1$. Pertanto il sistema in catena diretta è

$$F(s) = C(s)P(s) = C(s)P_n(s)(1 + w_m(s)\Delta(s)) = F_n(s) + w_m(s)F_n(s)\Delta(s)$$

nel quale si è posto $F_n(s) = C(s)P_n(s)$.

Come direttamente deducibile dalla Fig. 27, il diagramma di Nyquist perturbato non compie giri intorno al punto $(-1, 0)$ se e solo se

$$\text{(RS)} \Leftrightarrow |w_m(j\omega)F_n(j\omega)| < |1 + F_n(j\omega)| \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{w_m(j\omega)F_n(j\omega)}{1+F_n(j\omega)} \right| < 1 \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow \|w_m(j\omega)L_n(j\omega)\|_\infty < 1$$

dove $L_n(j\omega)$ indica la funzione di sensitività complementare del sistema nominale.

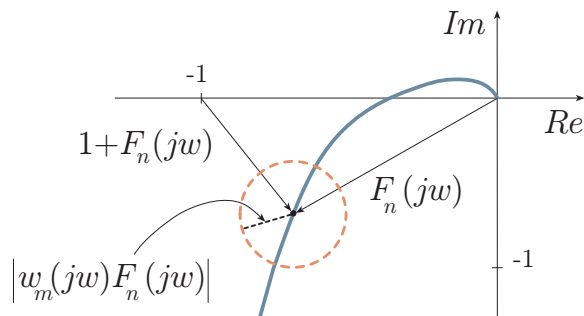


Figura 27: Criterio di robustezza: incertezza moltiplicativa

Analogamente al caso additivo,

$$\text{se } \|\Delta(j\omega)\|_\infty < 1 \quad \text{RS} \Leftrightarrow \|w_m(j\omega)L_n(j\omega)\|_\infty \leq 1$$

6 Formulazione generale in presenza di incertezze

Nelle sezioni precedenti sono state introdotte le seguenti estensioni per un generico sistema di controllo

- distinzione tra gli ingressi manipolabili w e gli ingressi di controllo u ;
- distinzione tra le uscite rispetto alle quali vengono formulate le specifiche z e le grandezze misurate z disponibili per il controllore;
- inclusione di funzioni peso in uscita per la formulazione delle specifiche sulle diverse funzioni di sensitività pesate
- inclusione di funzioni peso sui segnali in ingresso per caratterizzarne il contenuto frequenziale
- l'aver isolato le eventuali incertezze con l'introduzione del segnale in ingresso y_Δ e in uscita u_Δ

Sulla base di queste modifiche il processo originale si arricchisce e diventa il *processo esteso* avente come ingressi y_Δ , w e u mentre le uscite sono u_Δ , z e v .

Lo schema generale di controllo in presenza di incertezza è rappresentato in Fig. 28.

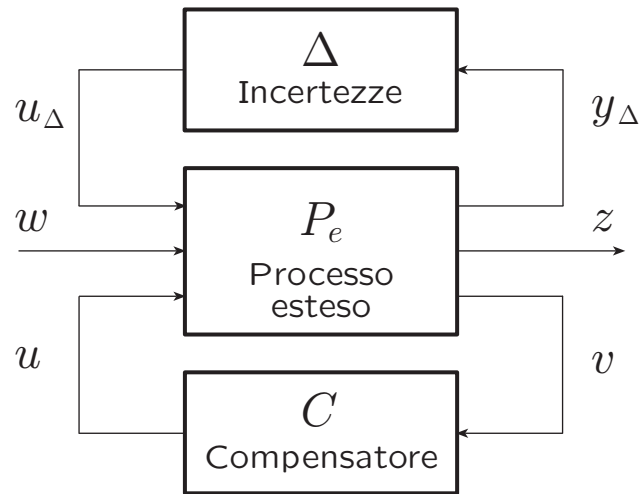
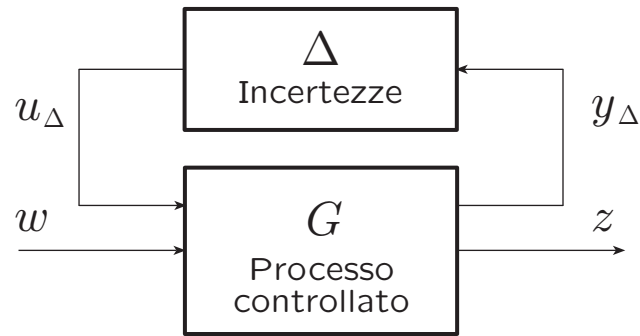


