Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA
(Nuovo ordinamento)
11 Aprile 2005
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1) Per le tre definizioni vedi teoria. Per individuare la funzione di trasferimento del sistema dato, si ricorda che la risposta indiciale è la risposta forzata del sistema ad un ingresso a gradino unitario; pertanto è sufficiente effettuare il rapporto delle trasformate della risposta indiciale e del gradino

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\mathcal{L}\left\{\left(\frac{11}{2}e^{-t} - 6e^{-2t} + \frac{13}{6}e^{-3t} - \frac{5}{3}\right)\delta_{-1}(t)\right\}}{\mathcal{L}\left(\delta_{-1}(t)\right)} = \frac{(s-10)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

2) Vedi teoria. Nel caso in esame, ogni sistema S_1 e S_2 è caratterizzato da una dimensione dello spazio di stato pari a 1 (in particolare si ha $A_1 = -1$, $B_1 = 1$, $C_1 = -2$, $D_1 = 0$ e $A_2 = 2$, $B_2 = -1$, $C_2 = -1$, $D_2 = 0$), pertanto il sistema interconnesso avrà una dimensione dello spazio di stato pari a 2 e si può scegliere come vettore di stato di S

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Per studiare la stabilità del sistema S è sufficiente studiare gli autovalori della matrice dinamica del sistema interconnesso

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

o $\lambda_1 \approx -1.56$ e $\lambda_2 \approx -2.56$. La presenza di un autovalore reale positivo rende il sistema S instabile.

3) Il sistema in catena diretta è dato dalla serie controllore/processo $F(s) = C(s)P(s)$, mentre il sistema di controllo è dato da $F(s)$ in controreazione unitaria ed è caratterizzato dal denominatore (le cui radici sono i poli del sistema di controllo)

$$d_{ch}(s) = s(s-1)(s+10) + K(s+z) = s^3 + 9s^2 + s(K-10) + Kz$$

Dal criterio di Routh, le condizioni necessarie sono $K > 10$ e $Kz > 0$; le condizioni necessarie e sufficienti dalla prima colonna della tabella di Routh danno luogo alle condizioni

$$0 < Kz < 9(K-10)$$

dalle quali si deduce che z deve essere (essendo necessariamente K positivo)

$$z < \frac{9(K-10)}{K}$$

Scegliendo ad esempio $K = 100$, z deve essere tale che $0 < z < 8.1$; si sceglie ad esempio $z = 1$. La $F(s)$ risultante è

$$F(s) = \frac{100(s+1)}{s(s-1)(s+10)} = -\frac{10}{s}\frac{(1+s)}{(1-s)(1+s/10)}$$

Il diagramma di Nyquist corrispondente, riportato in Fig.1 in forma approssimata e in forma esatta (dettaglio), presenta un giro in senso antiorario intorno al punto di coordinate $(-1, 0)$ e quindi $N = +1$. Il sistema ad anello aperto $F(s)$ presenta un polo a parte reale positiva in $s = 1$ (e quindi $N = +1$), il criterio di Nyquist $N = N_p$ è quindi soddisfatto e il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

4) Il processo è caratterizzato da un guadagno (positivo) $K_p = 1/100$ ed è privo di poli in $s = 0$. Le specifiche richiedono:

