

**Esame di FONDAMENTI di AUTOMATICA – Compito A**  
**(Nuovo ordinamento)**  
**20 Aprile 2006**  
**(Bozza di soluzione)**

**1A)** Il sistema richiesto ha tre autovalori (dimensione 3), uno reale  $\lambda_1$  negativo (con corrispondente modo naturale aperiodico convergente) e una coppia complessa e coniugata  $\alpha \pm j\omega$  con parte reale  $\alpha$  positiva (modo naturale pseudoperiodico divergente). Se il sistema non è completamente osservabile esiste un'opportuna scelta delle variabili di stato tale da mettere in evidenza sia la dinamica del sottosistema osservabile che quella del sottosistema inosservabile (scomposizione rispetto all'inosservabilità)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = ( C_1 \quad 0 ),$$

nella quale  $A_1$  rappresenta la matrice dinamica del sottosistema osservabile e  $A_3$  quella del sottosistema inosservabile. Si richiede inoltre che il sottosistema inosservabile sia instabile e quindi la coppia di autovalori complessi e coniugati  $\alpha \pm j\omega$  non possono che essere autovalori di  $A_3$ . Una possibile soluzione è quindi

$$A_1 = ( \lambda_1 ), \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad C_1 \neq 0, \quad A_2, B_1, B_2 \text{ arbitrari}$$

Se si fosse richiesto, al posto della condizione sull'osservabilità del sistema, la seguente condizione: "sia non completamente raggiungibile e con la dinamica del sottosistema non raggiungibile divergente", sfruttando la scomposizione rispetto alla raggiungibilità

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = ( C_1 \quad C_2 ),$$

con  $A_1$  matrice dinamica del sottosistema raggiungibile e  $A_3$  del sottosistema non raggiungibile. Una possibile soluzione è

$$A_1 = ( \lambda_1 ), \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad B_1 \neq 0, \quad A_2, C_1, C_2 \text{ arbitrari}$$

**2A)** La funzione di trasferimento riferimento/uscita è

$$W_{ry}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

e, nel caso non ideale, con le  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  date

$$W_{ry}(s) = \frac{s + p}{s(s + p) + p}$$

Si noti che la presenza del polo nell'origine in  $G_1(s)$  garantisce guadagno unitario per la  $W_{ry}(s)$ . I poli, nel caso generale non ideale, sono pari a

$$p_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4p}}{2}$$

Si hanno quindi le seguenti situazioni:

- **caso ideale:** si ha

$$W_{ry}^{id}(s) = \frac{1}{s + 1}$$

con un polo in  $s = -1$ .

- caso  $p = 4$ : si ha

$$p_{1/2} = -2$$

- caso  $p = 100$ : si ha

$$p_{1/2} = \frac{-100 \pm 40\sqrt{6}}{2}$$

e cioè  $p_1 = -98.9898$  e  $p_2 = -1.0102$  approssimabili con  $p_1 \approx -99$  e  $p_2 \approx -1$ .

Analizzando il caso  $p = 100$ , si nota la presenza di uno zero nella funzione di trasferimento  $W_{ry}(s)$  in  $z = -100$ , molto vicino al polo  $p_1$ . Si ha quindi una quasi cancellazione polo/zero e la funzione di trasferimento  $W_{ry}(s)$  è approssimabile con la funzione di trasferimento ideale

$$W_{ry}(s) \approx W_{ry}^{id}(s)$$

La situazione è riassunta in Fig.(1) La quasi cancellazione polo/zero comporta un valore del residuo

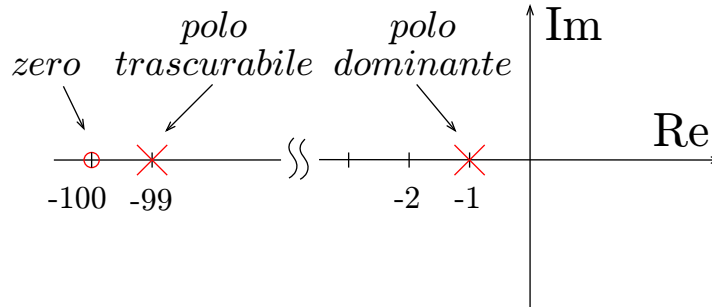


Figure 1: Poli e zeri di  $W_{ry}(s)$ , caso  $p = 100$

associato al polo  $p_1$ , sia nella trasformata della risposta impulsiva (funzione di trasferimento  $W_{ry}(s)$ ) sia nella trasformata della risposta indiciale  $W_{ry}(s)1/s$ , trascurabile