Figura 28: Schema di controllo generale con incertezze

Figura 29: Schema generale (G, Δ)

6.1 Chiusura dell'anello di controllo

Per definire delle condizioni di stabilità robusta è necessario prima chiudere l'anello di controllo con il compensatore $C(s)$ progettato sul sistema esteso P_e privo di incertezza. A tal fine si utilizza la lower LFT introdotta nella sezione 3.2

$$G(s) = F_\ell(P_e, C) = P_{11} + P_{12}C(I - P_{22}C)^{-1}P_{21} \quad (7)$$

ottenendo lo schema di Fig. 29.

Nell'uso di tale formula bisogna però ricordare che le matrici P_{ij} fanno riferimento ad una partizione coerente con la chiusura dell'anello di controllo e cioè coerente con le variabili u e v . Per chiarire tale aspetto si riscrivono

le equazioni del processo esteso

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \tilde{P}_{23} \\ \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} & \tilde{P}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

nelle quali le varie matrici \tilde{P}_{ij} hanno dimensioni coerenti con le variabili in ingresso e in uscita. In forma esplicita l'equazione precedente diventa

$$y_\Delta = \tilde{P}_{11}u_\Delta + \tilde{P}_{12}w + \tilde{P}_{13}u \quad (8)$$

$$z = \tilde{P}_{21}u_\Delta + \tilde{P}_{22}w + \tilde{P}_{23}u \quad (9)$$

$$v = \tilde{P}_{31}u_\Delta + \tilde{P}_{32}w + \tilde{P}_{33}u \quad (10)$$

La chiusura dell'anello di controllo comporta imporre $u = Cv$. Sostituendo tale relazione e ricavando v dalla (10) si ottiene

$$v = (I - \tilde{P}_{33})^{-1} [\tilde{P}_{31}u_\Delta + \tilde{P}_{32}w]$$

la quale, sostituita nelle (8) e (9) porta a

$$y_\Delta = [\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{13}C(I - \tilde{P}_{33})^{-1}\tilde{P}_{31}]u_\Delta + [\tilde{P}_{12} + \tilde{P}_{13}C(I - \tilde{P}_{33})^{-1}\tilde{P}_{32}]w$$

$$z = [\tilde{P}_{21} + \tilde{P}_{23}C(I - \tilde{P}_{33})^{-1}\tilde{P}_{31}]u_\Delta + [\tilde{P}_{22} + \tilde{P}_{23}C(I - \tilde{P}_{33})^{-1}\tilde{P}_{32}]w$$

Queste equazioni posso essere riscritte in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} y_\Delta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{23} \end{pmatrix} (I - \tilde{P}_{33})^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \end{pmatrix} \quad (11)$$

Partizionando la matrice P_e coerentemente con i segnali u e v

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$P_{11} : (\dim(y_\Delta) + \dim(z)) \times (\dim(u_\Delta) + \dim(w))$$

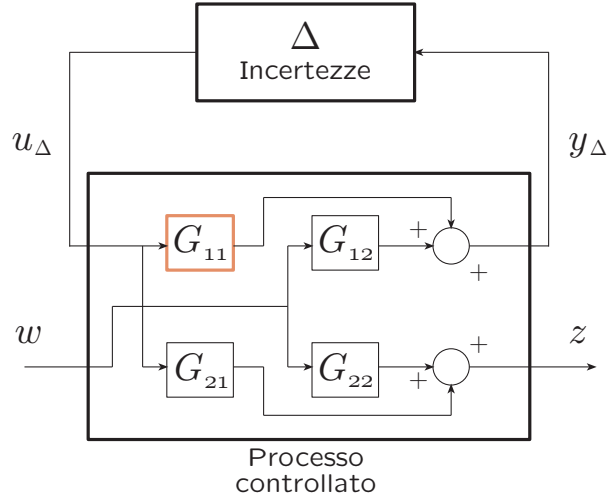
$$P_{12} : (\dim(y_\Delta) + \dim(z)) \times \dim(u)$$

$$P_{21} : \dim(v) \times (\dim(u_\Delta) + \dim(w))$$

$$P_{22} : \dim(v) \times \dim(u)$$

si hanno le seguenti uguaglianze

$$P_{11} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{23} \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} \end{pmatrix}, P_{22} = \tilde{P}_{33}$$

Figura 30: Struttura dello schema generale (G, Δ)

e quindi le equazioni (11) non sono altro che

$$G = P_{11} + P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21} = F_\ell(P_e, C)$$

In Fig. 30 viene evidenziata la struttura dello schema generale dopo la chiusura dell'anello di controllo.

