Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA
(Nuovo ordinamento)
31 Ottobre 2003
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1) Le specifiche richiedono:

- Ingresso di ordine 0, richiesta di errore a regime permanente finito $\Rightarrow$ sistema di controllo deve essere di tipo 0 e il sistema in catena diretta (controllore $C(s)$ in serie con il processo $P(s)$) deve avere un guadagno opportuno. Guadagno del processo $K_p = 2$, (positivo), specifica soddisfatta se $e_0 = 1/|1 + K_c K_p| \leq 3/100$ e cioè se $K_c \geq 97/6$.
- Funzione di trasferimento del disturbo
$$W_d(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$
pertanto, a regime permanente, in uscita il disturbo contribuisce per
$$y_{d,RP} = W_d(0) = \frac{1}{1 + K_c K_p}$$
e sarà minore o uguale di 1/101 per $K_c \geq 50$. Un valore di $K_c = 50$ soddisfa entrambe le specifiche di regime permanente.
- Dal tracciamento del diagramma di Bode di $K_c P(s)$ risulta che devo amplificare di 20dB e anticipare di almeno 30° in $\omega_t^* = 10$rad/sec. Uso una funzione anticipatrice (anticipo di fase e amplificazione del modulo) che mi aumenti la fase di almeno 30° in $\omega_t^* = 10$rad/sec. Ad esempio, scegliendo una funzione anticipatrice $R_a(s)$ con $m_a = 6$ e $\omega\tau_a = 0.8$ ottengo un anticipo di 32° e un'amplificazione di circa 2dB. Posso introdurre un ulteriore guadagno maggiore di 1 senza alterare il soddisfacimento delle specifiche a regime; scelgo K_{c2} in modo tale che il suo valore in decibel mi fornisca i $20 - 2 =$ 18dB richiesti (all'incirca $K_{c2} = 7.95$). Volendo ottenere gli effetti precedenti in $\omega_t^* = 10$rad/sec, si ha $\tau_a = 0.8/10$. Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Il controllore finale, nello schema di controllo a controreazione unitaria, è
$$C(s) = K_c K_{c2} R_a(s)$$
Il diagramma di Nyquist esatto è riportato in Fig.1. Un tracciamento approssimato deve mettere in evidenza il margine di fase ottenuto.

2) Il sistema è caratterizzato dalla funzione di trasferimento
$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s + 3}{s(s + 1)}$$
La risposta forzata in s è data da
$$y_f(s) = F(s)u(s)$$
con $u(s)$ la trasformata del segnale d'ingresso. Si noti che $u(t)$ è dato dalla combinazione lineare di 2 ingressi a gradino
$$u(t) = 2\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - 2) = 2u_1(t) - u_1(t - 2)$$
Sfruttando la linearità del sistema e la risposta forzata ad un ingresso traslato, si deve calcolare la sola risposta forzata $y_{f1}(t)$ all'ingresso $u_1(t) = \delta_{-1}(t)$. Si ha
$$y_{f1}(s) = F(s)u_1(s) = F(s)\frac{1}{s} = \frac{2s + 3}{s^2(s + 1)} = \frac{R_1}{s + 1} + \frac{R_2}{s} + \frac{R_3}{s^2}$$