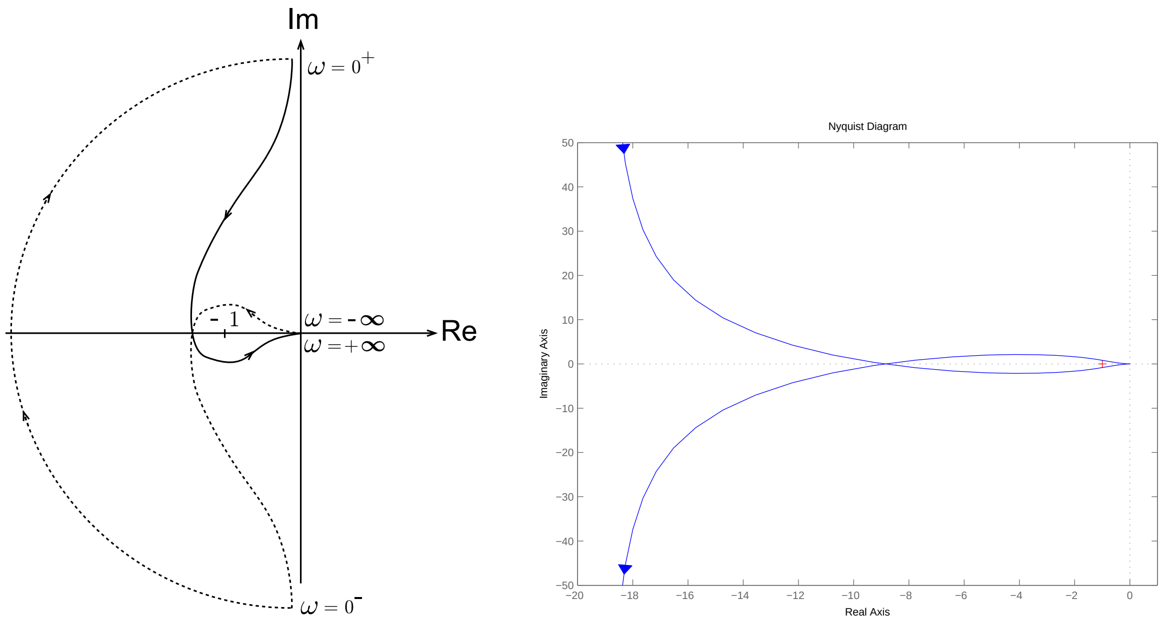

Figure 1: Diagramma di Nyquist e particolare

- Sistema di controllo di tipo 2 con guadagno opportuno. Per ottenere $|e_2| = 1/|K_c K_p| \leq 0.1$ il guadagno del controllore deve soddisfare $|K_c| \geq 1000$. Scelgo $K_c = 1000$.

- Dal tracciamento dei diagrammi di Bode di

$$\frac{1000}{s^2} P(s) = \frac{10}{s^2} \frac{1}{(1 + 0.01s)}$$

noto che in $\omega_t^* = 10$rad/sec ho un modulo pari a -20dB e una fase pari a $-\pi$ circa. Devo anticipare di almeno 30° e amplificare di esattamente 20dB. Incominciando dall'anticipo di fase ottenibile da una funzione anticipatrice, scelgo ad esempio $m_a = 6$ e $\omega\tau = 0.8$ (con conseguente amplificazione di 2.5dB circa). Per ottenere tale effetto in $\omega_t^* = 10$rad/sec deve essere $\omega_t^* \tau_a = 0.8$ da cui $\tau_a = 0.8/10$. Per ottenere come pulsazione di attraversamento $\omega_t^* = 10$rad/sec devo ancora amplificare di $20 - 2.5 = 17.5$dB. Ottengo tale effetto con un guadagno K_{c2} aggiuntivo, maggiore di 1 (maggiore di 0 in dB), nel controllore scelto in modo tale che $K_{c2}|_{dB} = 17.5$dB (e cioè $K_{c2} = 7.5$ circa). L'aggiunta di un tale guadagno nel controllore è lecita in quanto non altera il soddisfacimento delle specifiche di regime permanente (anzi le migliora). Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Un possibile controllore è quindi dato da

$$C(s) = K_c K_{c2} R_a(s) = K_c K_{c2} \left(\frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \right)$$

Dalla funzione di trasferimento del disturbo (in ingresso al processo)/uscita controllata

$$W_d(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

si ha, sfruttando il teorema del valore finale, $y_{RP}(t) = 0$ a causa della presenza di due zeri in $s = 0$ in $W_d(s)$ (derivanti dalla presenza di due poli in $s = 0$ nel controllore).

5) Vedi teoria.

6) Vedi teoria.