

Fondamenti di Automatica

Tracciamento dei Diagrammi di Nyquist

L. Lanari

Dipartimento di Ingegneria Informatica
Automatica e Gestionale “Antonio Ruberti”

Università di Roma “La Sapienza”

Considerazioni generali

il **diagramma di Nyquist** di $F(s)$ è l'immagine secondo la funzione di trasferimento $F(s)$ del **percorso di Nyquist** (particolare percorso chiuso).

Il **percorso di Nyquist** è composto da:

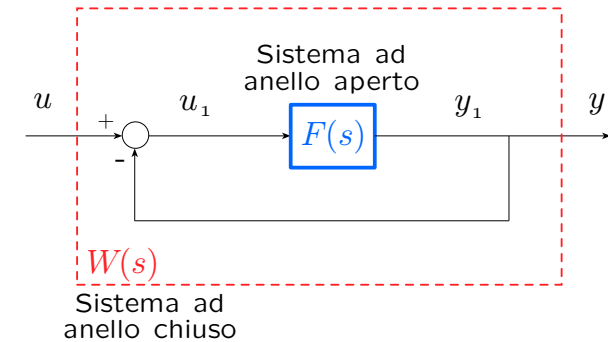
- (a) l'asse immaginario esclusi eventuali poli a parte reale nulla di $F(s)$
- (b) semi-cerchi di raggio infinitesimo che lasciano gli eventuali poli a parte reale nulla di $F(s)$ a sinistra
- (c) un percorso all'infinito (semi-cerchio)

L'immagine di

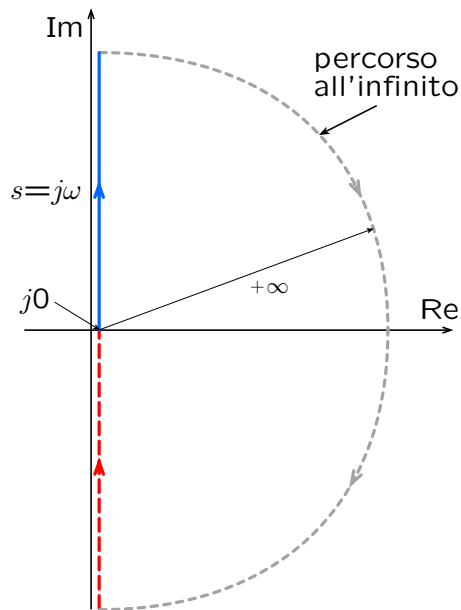
- (a) è deducibile dai diagrammi di Bode e dalla proprietà $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$
- (b) – in corrispondenza ad ogni polo di $F(s)$ a parte reale nulla di molteplicità m – effettua m mezzi giri all'infinito in senso orario
 p_i polo di $F(s)$ con molteplicità m t.c. $\text{Re}[p_i] = 0 \Rightarrow m\pi$ giri all' ∞ in senso orario
- (c) è l'origine se la $F(s)$ è strattamente propria,

Considerazioni generali

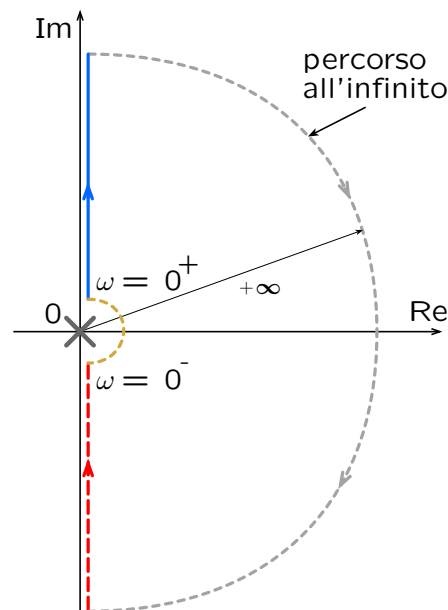
Il criterio di Nyquist permette di dedurre la stabilità del **sistema ad anello chiuso**, in uno schema a retroazione unitaria, a partire da informazioni relative al **sistema ad anello aperto** (qui rappresentato dalla funzione di trasferimento $F(s)$)



