

Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA
(Nuovo ordinamento)
18 Luglio 2005
(Bozza di soluzione)

NB. Si riportano a grandi linee alcune soluzioni degli esercizi proposti all'esame. Lo svolgimento della prova scritta deve essere più chiara di quanto qui rapidamente accennato.

1) Il sistema di controllo considerato è caratterizzato da autovalori coincidenti con i poli della funzione di trasferimento riferimento/uscita (o equivalentemente disturbo/uscita, essendo la proprietà di stabilità una proprietà del sistema considerato indipendentemente dalla scelta della coppia ingresso/uscita). In effetti, date $F_1(s)$ e $F_2(s)$, il parallelo di $F_1(s)$ con $F_2(s)$ non produce cancellazioni

$$F_3(s) = F_1(s) \parallel F_2(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{10}{s+10} = \frac{11s+20}{(s+1)(s+10)}$$

(lo zero in $-20/11$ non coincide con nessun polo, sistema di dimensione due pari alla somma delle dimensioni dei singoli sottosistemi). La funzione di trasferimento riferimento/uscita è pari a

$$W_{ry}(s) = \frac{C(s)F_3(s)}{1 + C(s)F_3(s)} = \frac{K_c(11s+20)}{s(s+1)(s+10) + K_c(11s+20)}$$

I poli sono quindi le soluzioni del polinomio

$$p(s) = s(s+1)(s+10) + K_c(11s+20) = s^3 + 11s^2 + (11K_c + 10)s + 20K_c = 0$$

La condizione necessaria affinché tutte le radici siano a parte reale negativa è

$$K_c > -10/11, \quad \text{e} \quad K_c > 0 \Rightarrow K_c > 0$$

La relativa tabella di Routh è

1	11 K_c + 10
11	20 K_c
$\frac{101K_c+110}{11}$	
20 K_c	

e quindi la C.N.S. affinché il sistema di controllo sia stabile asintoticamente è $K_c > 0$. Si noti che se $K_c = 0$ il sistema di controllo ha poli in $s = 0$, $s = -1$ e $s = -10$ (coincidenti con i poli del sistema ad anello aperto) ed è stabile semplicemente, mentre se $K_c < 0$ e $K_c \neq -110/101$ si ha una variazione di segno nella prima colonna della tabella di Routh e quindi una radice a parte reale positiva (sistema instabile). Il caso $K_c = -110/101$ può essere studiato con altri metodi e si arriva alla presenza di una radice a parte reale positiva (sistema instabile).

Per verificare se il sistema di controllo dato è astatico, quando il sistema è stabile asintoticamente ($K_c > 0$), è necessario verificare se, a regime permanente, un disturbo costante non produce nessun effetto sull'uscita controllata y . A tal fine è necessario calcolare la funzione di trasferimento disturbo/uscita. Ponendo il riferimento $r(t)$ a zero (principio di sovrapposizione degli effetti), sono necessarie manipolazioni sullo schema a blocchi originario riassunte nelle figure Fig. (1) e Fig. (2).

Dallo schema finale di Fig. (2) si ha

$$W_{dy}(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)C(s) + F_2(s)C(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + (F_1(s) + F_2(s))C(s)} = \frac{sF_1(s)}{s + (F_1(s) + F_2(s))K_c}$$

e pertanto, per il teorema del valore finale si ha

$$y_{RP} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{dy}(s) \frac{d}{s} = W_{dy}(0)$$