$$W_{ry}(s) = \frac{R_a}{s - p_1} + \frac{R_b}{s - p_2} = \frac{-0.0103}{s + 98.9898} + \frac{1.0103}{s + 1.0102}$$

$$Y(s) = W_{ry}(s)\frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} = \frac{1}{s} + \frac{0.0001}{s + 98.9898} + \frac{-1.0001}{s + 1.0102}$$

Si noti che la presenza dello zero vicino al polo  $p_1$  non è necessaria. Se non fosse presente lo zero, come nella funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{K_1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad \text{con} \quad \tau_1 = -\frac{1}{p_1}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2}, \quad K_1 = \frac{K}{p_1 p_2}$$

si potrebbe approssimare  $F(s)$  con la

$$F_{approx}(s) = \frac{K_1}{1 + \tau_2 s}$$

in quanto la dinamica associata al polo  $p_2 = -1$  è dominante. Da quanto finora esposto, risulta evidente che il sensore che approssima meglio il caso ideale è quello con la dinamica più veloce

$$G_2(s) = \frac{p}{s + p} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{1}{p}$$

e cioè con  $p$  più elevato. In effetti la banda passante di tale sensore coincide, nel caso in esame, con la pulsazione di rottura  $p$ ; più elevata è tale banda passante più il contenuto ad alta frequenza di  $y(t)$  viene riportato al sommatore. Attenzione però che ciò non significa necessariamente un sistema di controllo più prestante rispetto alla risposta ad un segnale di riferimento. In effetti, nel caso  $p = 4$  la  $W_{ry}(s)$  ha due poli coincidenti in  $-2$ , mentre nel caso  $p = 100$  il polo dominante si trova all'incirca in  $-1$  e quindi la dinamica è più lenta. Si riporta in Fig.(2) la risposta indiciale nei due casi considerati nelle quali risulta evidente la minor prontezza di risposta del sistema di controllo nel caso  $p = 100$ . Si noti infine che, dall'espressione del denominatore di  $W_{ry}(s)$ , essendo  $p > 0$  (sensore stabile asintoticamente) il sistema di controllo considerato non può essere reso instabile dal sensore.

