

Corso di Fondamenti di Automatica

Università di Roma “La Sapienza”

Diagrammi di Bode

L. Lanari

Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Università di Roma “La Sapienza”

Roma, Italy

Argomenti

- Forma canonica di Bode
- Modulo e fase nel piano complesso
- I decibel (dB)
- Scala logaritmica per le ascisse
- Diagrammi di Bode dei vari fattori
- Sistema come filtro

Notazioni

- $|a| = \text{Mod}[a] = \text{modulo di } a$
- $\angle a = \text{Fase}[a] = \text{fase di } a$
- $j = \sqrt{-1}$
- s variabile complessa

La Forma Canonica di Bode

Rappresentazione poli/zeri di una funzione di trasferimento

$$F(s) = K' \frac{1}{s^m} \frac{\prod_k (s - z_k) \prod_l (s^2 + 2\zeta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2)}{\prod_i (s - p_i) \prod_z (s^2 + 2\zeta_z \omega_{nz} s + \omega_{nz}^2)}$$

con m tale che*

- $m = 0$ se nessun polo e zero in $s = 0$
- $m < 0$ se m zeri in $s = 0$
- $m > 0$ se m poli in $s = 0$

Inoltre

- espandendo il denominatore si ottiene un polinomio monico (coefficiente del fattore di ordine più elevato in s pari a 1). Ciò è sempre possibile ponendo un eventuale coefficiente diverso da 1 in K'
- K' non è il guadagno del sistema

*Si noti che non possono essere contemporaneamente presenti poli e zeri in $s = 0$ in quanto si suppone che la $F(s)$ abbia numeratore e denominatore coprimi, cioè senza radici in comune. Per la stessa ipotesi non si possono avere cancellazioni poli/zeri in generale in $F(s)$.

La Forma Canonica di Bode

- i termini $(s - z_k)$ e $(s - p_i)$ derivano dalla presenza di
 - ◇ zeri reali (in $s = z_k$)
 - ◇ poli reali (in $s = p_i$)
- i termini $(s^2 + 2\zeta_\ell\omega_{n\ell}s + \omega_{n\ell}^2)$ e $(s^2 + 2\zeta_z\omega_{nz}s + \omega_{nz}^2)$ derivano dalla presenza di
 - ◇ zeri complessi e coniugati (in $s = \alpha_\ell \pm j\beta_\ell$)
 - ◇ poli complessi e coniugati (in $s = \alpha_z \pm j\beta_z$)

con, in generale,

– pulsazione naturale $\omega_{n*} = \sqrt{\alpha_*^2 + \beta_*^2}$

– coefficiente di smorzamento $\zeta_* = -\alpha_*/\omega_{n*} = -\alpha_*/\sqrt{\alpha_*^2 + \beta_*^2}$

La Forma Canonica di Bode

fattorizzando

$$s - z_k = -z_k(1 - 1/z_k s) = -z_k(1 + \tau_k s) \quad \text{con} \quad \tau_k = -1/z_k$$

$$s - p_i = -p_i(1 - 1/p_i s) = -p_i(1 + \tau_i s) \quad \text{con} \quad \tau_i = -1/p_i$$

con τ_i e τ_k costanti di tempo

$$\begin{aligned} F(s) &= K' \frac{1}{s^m} \frac{\prod_k(-z_k) \prod_l(\omega_{nl}^2) \prod_k(1 + \tau_k s) \prod_l(1 + 2\zeta_l/\omega_{nl} s + s^2/\omega_{nl}^2)}{\prod_i(-p_i) \prod_z(\omega_{nz}^2) \prod_i(1 + \tau_i s) \prod_z(1 + 2\zeta_z/\omega_{nz} s + s^2/\omega_{nz}^2)} \\ &= K \frac{1}{s^m} \frac{\prod_k(1 + \tau_k s) \prod_l(1 + 2\zeta_l/\omega_{nl} s + s^2/\omega_{nl}^2)}{\prod_i(1 + \tau_i s) \prod_z(1 + 2\zeta_z/\omega_{nz} s + s^2/\omega_{nz}^2)} \end{aligned}$$

con K guadagno generalizzato del sistema

$$K = K' \frac{\prod_k(-z_k) \prod_l(\omega_{nl}^2)}{\prod_i(-p_i) \prod_z(\omega_{nz}^2)}$$

ottenibile come (per qualsiasi valore di m)

$$K = [s^m F(s)] \Big|_{s=0}$$

La Forma Canonica di Bode

Si noti che

- se il sistema ha zeri in $s = 0$ (e quindi è privo di poli in $s = 0$), K non coincide con il **guadagno statico** del sistema definito come

$$F(s) \Big|_{s=0} = F(0)$$

La presenza degli zeri in $s = 0$ implica $F(0) = 0$.