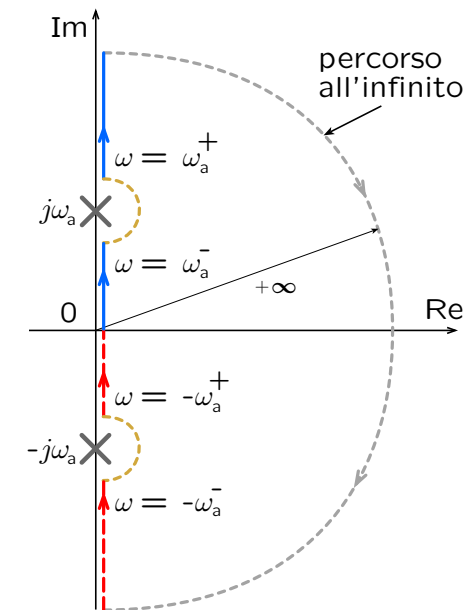
Alcuni possibili percorsi di Nyquist



Nessun polo a $\text{Re}(\cdot) = 0$



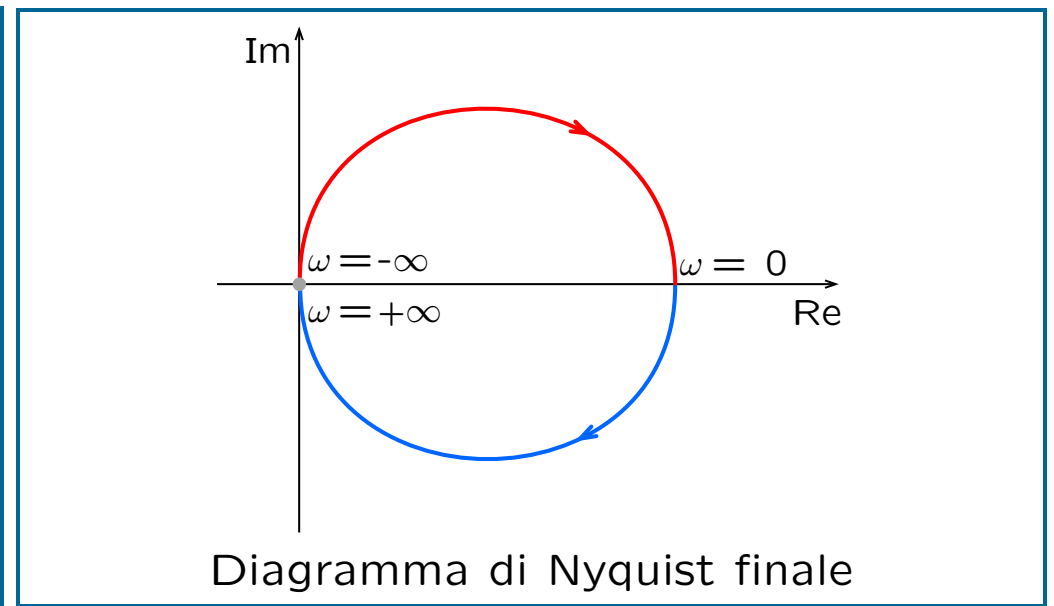
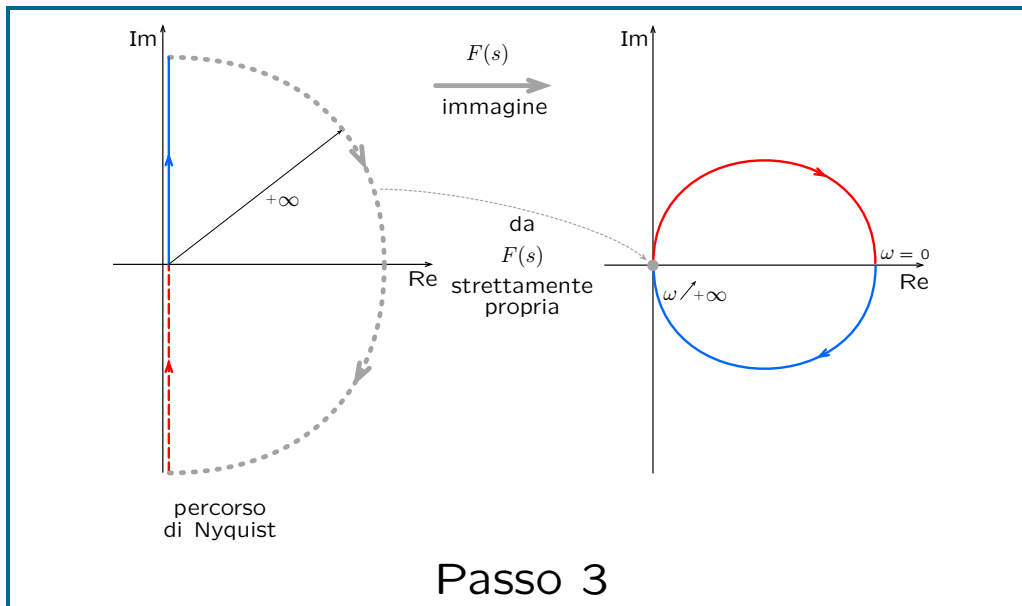
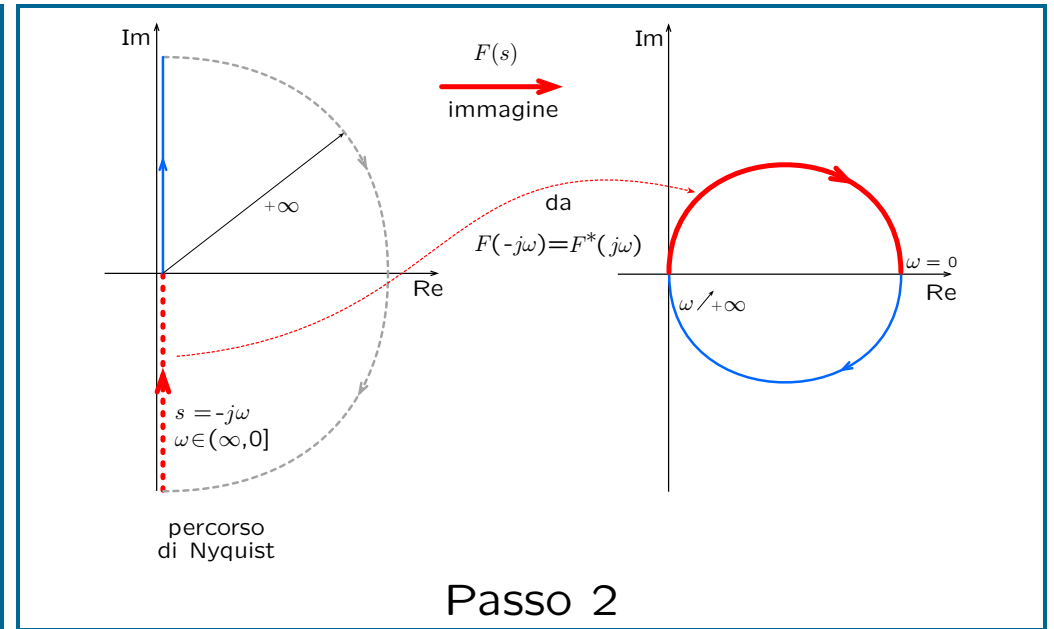
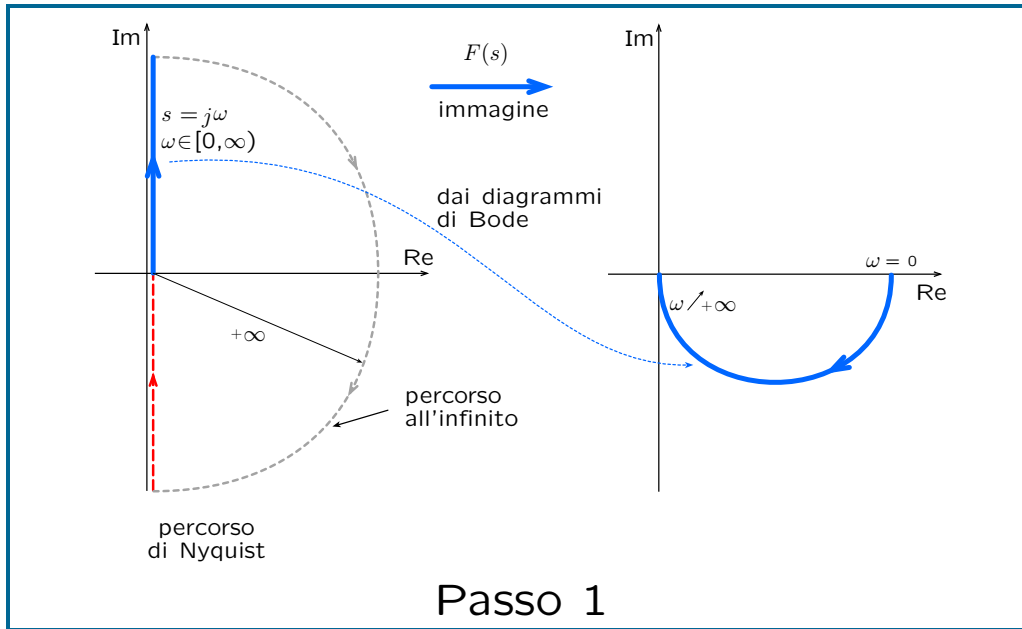
Uno o più poli in $s = 0$



Uno o più poli in $s = \pm j\omega_a$

I vari passi per la costruzione di un generico diagramma di Nyquist sono illustrati di seguito.

Generazione del diagramma di Nyquist



Esempio 1

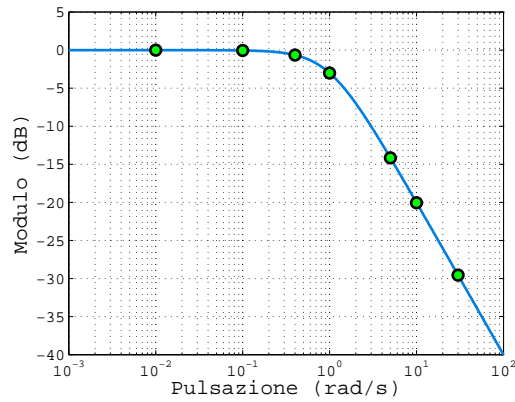


Diagramma del modulo in dB

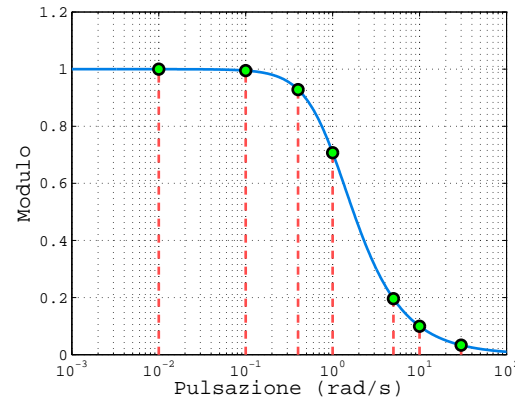


Diagramma del modulo

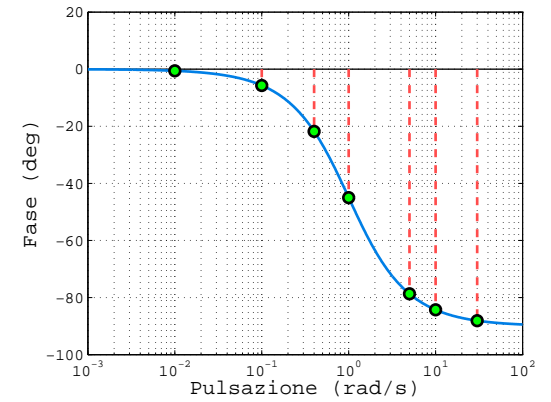
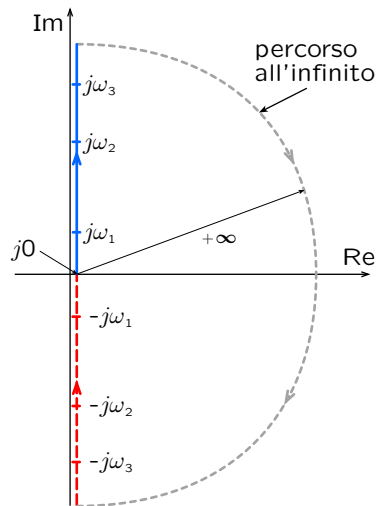