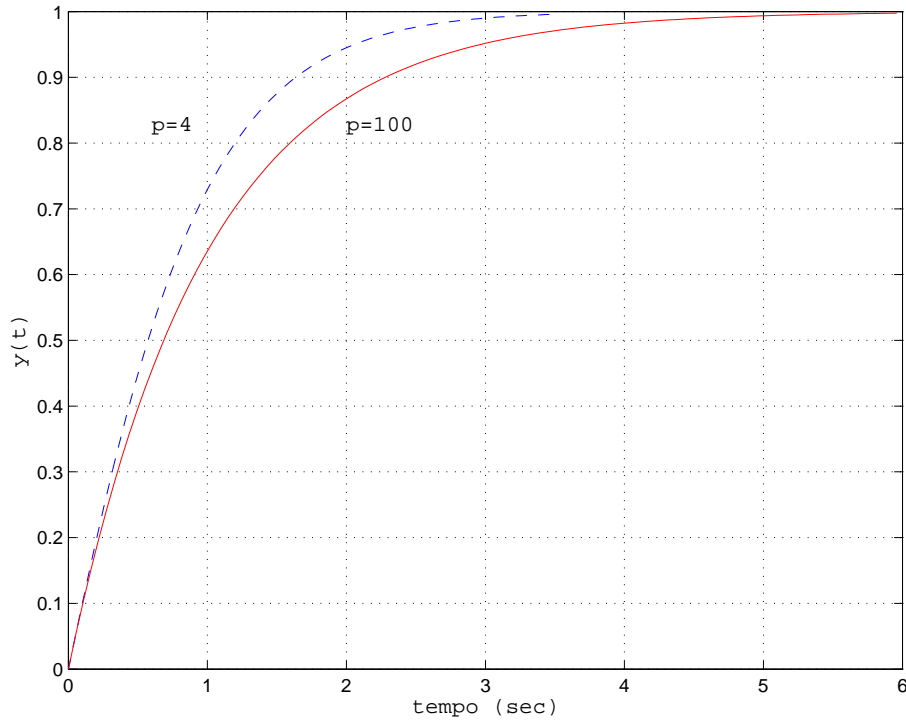


Figure 2: Risposta indiciiale di  $W_{ry}(s)$ , caso  $p = 100$  e  $p = 4$

**3A)** Il sistema considerato è della forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

La legge di controllo considerata,  $u(t) = -Ky(t)$  (si noti che  $K$  è uno scalare), costituisce l'equazione di interconnessione e pertanto il sistema interconnesso è rappresentato da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BKy(t) = Ax(t) - BKCx(t) = (A - KBC)x(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Il sistema interconnesso – si tratta di una controreazione con  $K$  sul ramo di reazione come illustrato in

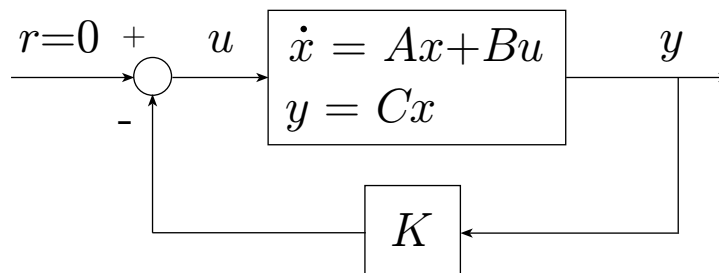


Figure 3: Il sistema interconnesso considerato

Fig.(3) – è quindi caratterizzato dalla matrice dinamica

$$\begin{aligned}A_n = (A - KBC) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Si noti che  $A_n$  ha la struttura simile alla forma canonica di raggiungibilità nella quale l'ultima riga ha per elementi i coefficienti del polinomio caratteristico in ordine crescente cambiati di segno. Il polinomio caratteristico è quindi pari a

$$p_{A_n}(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + K$$

In alternativa si calcola il determinante di  $(\lambda I - A_n)$

$$p_{A_n}(\lambda) = \det(\lambda I - A_n) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ K & 1 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

sviluppando ad esempio dalla prima colonna

$$p_{A_n}(\lambda) = \lambda [\lambda^2(\lambda + 1) + 1 + 2\lambda] - K(-1) = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + K$$

La condizione necessaria affinché tutte le radici di  $p_{A_n}(\lambda) = 0$  (autovalori) siano a parte reale negativa è  $K > 0$ . La tabella di Routh corrispondente è

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & K & \\ \hline 1 & 1 & & \\ 1 & K & & \\ 1 - K & & & \\ K & & & \end{array}$$

e quindi la C.N.S. affinché il sistema sia stabile asintoticamente è

$$0 < K < 1$$

**4A)** Il processo è caratterizzato da un guadagno  $K_p = -1/10$  (negativo) ed è privo di poli in  $s = 0$ . Le specifiche richiedono:

- In corrispondenza ad un ingresso di riferimento canonico di ordine 2, si richiede un errore finito non necessariamente nullo e quindi sistema di Tipo 2 con l'introduzione dei due poli in  $s = 0$  nel controllore. Indicando con  $K_c$  il guadagno del controllore  $C(s)$  da individuare (avendo scelto un classico schema di controllo a controreazione unitaria), l'errore a regime è pari a

$$|e_2| = \frac{1}{|K_c K_p|}$$

e quindi la specifica è soddisfatta se

$$|K_c K_p| \geq 10 \quad \Rightarrow \quad |K_c| \geq 100$$

e cioè

$$|K_c| \geq 100 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_c \geq 100 \\ K_c \leq -100 \end{cases}$$

Si sceglie  $K_c = -100$  (per rendere il guadagno della funzione d'anello positivo).