Nella sezione 6.3 verrà illustrato come effettuare i calcoli precedenti nel caso di un sistema di controllo a retroazione con incertezza moltiplicativa.

6.2 Chiusura dell'anello con l'incertezza

Nello schema generale di Fig. 29 l'incertezza è stata "isolata"; per individuare la funzione di trasferimento tra w e z è necessario chiudere l'anello esterno Δ . Il sistema controllato G è rappresentato dalle equazioni

$$\begin{aligned} y_\Delta &= G_{11}u_\Delta + G_{12}w \\ z &= G_{21}u_\Delta + G_{22}w \end{aligned}$$

dove le sotto-matrici G_{ij} hanno le dimensioni coerenti con le variabili y_Δ , z , u_Δ e w . Per chiudere l'anello relativo all'incertezza, si sostituisce $u_\Delta = \Delta y_\Delta$, si isola y_Δ dalla prima equazione ottenendo

$$y_\Delta = (I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}w$$

la quale, sostituita nella seconda, fornisce il legame $w \rightarrow z$ ricercato

$$z = [G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}]w = Nw$$

Così come la lower LFT permette la chiusura di anelli “inferiori”, la formula precedente permette il calcolo della chiusura di anelli “superiori” (come il blocco Δ in Fig. 29) e prende il nome di upper Linear Fractional Transformation (upper LFT)

$$N = F_u(G, \Delta) = G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}$$

6.3 Esempio: incertezza moltiplicativa

Si desidera porre lo schema di controllo a retroazione di Fig. 31 nella forma generale di un problema di controllo.

Come primo passo è necessario individuare il processo esteso $P_e(s)$ avente in ingresso le grandezza (u_Δ, w, u) e in uscita (y_Δ, z, v) . Per lo schema in esame l'ingresso esogeno w è dato dal riferimento r , la variabile di prestazione z dall'uscita y mentre l'ingresso v del controllore è dato dall'errore $e = r - y$.

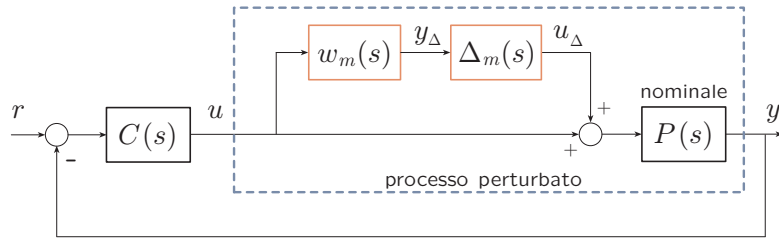


Figura 31: Controllo a retroazione con incertezza moltiplicativa

Le relazioni per individuare P_e sono

$$\begin{aligned} y_\Delta &= w_m u \\ z &= P(u + u_\Delta) \\ v &= w - z = w - P(u - u_\Delta) \end{aligned}$$

Si noti che le suddette relazioni sono indipendenti sia dal controllore $C(s)$ che dall'incertezza Δ e forniscono

$$P_e(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_m(s) \\ 0 & 0 & P(s) \\ -P(s) & 1 & -P(s) \end{pmatrix}$$

Lo schema corrispondente è riportato in Fig. 32.

Il secondo passo consiste nel chiudere l'anello di controllo e ottenere la $G(s)$ coerentemente con lo schema generale di Fig. 29. A tal fine è necessario partizionare la matrice P_e in modo coerente. Definendo

$$\begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \end{pmatrix} = u_a \quad \begin{pmatrix} y_\Delta \\ z \end{pmatrix} = y_a$$