Diagramma della fase



Percorso di Nyquist

$$F(s) = \frac{1}{s + 1}$$

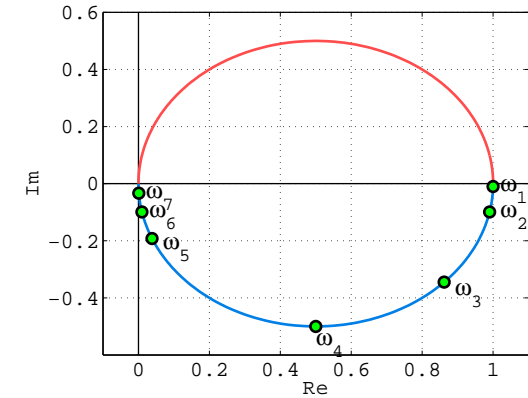


Diagramma di Nyquist

Esempio 2

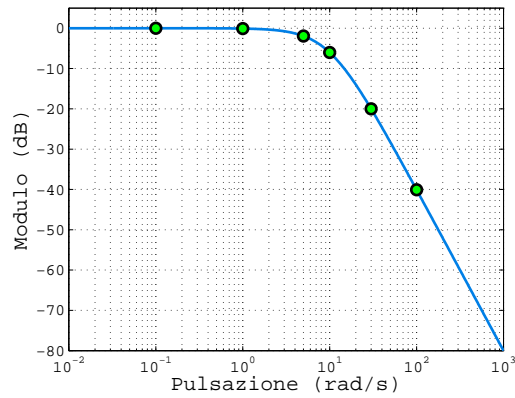


Diagramma del modulo in dB

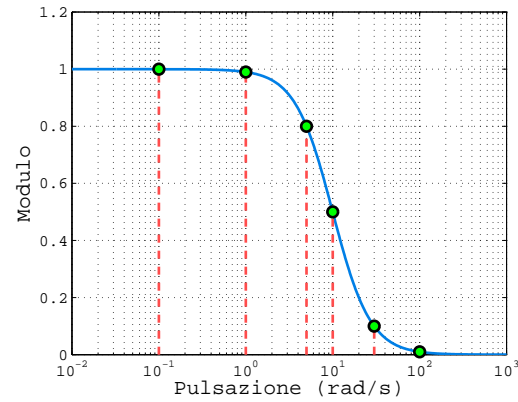


Diagramma del modulo

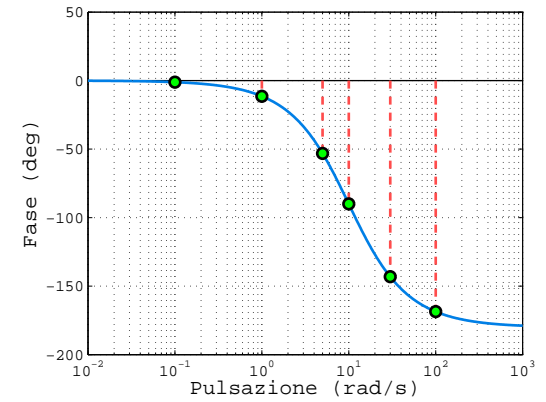
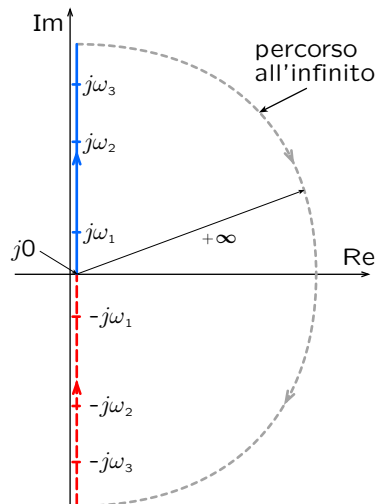


Diagramma della fase



Percorso di Nyquist

$$F(s) = \frac{100}{(s + 10)^2} = \frac{1}{(s/10 + 1)^2}$$

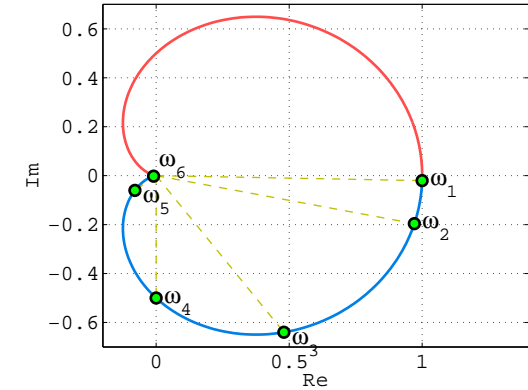


Diagramma di Nyquist

Esempio 3

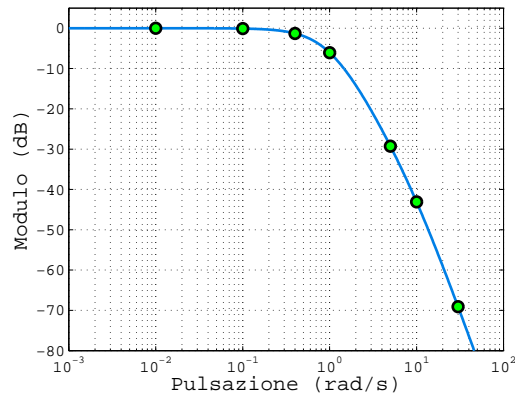


Diagramma del modulo in dB

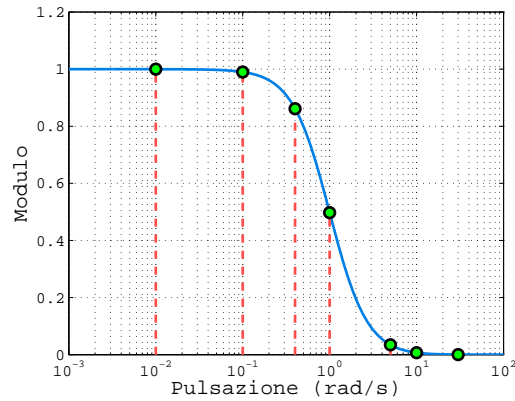


Diagramma del modulo

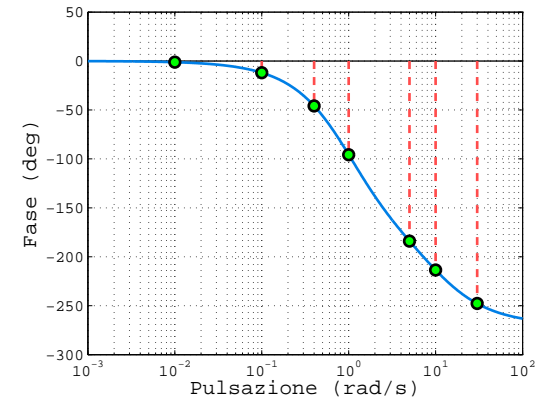
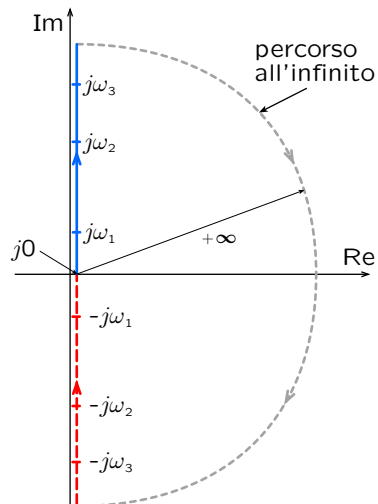