- se il sistema è privo di poli e zeri in $s = 0$, K coincide con il guadagno statico (o in continua) $F(0)$

$$K = F(0)$$

- se il sistema è privo di poli e zeri in $s = 0$ ed è stabile asintoticamente, la risposta indiciale tende asintoticamente al guadagno statico $K = F(0)$
- se il sistema ha zeri in $s = 0$ ed è stabile asintoticamente, la risposta indiciale tende asintoticamente al guadagno statico

$$F(0) = 0 \neq K$$

La Forma Canonica di Bode della Risposta Armonica

$$F(j\omega) = K \frac{1}{(j\omega)^m} \frac{\prod_k (1 + j\omega\tau_k) \prod_l (1 + 2\zeta_l j\omega/\omega_{nl} + (j\omega)^2/\omega_{nl}^2)}{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_z (1 + 2\zeta_z j\omega/\omega_{nz} + (j\omega)^2/\omega_{nz}^2)}$$

con 4 fattori fondamentali della forma

1. **Fattore costante** K (guadagno generalizzato)
2. **Fattore monomio** $j\omega$ (zero/polo in $s = 0$)
3. **Fattore binomio** $1 + j\omega\tau$ (zero/polo reale non nullo)
4. **Fattore trinomio** $1 + 2\zeta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$ (coppia zeri/poli complessi e coniugati)

Modulo e Fase

Diagrammi di Bode: rappresentazione grafica del modulo (in dB) e della fase di $F(j\omega)$ al variare di $\omega \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

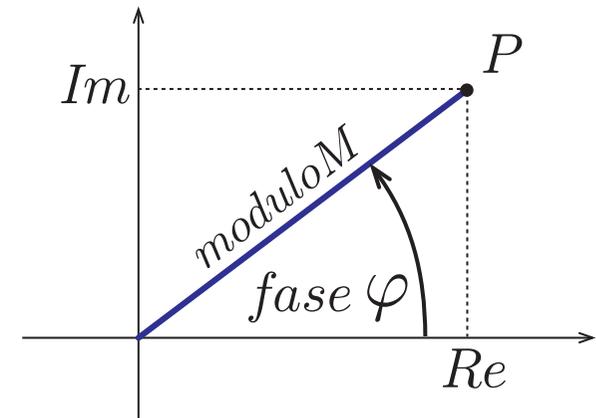
per ogni fissato $\bar{\omega}$, $F(j\bar{\omega}) \in \mathbb{C}$ può essere rappresentato

- Parte reale e parte immaginaria

$$F(j\bar{\omega}) = \text{Re}[F(j\bar{\omega})] + j\text{Im}[F(j\bar{\omega})]$$

- Modulo e Fase

$$F(j\bar{\omega}) = \text{Mod}[F(j\bar{\omega})]e^{j\text{Fase}[F(j\bar{\omega})]}$$



Proprietà della fase:

$$\text{Fase}[F.G] = \text{Fase}[F] + \text{Fase}[G], \quad \text{Fase}\left[\frac{1}{F}\right] = -\text{Fase}[F]$$

non vale per il modulo \rightarrow si passa al logaritmo del modulo

Decibel

Il modulo è espresso in **decibel** (dB)