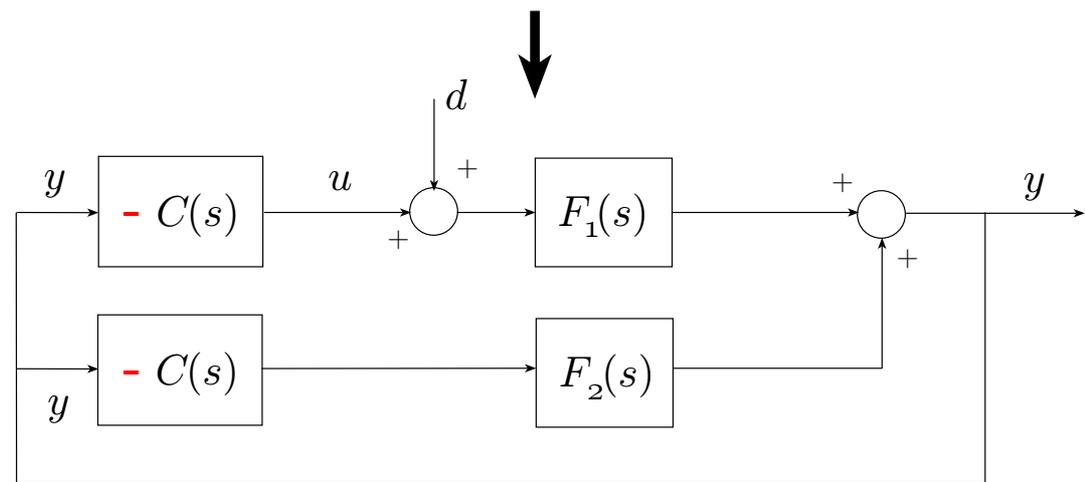
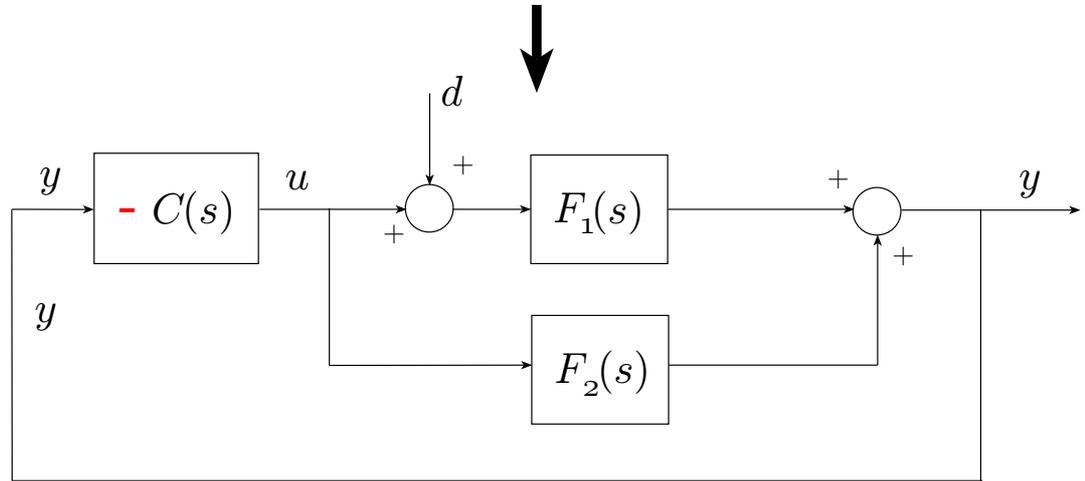
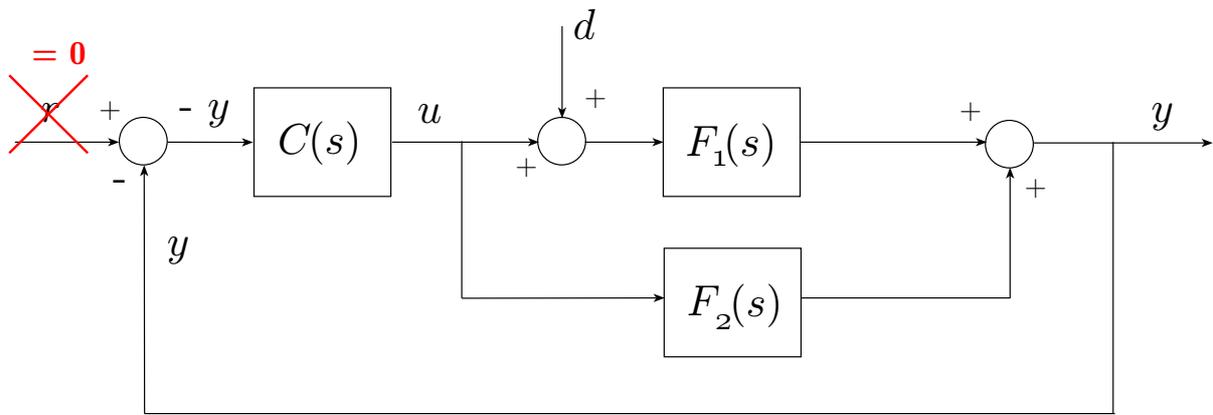