Diagramma della fase



Percorso di Nyquist

$$F(s) = \frac{10}{(s + 1)^2(s + 10)} = \frac{1}{(s + 1)^2(s/10 + 1)}$$

Esempio 3

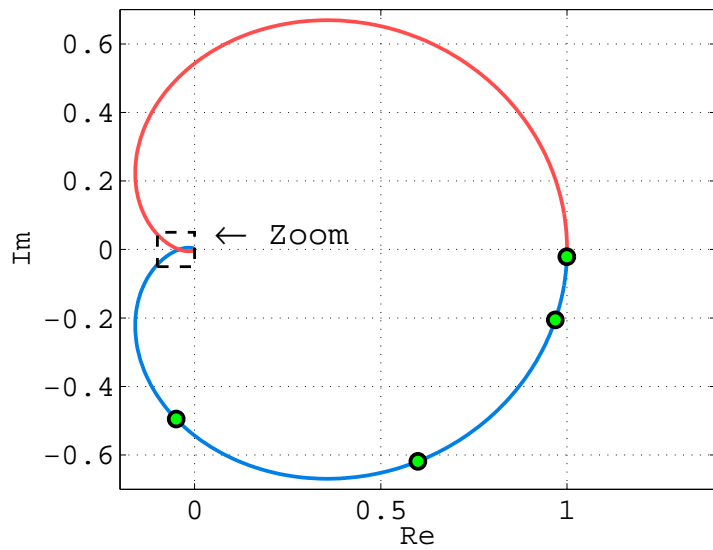
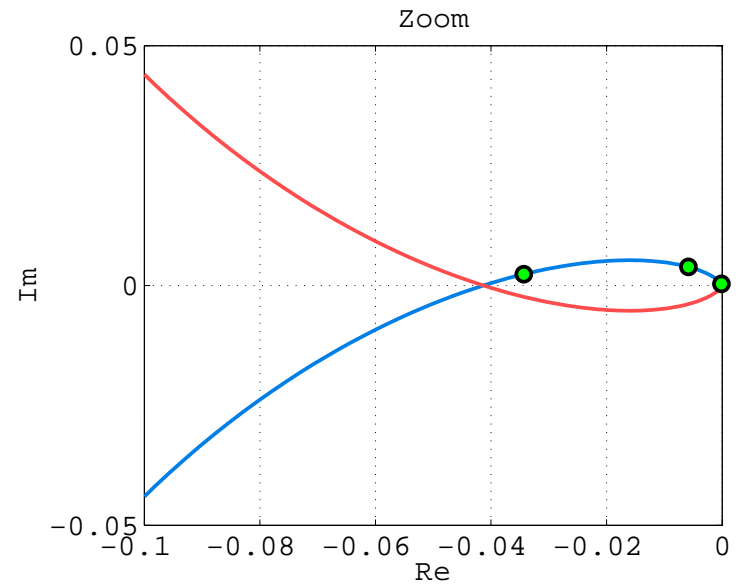


Diagramma di Nyquist esatto



Dettaglio del diagramma di Nyquist

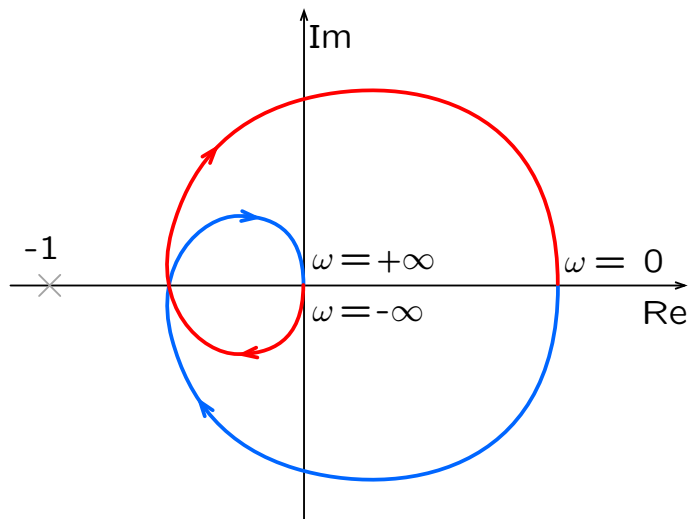


Diagramma di Nyquist "manuale"

Versione esatta e "manuale" del diagramma di Nyquist

Esempio 4

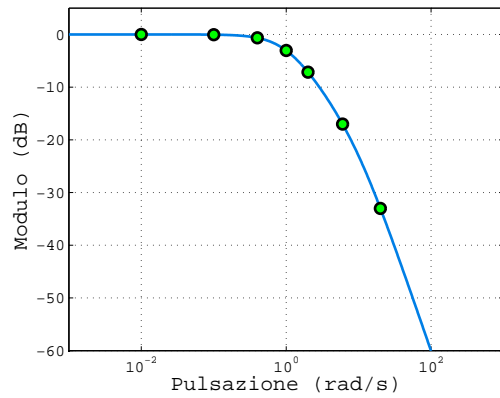


Diagramma del modulo in dB

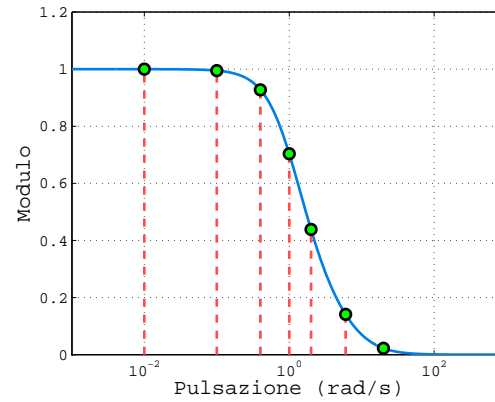


Diagramma del modulo

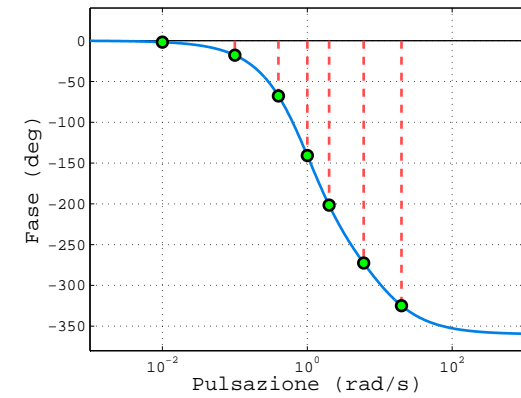
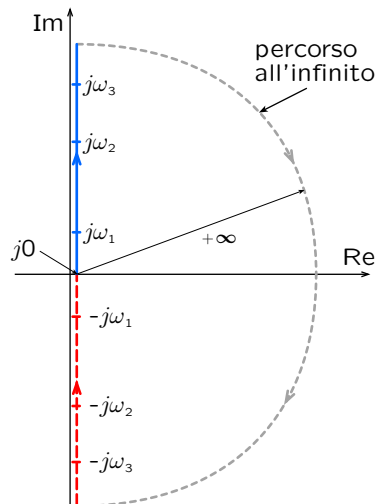