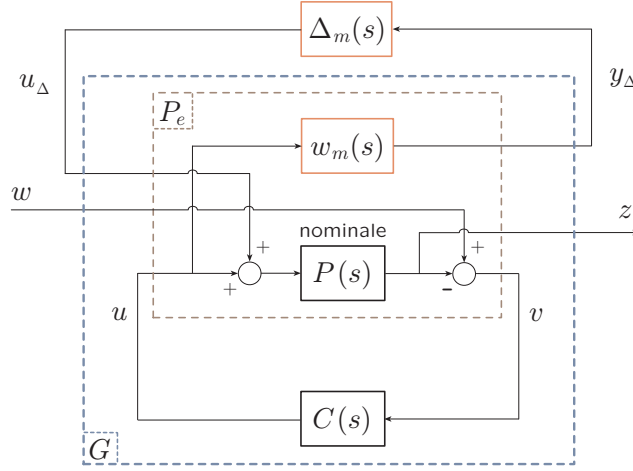


Figura 32: Incertezza moltiplicativa: schema generale di controllo

si ha

$$\begin{pmatrix} u_\Delta \\ w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a \\ u \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} y_\Delta \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a \\ v \end{pmatrix}$$

e la matrice P_e viene partizionata in

$$P_e = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 0 & P_0 \\ P & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{12} = \begin{pmatrix} w_m \\ P \end{pmatrix}, \quad P_{21} = \begin{pmatrix} -P & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{22} = -P$$

Per ottenere $G(s)$ è sufficiente applicare la lower LFT

$$G = F_\ell(P_e, C) = P_{11} + P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21}$$

Si calcolano i singoli termini:

$$\begin{aligned} 1 - P_{22}C &= 1 + PC \\ P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21} &= \frac{C}{1 + PC} \begin{pmatrix} w_m \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{C}{1 + PC} \begin{pmatrix} -w_mP & w_m \\ -P^2 & P \end{pmatrix} \\ P_{11} + P_{12}C(1 - P_{22}C)^{-1}P_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & P_0 \\ P & 0 \end{pmatrix} + \frac{C}{1 + PC} \begin{pmatrix} -w_mP & w_m \\ -P^2 & P \end{pmatrix} \\ P - \frac{P^2C}{1 + PC} &= \frac{P(1 + PC) - P^2C}{1 + PC} = \frac{P}{1 + PC} \end{aligned}$$

ottenendo l'espressione di G

$$G = \frac{1}{1 + PC} \begin{pmatrix} -w_m PC & w_m C \\ P & PC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_m L_n & w_m CS_n \\ S_n P & L_n \end{pmatrix}$$

con S_n e L_n rispettivamente sensitività e sensitività complementare del sistema nominale. Di tutti gli elementi di $G(s)$ ha particolare importanza per il controllo robusto il termine

$$G_{11} = -w_m(s)L_n(s) \quad (12)$$

6.4 Esempio: incertezza additiva

Calcoli analoghi nel caso di un sistema di controllo con incertezza additiva portano all'individuazione della

$$G_{11} = -(I + CP_n)^{-1}Cw_a = -w_a CS_n \quad (13)$$

utile per l'individuazione della condizione di stabilità robusta che verrà ricavata nella sezione 8.

7 Teorema del piccolo guadagno

Si consideri il sistema a retroazione riportato in Fig. 33. Si ha il seguente importante risultato detto Teorema del Piccolo Guadagno (Small Gain Theorem).

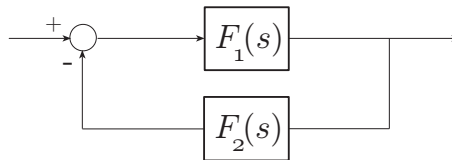


Figura 33: Small-gain theorem: sistema in feedback

Small-gain theorem 1

Siano i due sistemi $F_1(s)$ e $F_2(s)$ entrambi stabili asintoticamente. Se

$$\|F_1(j\omega)\|_\infty \|F_2(j\omega)\|_\infty < 1$$

il sistema $F_1(s)$ retroazionato con $F_2(s)$ è stabile asintoticamente. ■

Il Teorema del Piccolo Guadagno è uno strumento fondamentale nell'ambito del controllo robusto. Sono tuttavia necessarie alcune importanti osservazioni:

- il Teorema richiede che la funzione d'anello sia, in modulo, sempre minore di 1 e cioè che l'andamento del diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ sia sempre all'interno del cerchio di raggio unitario come illustrato in Fig. 34. Si noti che la richiesta che $F(s)$ sia stabile asintoticamente implica l'assenza di poli a parte reale positiva o nulla ad anello aperto.