Figure 1: Sistema di controllo

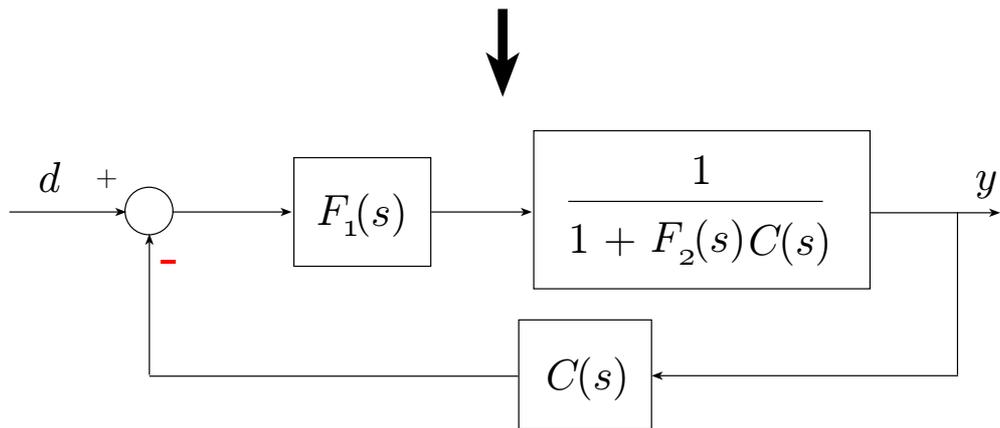
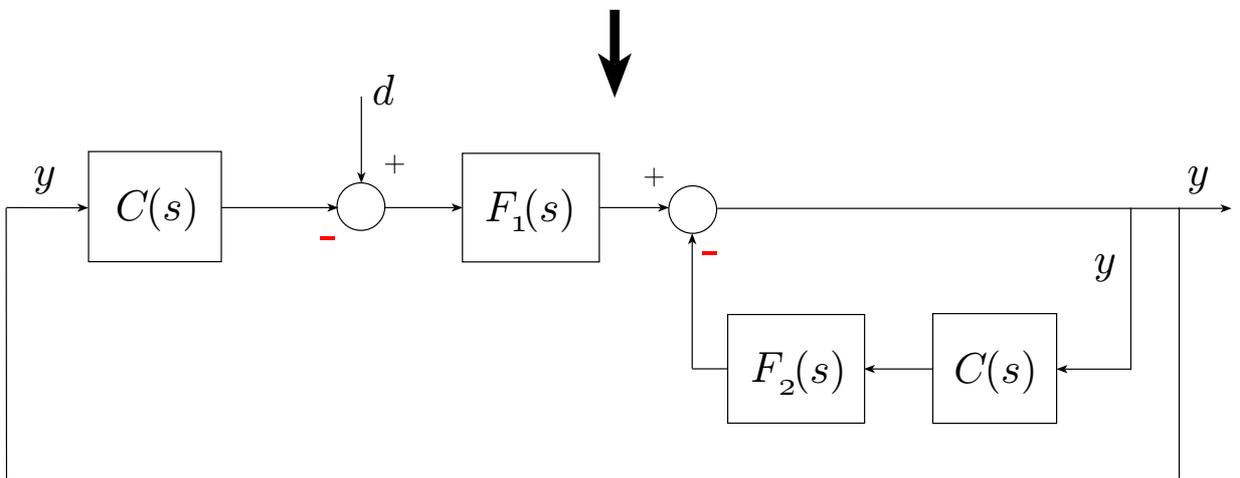
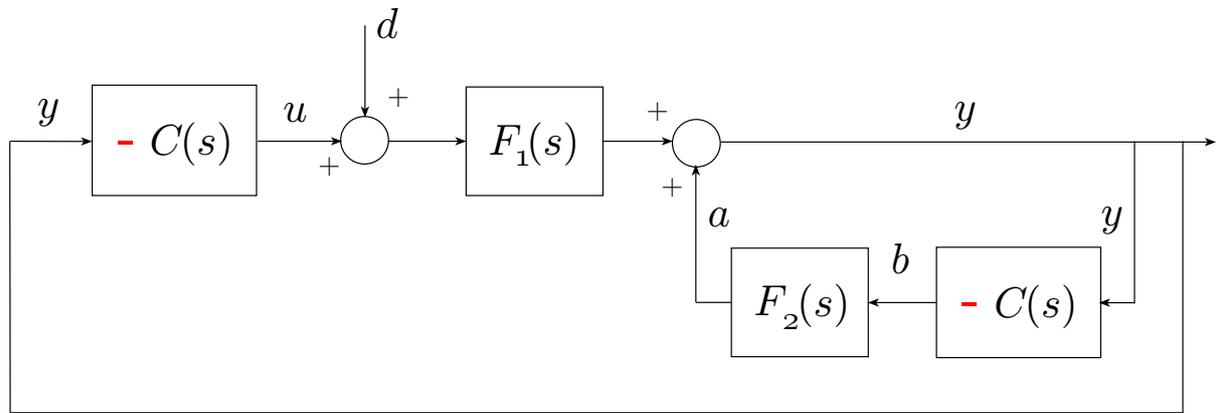