Diagramma della fase



Percorso di Nyquist

$$F(s) = \frac{10(1-s)}{(s+1)^2(s+10)} = \frac{1}{(s+1)^2(s/10+1)}$$

Esempio 4

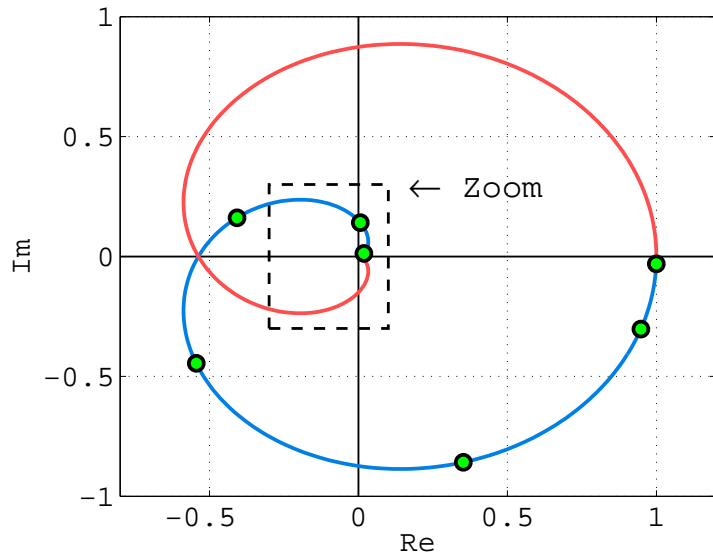
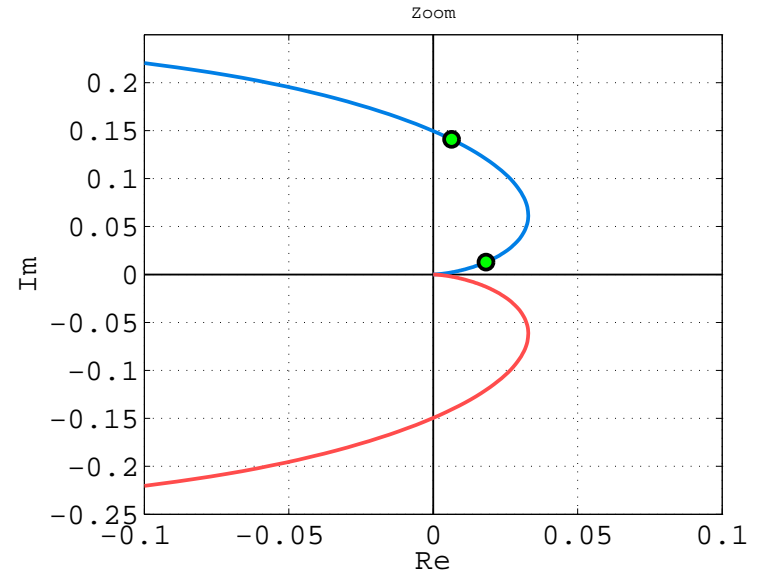


Diagramma di Nyquist esatto



Dettaglio del diagramma di Nyquist

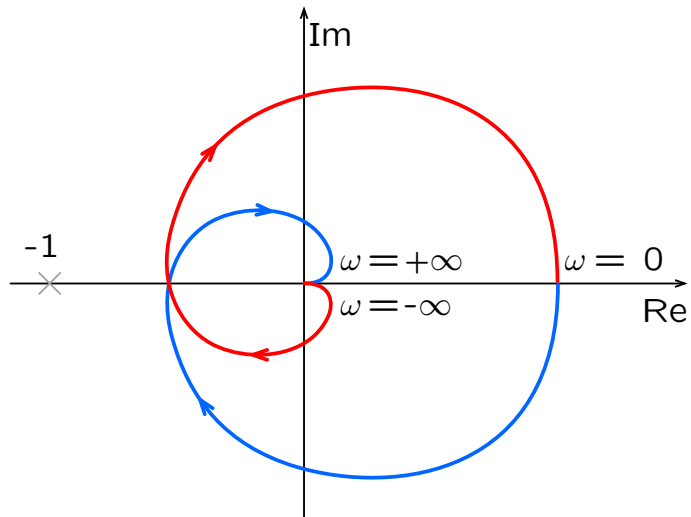


Diagramma di Nyquist "manuale"

Versione esatta e "manuale"
del diagramma di Nyquist

Esempio 5

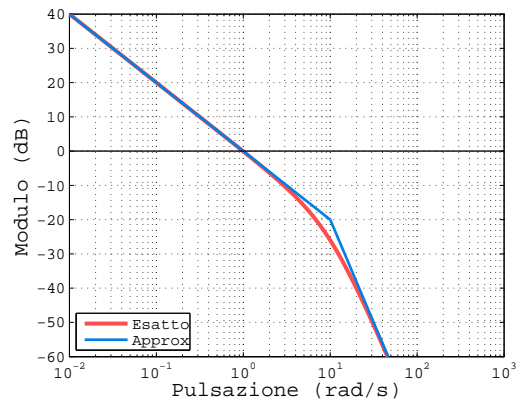


Diagramma del modulo in dB

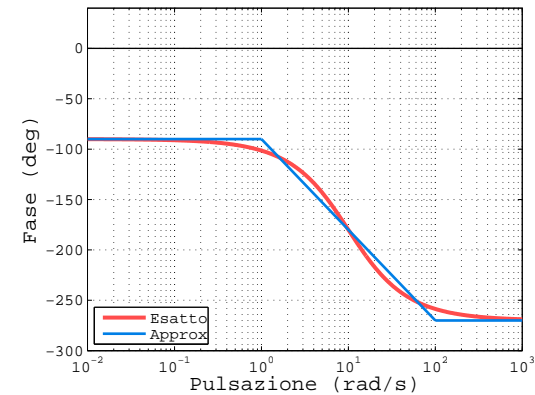
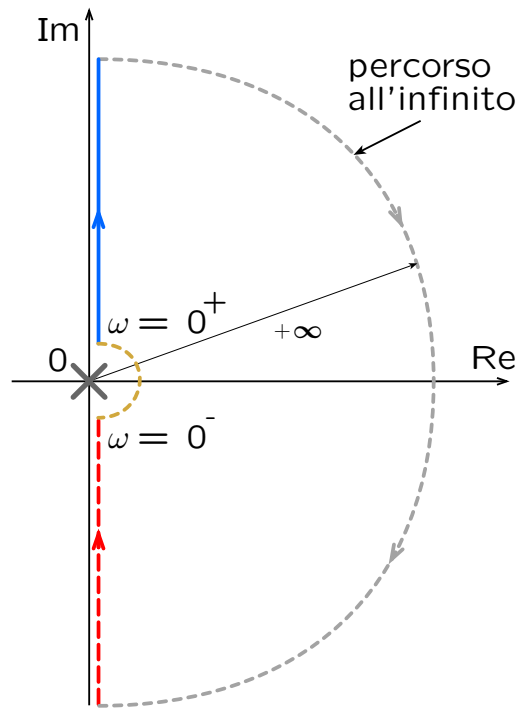


Diagramma della fase

$$F(s) = \frac{100}{s(s+10)^2} = \frac{1}{s(s/10+1)^2}$$

- presenza di un polo in $s = 0$ di molteplicità $m = 1$ nella $F(s)$ del sistema ad anello aperto
- il diagramma di Nyquist effettua $m = 1$ mezzo giro all'infinito in senso orario nel passaggio da $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$

Esempio 5



Percorso di Nyquist

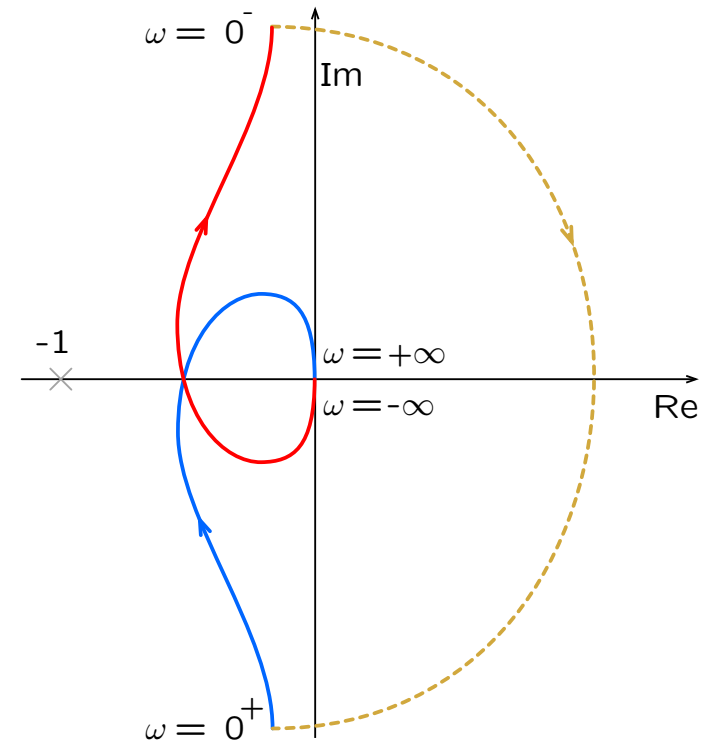


Diagramma di Nyquist "manuale"