- Dal tracciamento dei diagrammi di Bode di

$$C(s)P(s) = \frac{-100}{s^2} P(s) = \frac{10}{s^2(1 + s/60)}$$

si nota che in  $\omega_t^* = 1$  rad/sec la fase è pari a  $-\pi$  mentre il modulo vale 20 dB. Si deve quindi anticipare di almeno  $40^\circ$  e attenuare di 20 dB. Per ottenere l'anticipo di fase richiesto e tenendo conto del successivo ritardo introdotto dalla funzione attenuatrice, si può decidere di anticipare di più con due funzioni anticipatrici  $R_{a1}(s)$  con  $m_{a1} = 6$  e  $\omega\tau_{a1} = 0.7$  (e conseguente anticipo di  $25^\circ$  circa e amplificazione di 1.5 dB) e  $R_{a2}(s)$  con  $m_{a2} = 4$  e  $\omega\tau_{a1} = 0.6$  (anticipo di  $22^\circ$  circa e amplificazione di 1 dB). L'attenuazione richiesta diventa quindi di 22.5 dB circa, ottenibile con una funzione attenuatrice  $R_i(s)$  con  $m_i = 14$  e  $\omega\tau_i = 100$  (e conseguente ritardo di  $7^\circ$  circa e attenuazione di 22.5 dB)

- Il sistema di controllo è stabile asintoticamente in quanto garantito dal teorema di Bode.

Il controllore finale è quindi pari a

$$C(s) = \frac{K_c}{s^2} R_{a1}(s) R_{a2}(s) R_i(s) = \frac{-100}{s^2} \frac{1 + 0.7j\omega}{1 + 0.7/6j\omega} \frac{1 + 0.6j\omega}{1 + 0.6/4j\omega} \frac{1 + 100/14j\omega}{1 + 100j\omega}$$

In Fig.(4) sono riportati i diagrammi di Bode del processo modificato (processo + controllore per specifiche di regime) e del processo compensato finale  $C(s)P(s)$ .

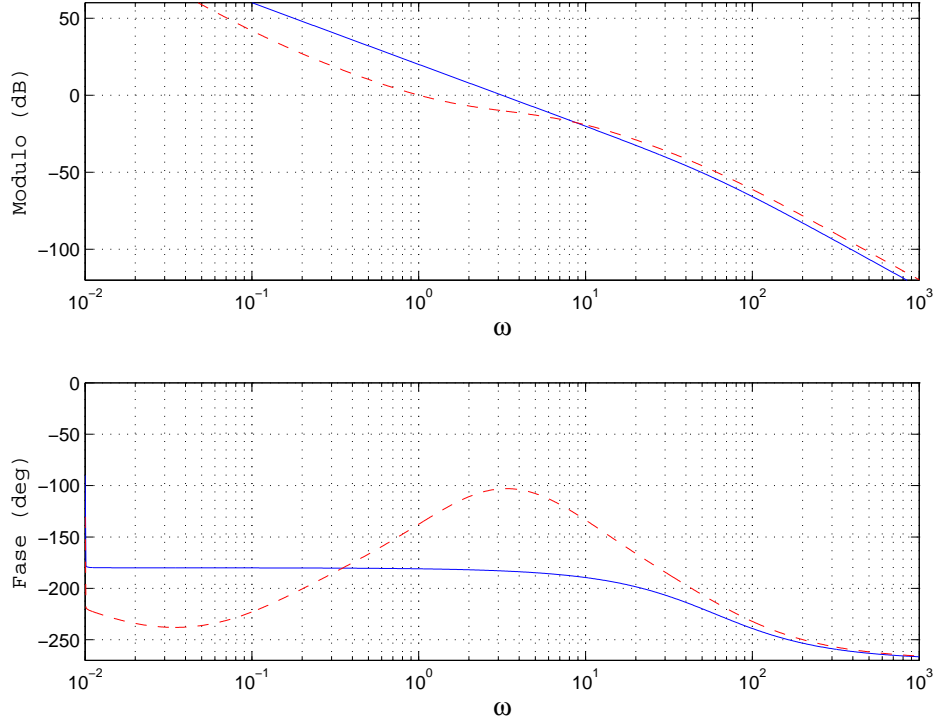


Figure 4: Diagrammi di Bode di  $-\frac{100}{s^2}P(s)$  (-) e di  $C(s)P(s)$  (- -)