Figure 2: Sistema di controllo

e, date le funzioni $F_1(s)$ e $F_2(s)$, si ha

$$y_{RP} = 0$$

La presenza del polo nell'origine nel controllore rende il sistema di controllo considerato astatico rispetto a disturbi d costanti.

2) Il sistema ad anello aperto, caratterizzato da $F(s)$, non ha poli a parte reale positiva e quindi $N_p = 0$. Il diagramma di Nyquist risultante dal tracciamento approssimato dei diagrammi di Bode è riportato in Fig. (3)

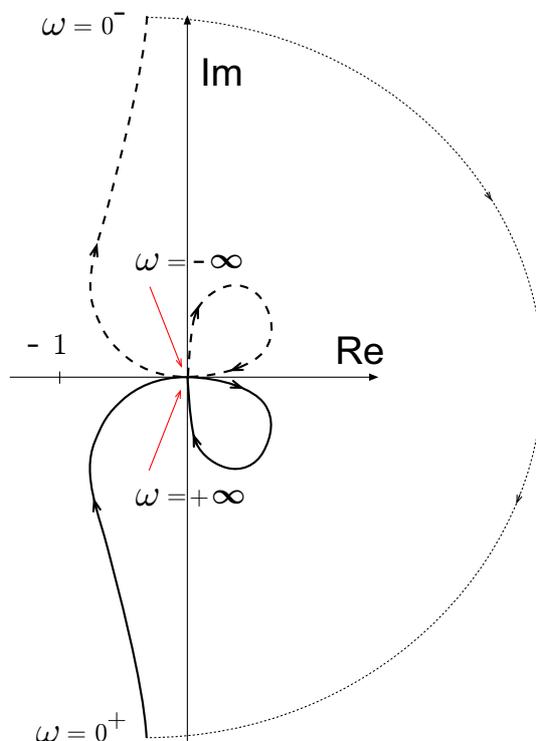


Figure 3: Diagramma di Nyquist

e quindi il sistema ad anello chiuso (a controreazione unitaria) è stabile asintoticamente ($N = N_p = 0$).