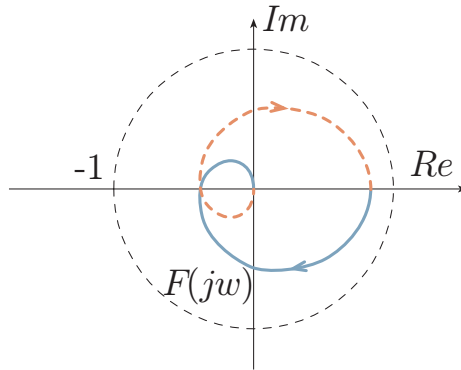


Figura 34: Small-gain theorem: interpretazione grafica

- La condizione del Teorema è solo sufficiente. In effetti se ad esempio si considera un sistema a retroazione unitaria con $F(s)$, in catena diretta, priva di poli a parte reale positiva (e quindi $P_p = 0$) e di poli a parte reale nulla (e quindi con modulo sempre finito) la condizione necessaria e sufficiente del criterio di Nyquist ($P_p = N$) richiede che la $F(j\omega)$ non compia giri intorno al punto $(-1, 0)$. Una $F(s)$ che soddisfi tali condizioni e che quindi assicuri stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso è riportata in Fig. 35. Per tale sistema la condizione del Teorema del Piccolo Guadagno non è soddisfatta.

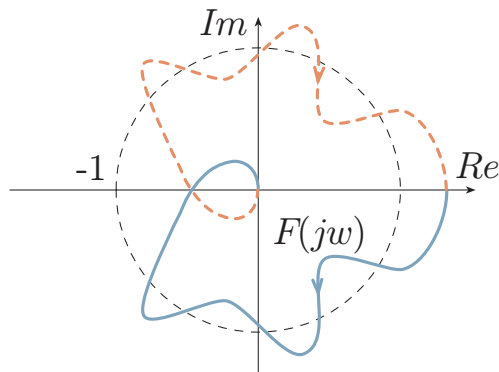


Figura 35: Small-gain theorem: contro-esempio

- Se si definiscono con N_1 , N_2 , D_1 e D_2 i numeratori e denominatori rispettivamente di F_1 e F_2

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad F_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

calcolando la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$\frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

si nota che il denominatore, le cui soluzioni sono i poli del sistema ad anello chiuso, coincide con il denominatore di

$$\frac{F_1(s)F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)} = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

che rappresenta la funzione di trasferimento di un sistema a retroazione unitaria avente $F_1(s)F_2(s)$ in catena diretta. Quindi ai fini della stabilità conta solo la funzione d'anello – prodotto delle funzioni di trasferimento che compaiono nell'anello di retroazione – $F_1(s)F_2(s)$.

- Si noti che entrambe le funzioni F_1 e F_2 sono note sia in termini di modulo che di fase.
- Il Teorema è ancora valido se la reazione in Fig. 33 è positiva (feedback positivo).

Si consideri ora il caso particolare nel quale $F_2(s)$ è una funzione arbitraria non nota (quindi con fase qualsiasi) stabile asintoticamente. In questa situazione la condizione diventa anche necessaria come enunciato dal seguente Teorema.

Small-gain theorem 2

Sia il sistema a retroazione di Fig. 33 con $F_1(s)$ e $F_2(s)$ entrambe stabili asintoticamente e $F_2(s)$ arbitraria con $\|F_2(j\omega)\|_\infty \leq \gamma_2$.

C.N.& S. affinché il sistema interconnesso sia stabile asintoticamente è che

$$\gamma_2 \|F_1(j\omega)\|_\infty < 1$$

■

Questa versione del Teorema del Piccolo Guadagno verrà utilizzata per ricavare, nel caso generale, le condizioni di stabilità robusta.

8 Stabilità robusta: formulazione generale

Si consideri lo schema generale di Fig. 28 per il quale è stato individuato un controllore $C(s)$ in grado di assicurare stabilità asintotica per il sistema nominale (corrispondente a $\Delta = 0$). In altri termini il sistema individuato dalla $G(s)$ ricavata in (7) è stabile internamente (o asintoticamente). Ricordando i risultati della sezione 2, se $C(s)$ stabilizza il sistema privo di incertezza allora tutte e quattro le funzioni $G_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2$, sono caratterizzate da poli a parte reale negativa.

Prendendo ora in considerazione la presenza dell'incertezza Δ , il sistema ad anello chiuso N (incerto) è dato da

$$N = F_u(G, \Delta) = G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}$$

Si noti, dall'espressione di N , che l'unico termine che può portare ad instabilità è

$$(I - G_{11}\Delta)^{-1} \quad (14)$$

in quanto gli altri termini sono o il prodotto (serie) o la somma (parallelo) di termini stabili asintoticamente.