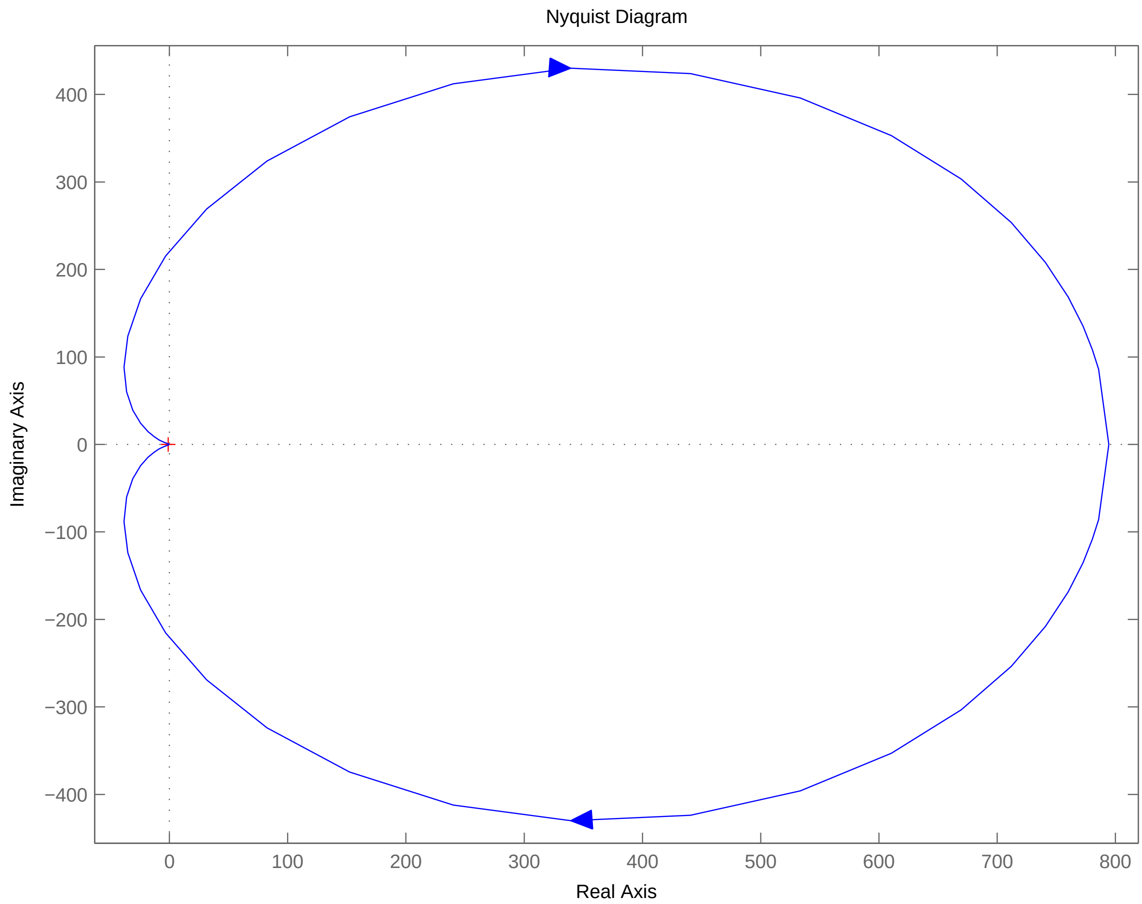

Figure 1: Diagramma di Nyquist

con $R_1 = 1$, $R_2 = -1$ e $R_3 = 3$ calcolabili dalla formula dei residui. Individuata l'antitrasformata di $y_{f1}(s)$ si ha il risultato finale

$$y_f(t) = 2y_{f1}(t) - y_{f1}(t-2)\delta_{-1}(t-2)$$

3) Vedi teoria

4) Il denominatore della funzione di trasferimento del sistema controreazionato è

$$p(s) = (s-1)(s+1)^2 + K(s+z) = s^3 + s^2 + s(K-1) + Kz - 1$$

Applicando il criterio di Routh, la condizione necessaria richiede $K > 1$ (e quindi positivo) e $Kz > 1$ (e quindi anche z deve essere positivo). Dalla tabella di Routh si hanno le seguenti ulteriori condizioni:

- $K(1-z) > 0$, essendo $K > 0$ deve essere $(1-z) > 0$ e cioè $z < 1$;
- $Kz > 1$, essendo sia K che z positivi, deve essere

$$K > \frac{1}{z}$$

In conclusione, il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se

$$K > \frac{1}{z} \qquad \text{e} \qquad 0 < z < 1$$