3) La specifica a regime permanente sul comportamento del sistema di controllo (scelto uno schema a controreazione unitaria) rispetto al riferimento di ordine 0 si traduce in una richiesta di sistema di controllo di Tipo 0 con un guadagno d'anello opportuno. La seconda specifica sul disturbo invece richiede l'introduzione di un polo nell'origine per garantire l'astatismo. Pertanto la presenza necessaria del polo nell'origine nella funzione d'anello (per l'astatismo rispetto al disturbo in uscita) rende automaticamente il sistema di Tipo 1 e quindi la prima specifica soddisfatta (errore a regime nullo). La struttura necessaria del controllore finora determinata è

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

senza nessun vincolo sul guadagno (positivo) della funzione d'anello. Tracciando i diagrammi di Bode di

$$\hat{P}(s) = C(s)P(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s + 0.01} = \frac{100}{s(1 + 100s)}$$

si ha l'andamento riportato in Fig. (4)

Per quanto riguarda il **caso a**), si noti che in $\omega_t^* = 0.01$ rad/sec, si ha

$$|\hat{P}(j\omega_t^*)|_{dB} = 77 \text{ dB}, \quad \angle \hat{P}(j\omega_t^*) = -135^\circ,$$

(77 dB = 80 dB - 3 dB). Come già evidenziato precedentemente, le specifiche di regime permanente non impongono nessun vincolo sul guadagno d'anello (comunque positivo). Appare quindi evidente soddisfare il caso a) con un semplice guadagno pari a $K_c|_{dB} = -77$ dB in quanto la fase in $\omega_t^* = 0.01$ rad/sec garantisce il margine di fase richiesto.

Per quanto riguarda invece il **caso b**), si ha per $\omega_t^* = 1$ rad/sec

$$|\hat{P}(j\omega_t^*)|_{dB} = 0 \text{ dB}, \quad \angle \hat{P}(j\omega_t^*) = -180^\circ,$$