Il problema si riconduce quindi allo studio della stabilità della (14). Si noti però che tale studio è equivalente allo studio della stabilità del sistema di Fig. 36 e cioè all'interconnessione in reazione positiva tra G_{11} e Δ .

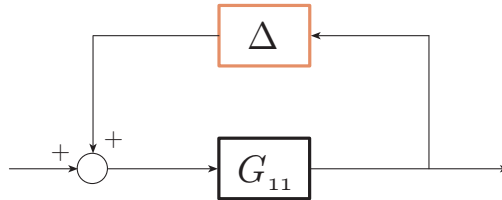


Figura 36: Sistema equivalente

Applicando il Teorema del Piccolo Guadagno si ha la seguente C.N.& S. affinché il sistema di controllo sia stabile in presenza di un'incertezza Δ con $\|\Delta\|_\infty \leq 1$

$$\|G_{11}(j\omega)\|_\infty < 1 \quad (15)$$

Un modo alternativo per chiarire i passaggi precedenti consiste nel ricordare che il concetto di stabilità interna riguarda il sistema in assenza di forzamenti. Se, nello schema generale (G, Δ) di Fig. 29 o di Fig. 30, si pone $w = 0$ e si considera $z = 0$, lo schema diventa quello di Fig. 37 nel quale si riconosce la struttura a reazione positiva tra G_{11} e Δ precedentemente considerata.

La condizione necessaria e sufficiente (15) assume diverse espressioni esplicite a seconda del tipo di perturbazione considerata e quindi della G_{11} ottenuta. Per le due incertezze viste si ha

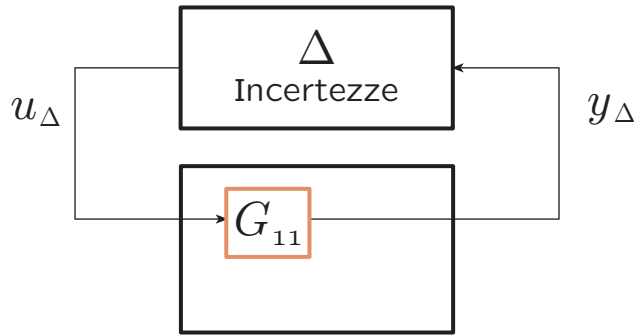


Figura 37: Schema generale (G, Δ) ai fini della stabilità robusta

- incertezza additiva: $\|w_a(j\omega)C(j\omega)S_n(j\omega)\| < 1$
- incertezza moltiplicativa: $\|w_m(j\omega)L_n(j\omega)\| < 1$

condizioni ovviamente coincidenti con quelle derivate tramite il criterio di Nyquist nelle sezioni 5.1 e 5.2.

8.1 Stabilità robusta - Esempio

Si consideri il sistema in catena diretta

$$F(s) = k \frac{2-s}{s(s+2)}$$

Si desidera individuare il valore massimo del guadagno k tale che il sistema a retroazione rimanga stabile asintoticamente. Sono possibili diversi approcci:

- **Luogo delle radici:**

riscrivendo il sistema in catena diretta come

$$F(s) = -k \frac{s-2}{s(s+2)}$$

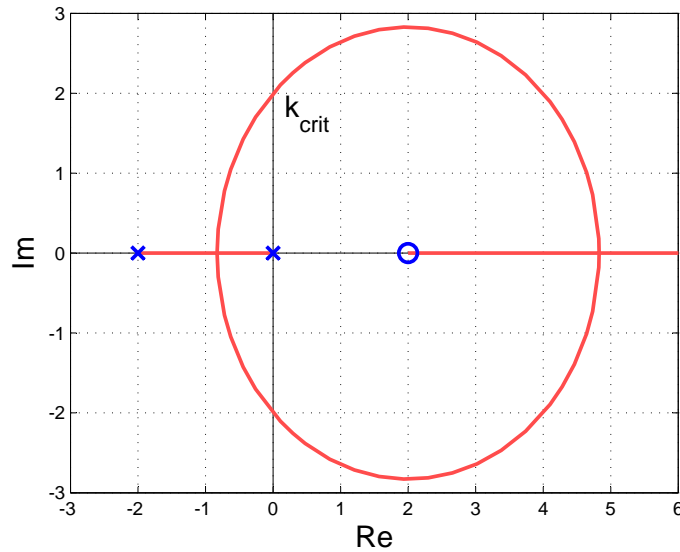
si traccia il luogo delle radici al variare di $k' = -k$ (il risultante luogo positivo corrisponde al luogo delle radici facendo assumere a k valori negativi e vice versa). Il luogo delle radici è riportato in Fig. 38.