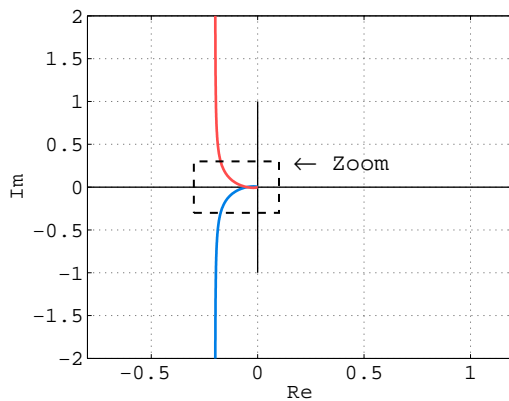
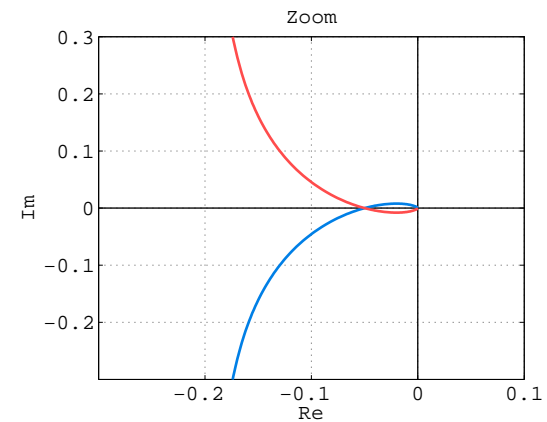


Diagramma di Nyquist esatto



Dettaglio del diagramma di Nyquist

Esempio 6

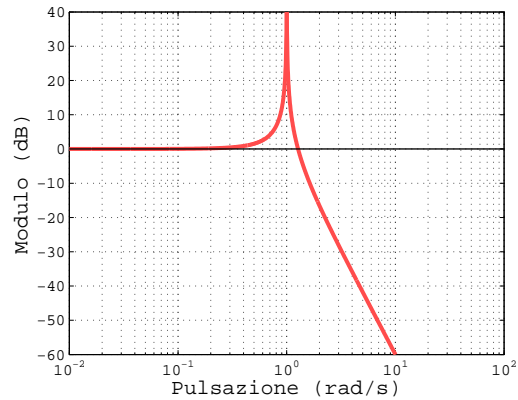


Diagramma del modulo in dB

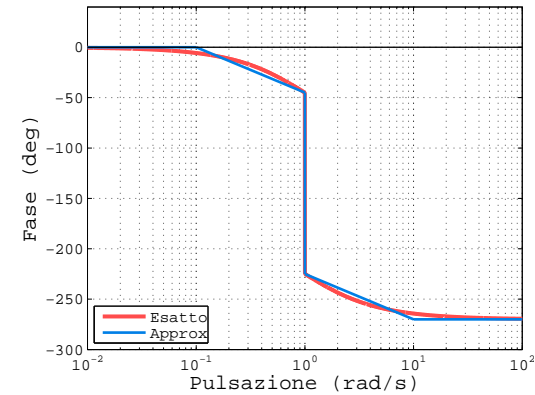
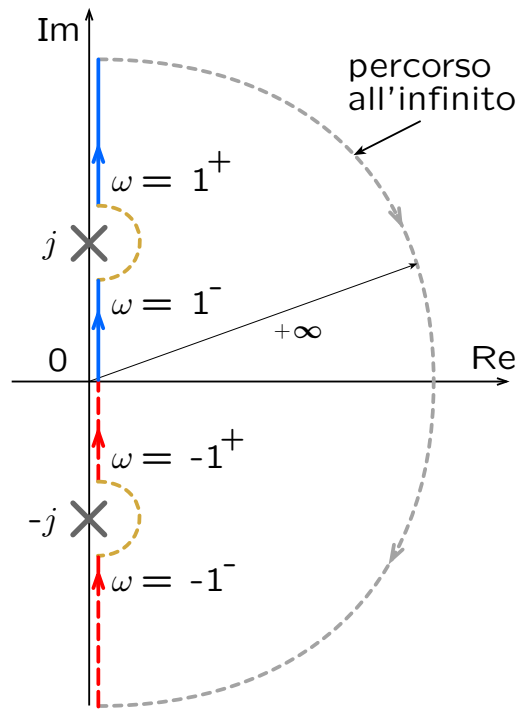


Diagramma della fase

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

- presenza di una coppia di poli in $s = \pm j$ di molteplicità $m = 1$ nella $F(s)$ del sistema ad anello aperto
- il diagramma di Nyquist effettua $m = 1$ mezzo giro all'infinito in senso orario in corrispondenza sia al passaggio da $\omega = -1^-$ a $\omega = -1^+$ che da $\omega = 1^-$ a $\omega = 1^+$

Esempio 6



Percorso di Nyquist

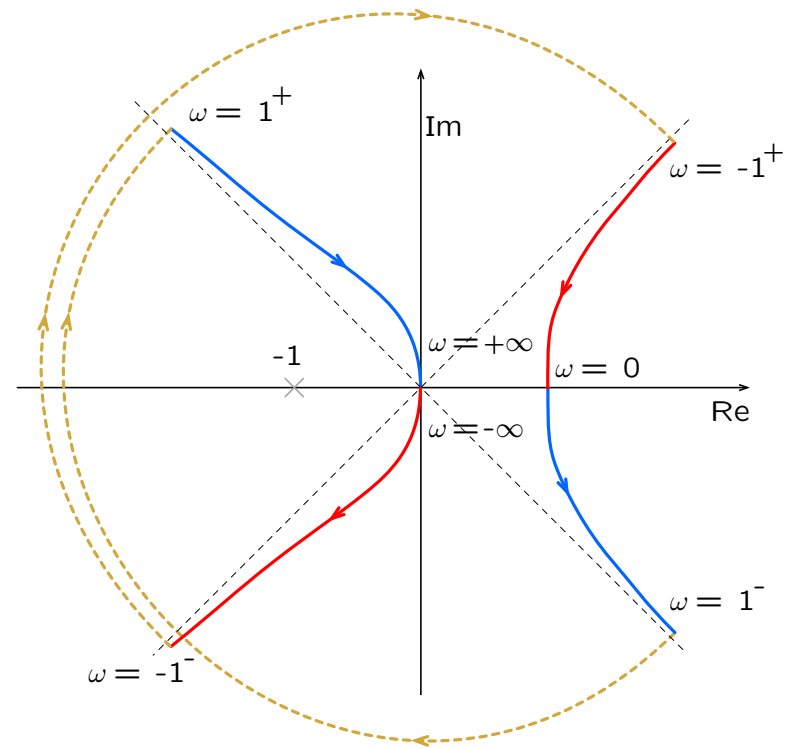


Diagramma di Nyquist "manuale"

Esempio 7

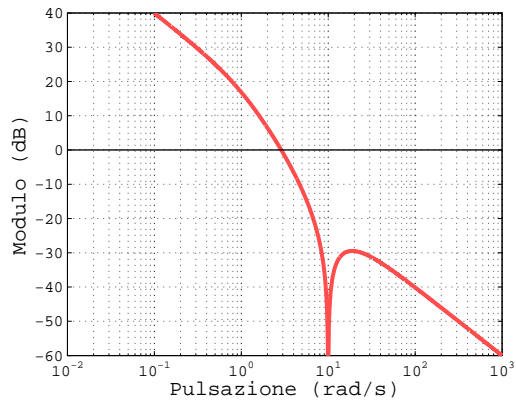


Diagramma del modulo in dB

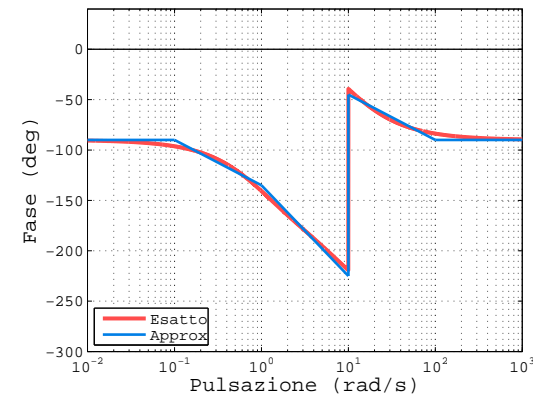
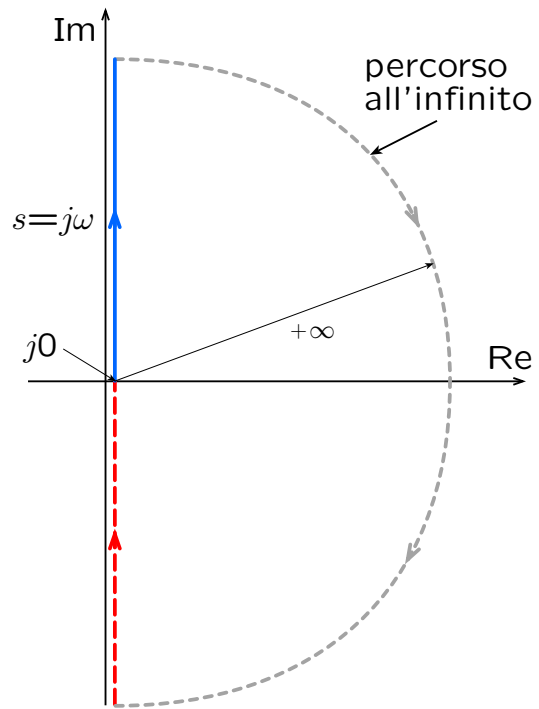