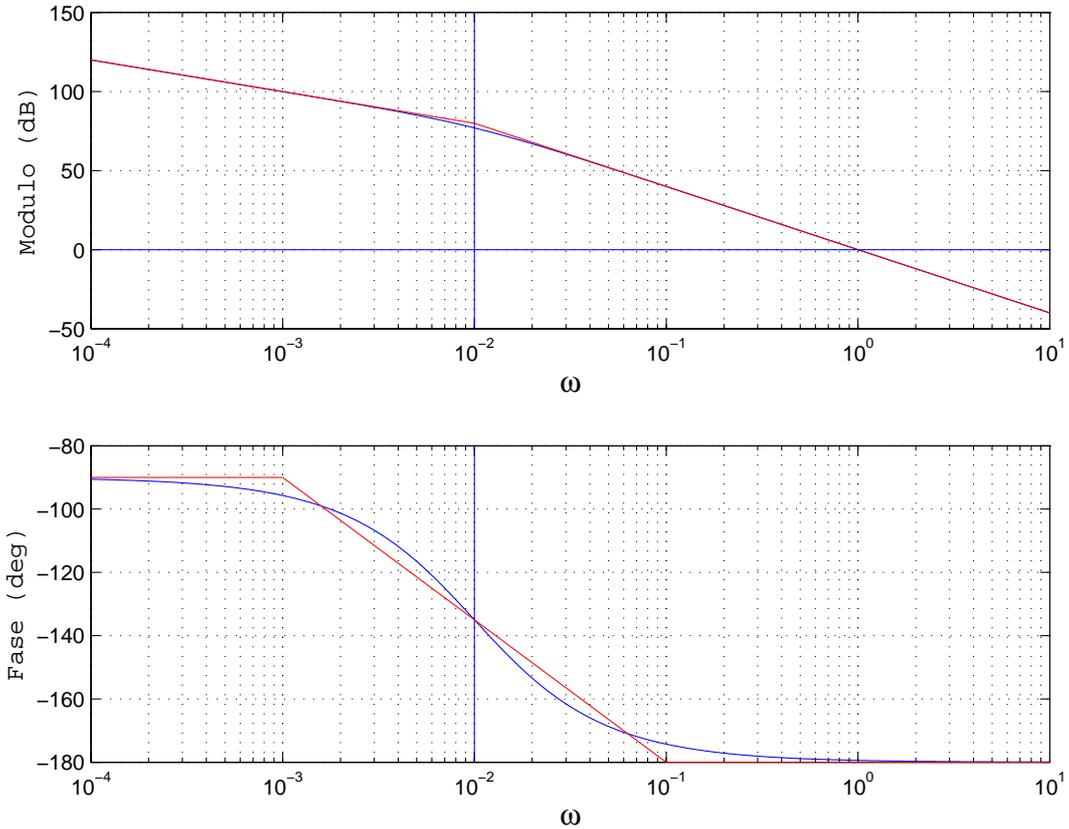


Figure 4: Diagramma di Bode di $\hat{P}(j\omega)$

e quindi è necessario anticipare, a tale pulsazione, di almeno 30° amplificando il meno possibile. A tal fine, si sceglie ad esempio $m_a = 4$ e pulsazione normalizzata $\omega\tau_a = 1$ (e quindi $\tau_a = 1$) con conseguente amplificazione di circa 2.5 dB. Tale amplificazione può essere compensata con un guadagno minore di uno (di 0 dB) in quanto non si hanno vincoli sul guadagno (positivo) dalle specifiche di regime permanente e quindi si sceglie

$$K_c|_{dB} = -2.5 \text{ dB}, \quad K_c \approx 0.75$$

Il controllore finale è quindi

$$C(s) = \frac{0.75}{s} \frac{1+s}{1+s/4}$$

Un rapido confronto tra i due casi può essere effettuato direttamente dalle specifiche. Il caso a) è caratterizzato da una minor pulsazione di attraversamento (e quindi il sistema di controllo da una minor banda passante) e un maggior margine di fase (e quindi il sistema di controllo da una minor sovralongazione). Ulteriori indicazioni possono essere ricavate dalle funzioni di sensitività, sensitività complementare e sensitività del controllo.

4) Il sistema considerato è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + K\lambda + 1$$

e quindi da autovalori

$$\lambda_{1/2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4}}{2}$$

Al variare di K si hanno le seguenti situazioni:

1. $|K| > 2$, due autovalori reali distinti entrambi negativi, i modi naturali aperiodici sono $e^{\lambda_1 t} = e^{-t/\tau_1}$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-t/\tau_2}$ con costanti di tempo $\tau_1 = -1/\lambda_1$ e $\tau_2 = -1/\lambda_2$;
2. $|K| = 2$, due autovalori reali coincidenti in $\lambda_1 = -1$ (se $K = 2$) o in $\lambda_1 = 1$ (se $K = -2$). Possono essere presenti i modi naturali e^{-t} e te^{-t} (o e^t e te^t) – andrebbe messa in evidenza la presenza di un blocco di Jordan di dimensione 2 – oppure il solo modo naturale e^{-t} (o e^t);
3. $|K| < 2$, coppia di autovalori complessi e coniugati $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$ con parte reale $\alpha = -K/2$ e $\omega = \sqrt{4 - K^2}/2$. I modi naturali pseudoperiodici sono del tipo $e^{\alpha t} \sin \omega t$. La pulsazione naturale è pari a $\omega_n = 1$ rad/sec (indipendente da K) e coefficiente di smorzamento $\zeta = K/2$.