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |F(j\omega)|$$

Dalle proprietà del logaritmo

$$|F.G|_{\text{dB}} = |F|_{\text{dB}} + |G|_{\text{dB}}$$

$$\left| \frac{1}{F} \right|_{\text{dB}} = -|F|_{\text{dB}}$$

$$|F|_{\text{dB}} \nearrow +\infty \text{ se } |F| \nearrow \infty$$

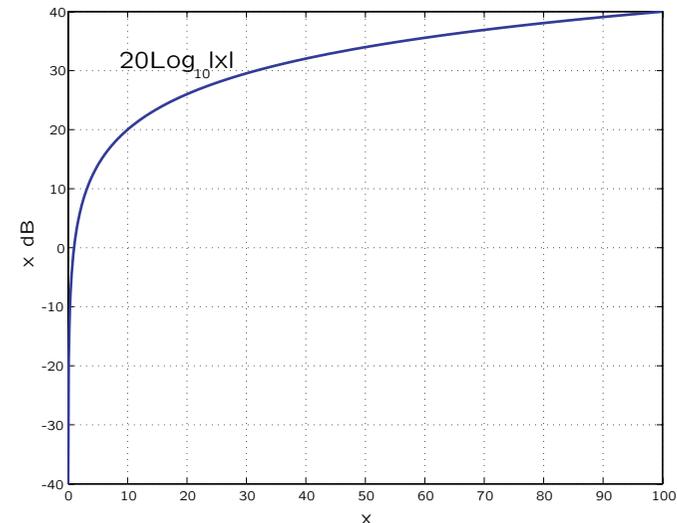
$$|F|_{\text{dB}} \searrow -\infty \text{ se } |F| \searrow 0$$

Esempi

$$|0.1|_{\text{dB}} = -20 \text{ dB} \quad |10|_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$$

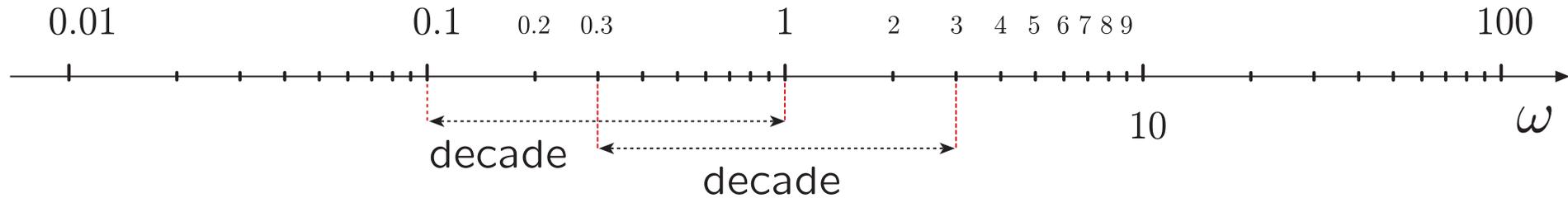
$$|1|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \quad |100|_{\text{dB}} = 40 \text{ dB}$$

$$|\sqrt{2}|_{\text{dB}} \approx 3 \text{ dB}$$



Scala logaritmica

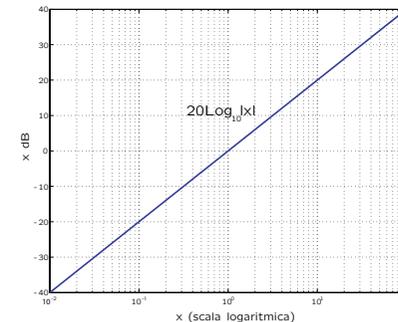
Per le ascisse (pulsazioni) si usa una scala logaritmica in base 10 (distanza di una **decade** corrisponde a una moltiplicazione per 10)



Vantaggi della scala logaritmica per le ascisse e dei decibel

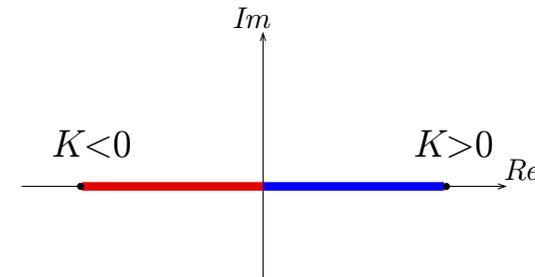
- rappresentare grandezze (ω e modulo) che variano in campi estesi
- facilità nella costruzione del diagramma del modulo in dB di una risposta armonica data in forma fattorizzata (forma canonica di Bode) a partire dagli andamenti del modulo in dB dei singoli fattori
- facilità di rappresentare i diagrammi di sistemi in serie (somma dei singoli diagrammi)

La funzione $\log_{10}(x)$, in scala logaritmica per le ascisse, diventa lineare!