Si noti che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente per

$$k'_{crit} < k' < 0$$

e quindi per $0 < k < -k'_{crit}$. Per individuare il valore di k'_{crit} si può applicare il criterio di Routh al polinomio $p(s, k')$ con

$$\begin{aligned} p(s, k') &= s(s+2) + k'(s-2) \\ &= s^2 + (2-k')s - 2k' \end{aligned}$$

Figura 38: Luogo delle radici al variare di k'

Pertanto C.N.& S. affinché il sistema ad anello chiuso sia stabile asintoticamente è $-2 < k' < 0$. Al valore $k' = k'_{crit} = -2$ corrisponde l'attraversamento dell'asse immaginario in $\pm 2j$. In conclusione si ha

$$k_{max,1} = 2$$

- Da un semplice tracciamento dei diagrammi di Bode (o tramite il criterio di Routh) è immediato individuare il [margine di guadagno](#)

$$k_{max,1} = 2$$

e quindi è possibile moltiplicare F per un fattore strettamente minore di 2 senza perdere la stabilità del sistema ad anello chiuso.

- Si può riformulare il problema di individuare tale valore del massimo guadagno ammissibile come un [problema di stabilità robusta](#). A tal fine si riscrive la funzione d'anello perturbata¹¹

$$F_p(s) = k_p F(s) = \bar{k} F(s) (1 + r_k \Delta)$$

$$\text{con } \bar{k} = \frac{k_{max} + 1}{2}, \quad r_k = \frac{k_{max} - 1}{k_{max} + 1}$$

e modello nominale $\bar{k}F(s)$ (si noti che \bar{k} dipende da k_{max} non noto). La condizione (necessaria e sufficiente per Δ complesso) di stabilità

¹¹Caso particolare di incertezza sul guadagno con $k_p \in [0, k_{max}]$.

robusta impone

$$\left\| r_k \frac{\bar{k}F}{1 + \bar{k}F} \right\|_{\infty} < 1$$

la quale deve essere risolta iterativamente. Nel caso in esame si trova $k_{max,2} = 1.78$.

- In alternativa alla formulazione precedente, si può scegliere come modello nominale $P(s)$ e non $\bar{k}P(s)$ e quindi il sistema perturbato è

$$F_p(s) = k_p F(s) = F(s)(1 + w_m \Delta), \quad k_p \in [1, k_{max,3}] \text{ e } |\Delta| \leq 1$$

Si ha $|k_{max,3} - 1| = \|w_m \Delta\|_{\infty}$ da cui $\|w_m\|_{\infty} = k_{max,3} - 1$ (si ricorda che $k_{max,3} > 1$). Dalla condizione di stabilità robusta su $\|w_m L\|_{\infty}$ si ha

$$k_{max,3} = \frac{1}{\|L\|_{\infty}} + 1$$

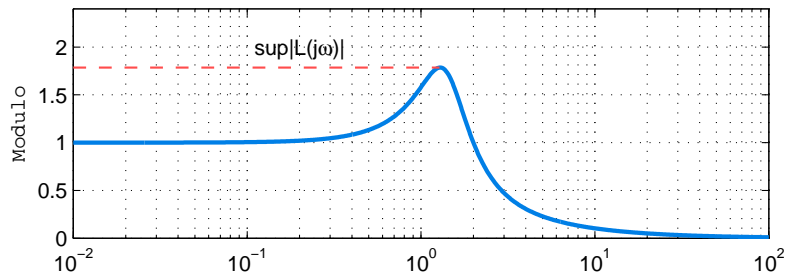


Figura 39: Andamento di $|L(j\omega)|$

Per l'esempio adottato $\|L\|_{\infty} = 1.79$ e quindi $k_{max,3} = 1.56$.
In conclusione

- il calcolo esatto del margine di guadagno può essere effettuato rappresentando l'incertezza con Δ reale ottenendo $k_{max} = 2$;
- appena si ammettono perturbazioni complesse (non corrispondenti a situazioni fisiche – il guadagno è reale), la condizione di stabilità robusta diventa conservativa ($k_{max,2}$ e $k_{max,3}$ entrambi inferiori a 2).