Diagramma della fase

$$F(s) = \frac{s^2 + 100}{s(s + 1)(s + 10)}$$

- presenza di un polo in $s = 0$ di molteplicità $m = 1$ nella $F(s)$ del sistema ad anello aperto
- il diagramma di Nyquist effettua $m = 1$ mezzo giro all'infinito in senso orario nel passaggio da $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$

Esempio 7



Percorso di Nyquist

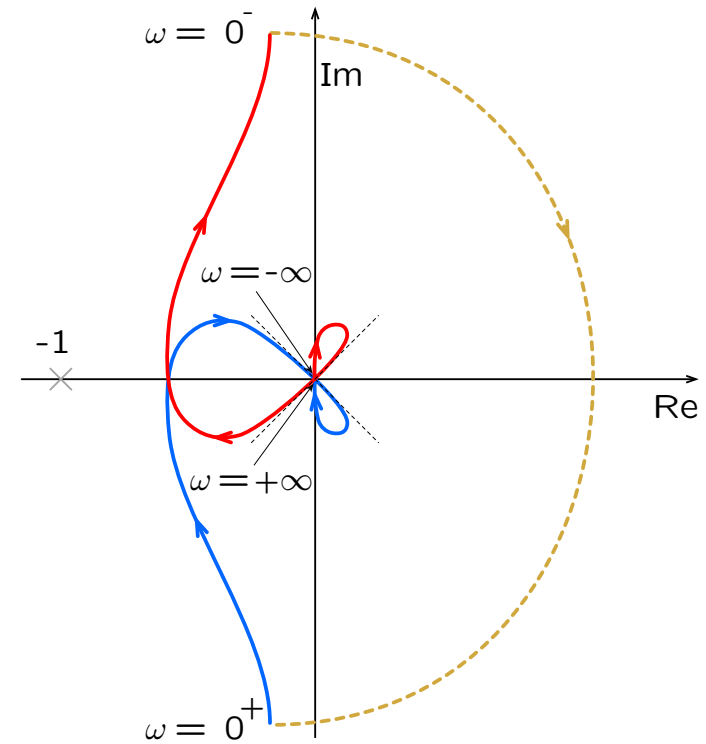


Diagramma di Nyquist "manuale"

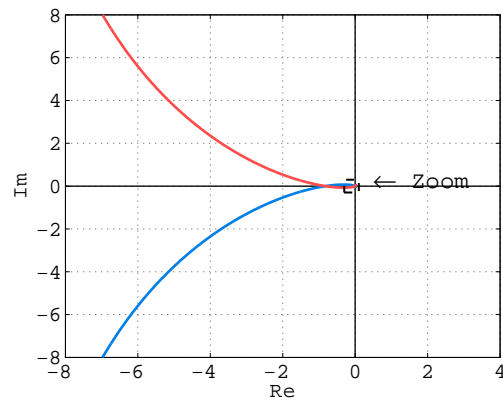
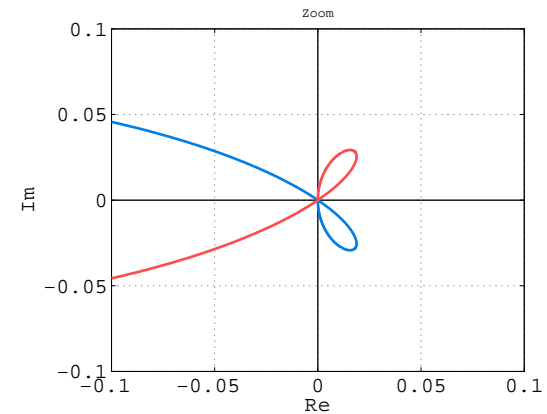


Diagramma di Nyquist esatto



Particolare del diagramma di Nyquist

Esempio 8

Si richiede di studiare la stabilità del sistema ad anello chiuso rappresentato in figura al variare del guadagno K positivo.

$$F(s) = \frac{s + 1}{s(s/10 - 1)}$$

Diagrammi di Bode tracciati per $K = 1$

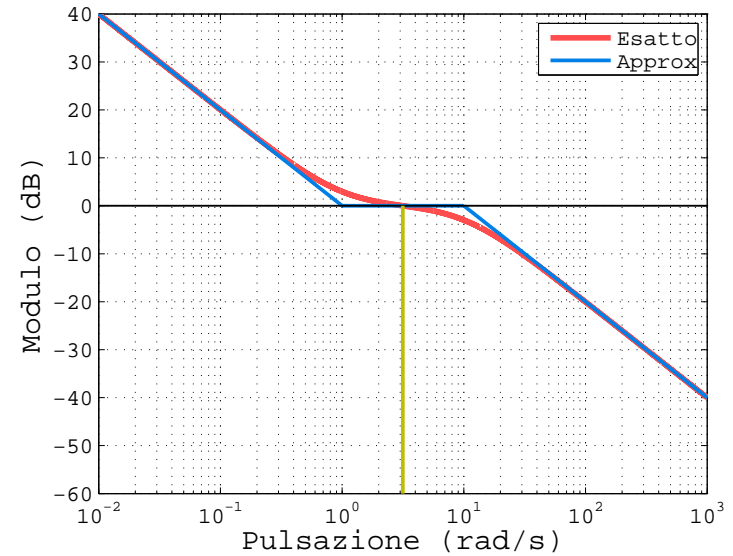
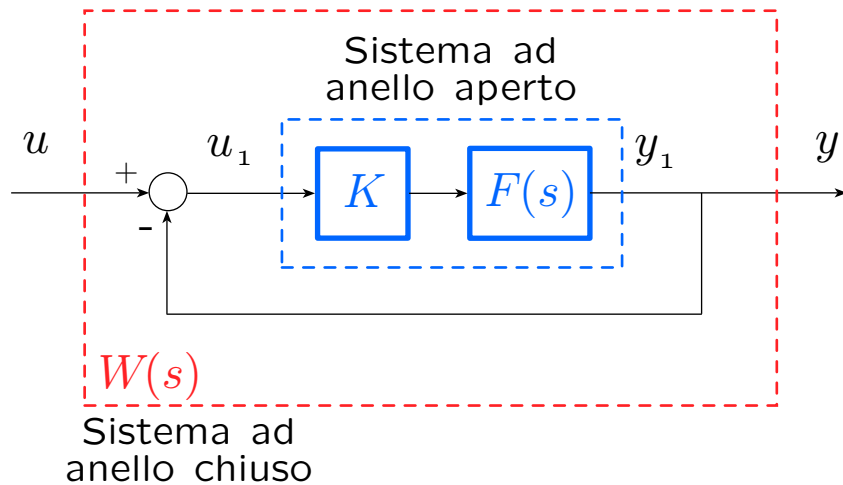


Diagramma del modulo in dB

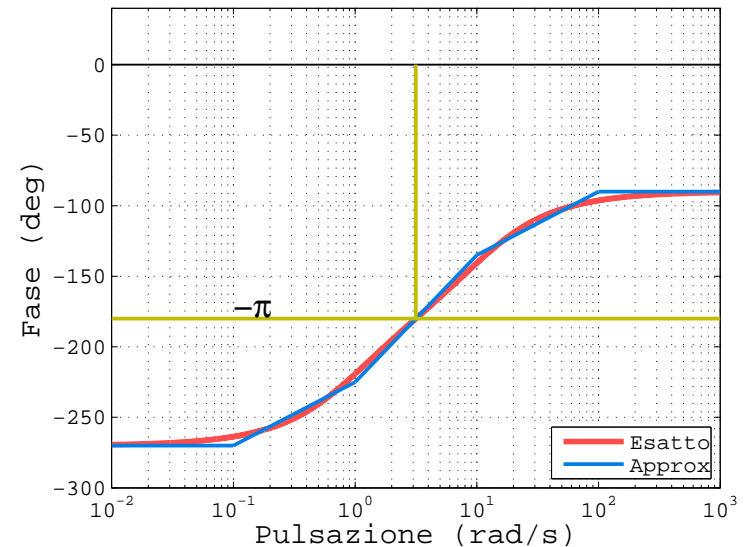


Diagramma della fase

Esempio 8

Come evidenziato dai diagrammi di Bode tracciati per $K = 1$, alla pulsazione per la quale la fase vale -180° il modulo vale 1 (o 0 dB); pertanto il corrispondente diagramma di Nyquist passerà esattamente per il punto di coordinate $(-1, 0)$ quando $K = 1$.

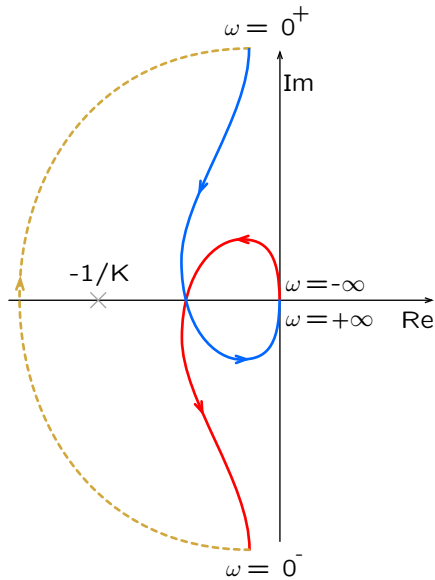


Diagramma di Nyquist “manuale”

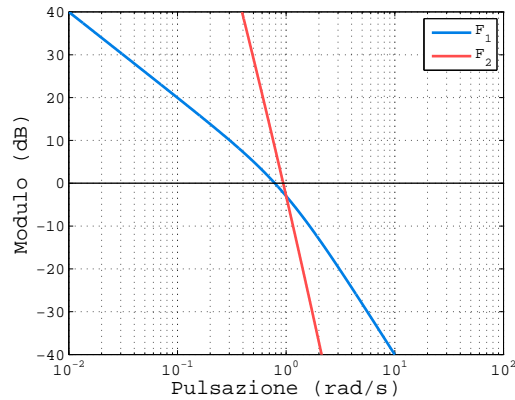
Per valutare l'effetto della variazione del guadagno K positivo sul diagramma di Nyquist, si può o

- traslare il diagramma del modulo (in dB) della quantità K_{dB} e riportare tali variazioni sul diagramma di Nyquist mantenendo la scala costante;
- o, equivalentemente, variare la scala e parametrizzare la posizione del punto rispetto al quale contare il numero di giri di $F(j\omega)$. Ciò è possibile in quanto il numero di giri intorno al punto $(-1, 0)$ di $KF(j\omega)$ è uguale al numero di giri di $F(j\omega)$ intorno al punto $(-1/K, 0)$.

Pertanto per

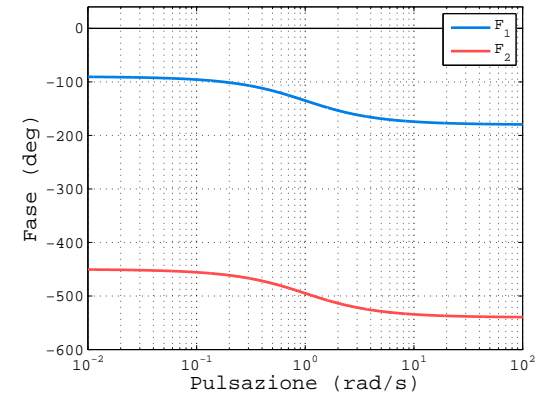
- $0 < K < 1$ si ha $N = -1 \neq P = 1$, il sistema ad anello chiuso è instabile
- $K = 1$, N non è definito e il sistema ad anello chiuso non è stabile asintoticamente (il criterio di Routh applicato al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso dimostra che si ha stabilità semplice).
- $K > 1$ si ha $N = +1 = P = 1$, il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

Esempio 9



$$F_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s^5(s+1)}$$



Diagrammi del modulo in dB

Diagrammi della fase

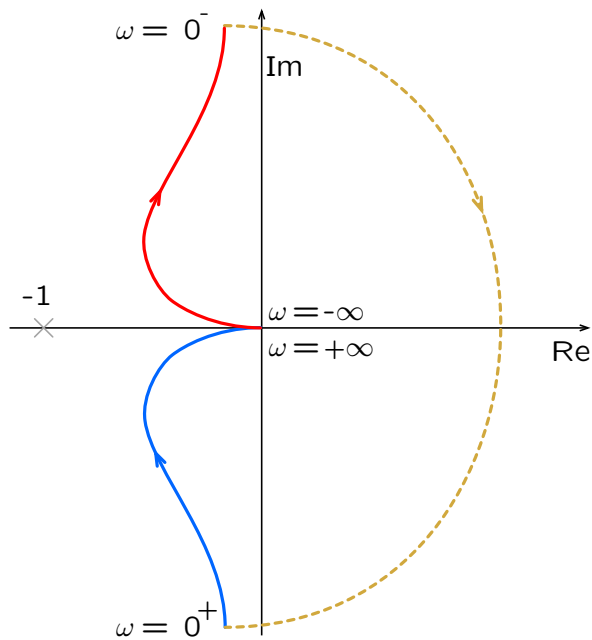


Diagramma di Nyquist "manuale" di $F_1(s)$
 $N = 0$

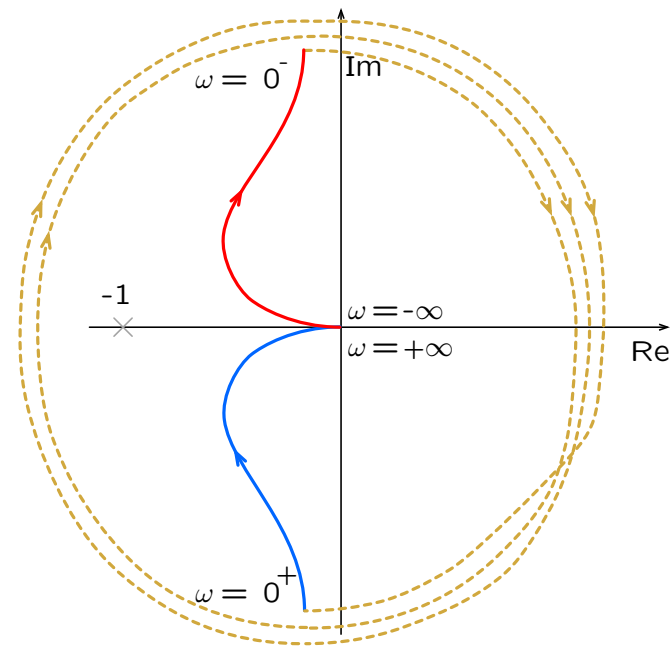


Diagramma di Nyquist "manuale" di $F_2(s)$
 $N = -2$

Harry Nyquist



Harry Nyquist

Harry Nyquist, nato a Nilsby (Svezia) il 7 Febbraio 1889, è morto a Harlingen (Texas, USA) il 4 Aprile 1976. Nyquist emigrò negli Stati Uniti nel 1907 e conseguì il dottorato di ricerca nel 1917 all'Università di Yale. Fu immediatamente assunto dalla A.T.&T. Company e lavorò sia alla sezione Ricerca e Sviluppo sia ai Bell Laboratories. I suoi contributi spaziano dalla Teoria delle Telecomunicazioni alla Teoria del Controllo. Nella Teoria del Controllo, il contributo più noto è il Teorema di Nyquist sulla stabilità dei sistemi a retroazione.