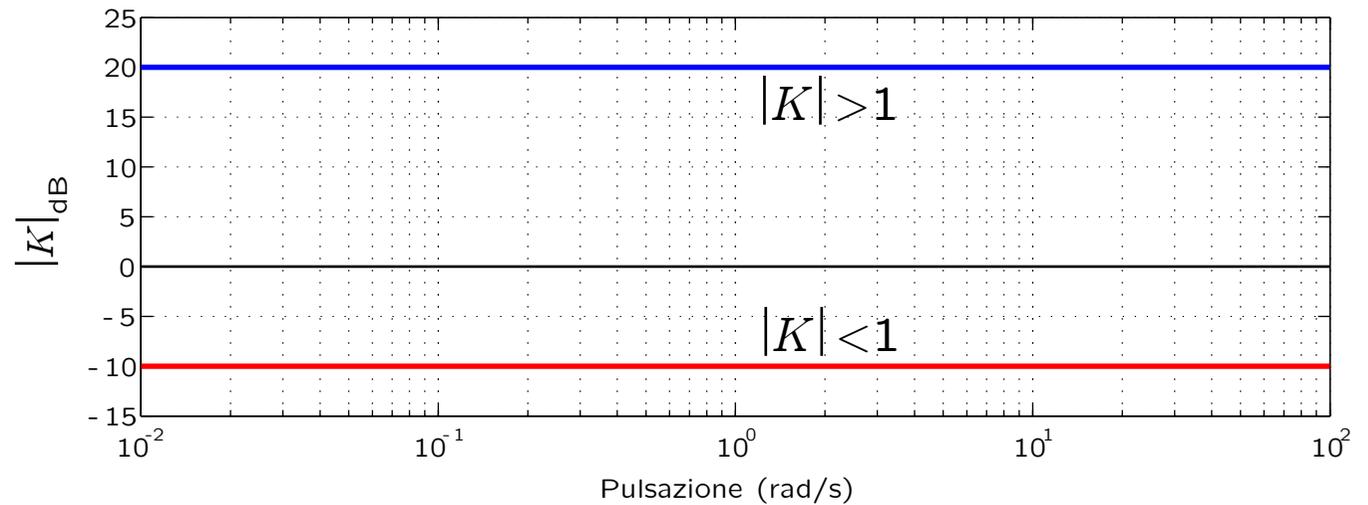


Fattore Costante K

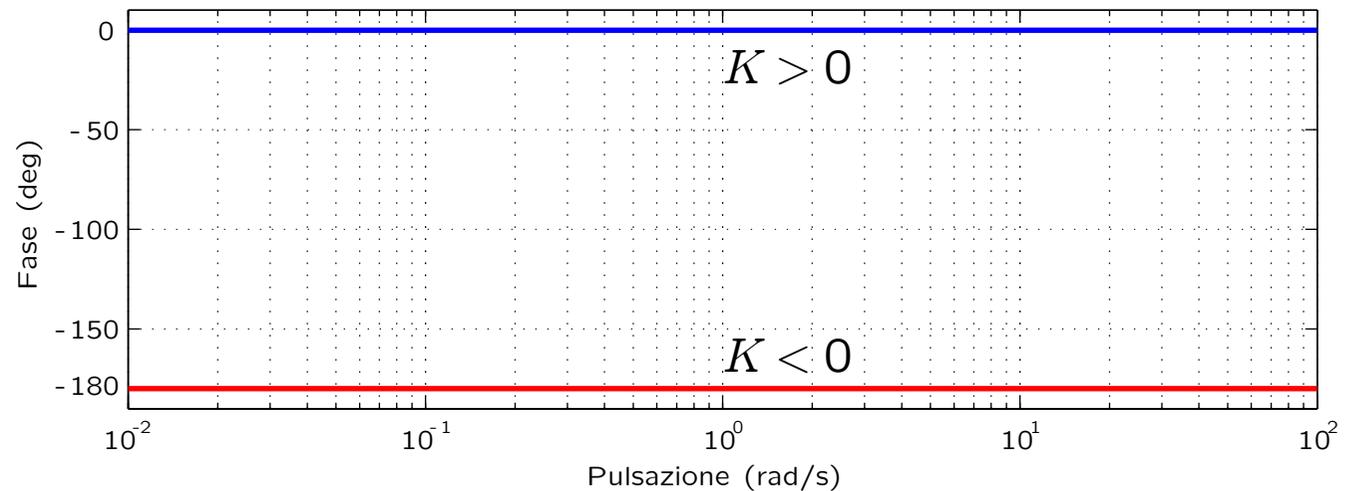
Nel piano complesso
(es: $K = 10$ e $K = -0.3162$)



Modulo



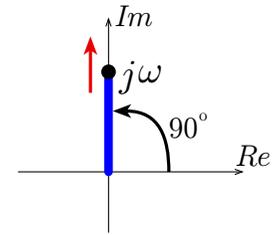
Fase



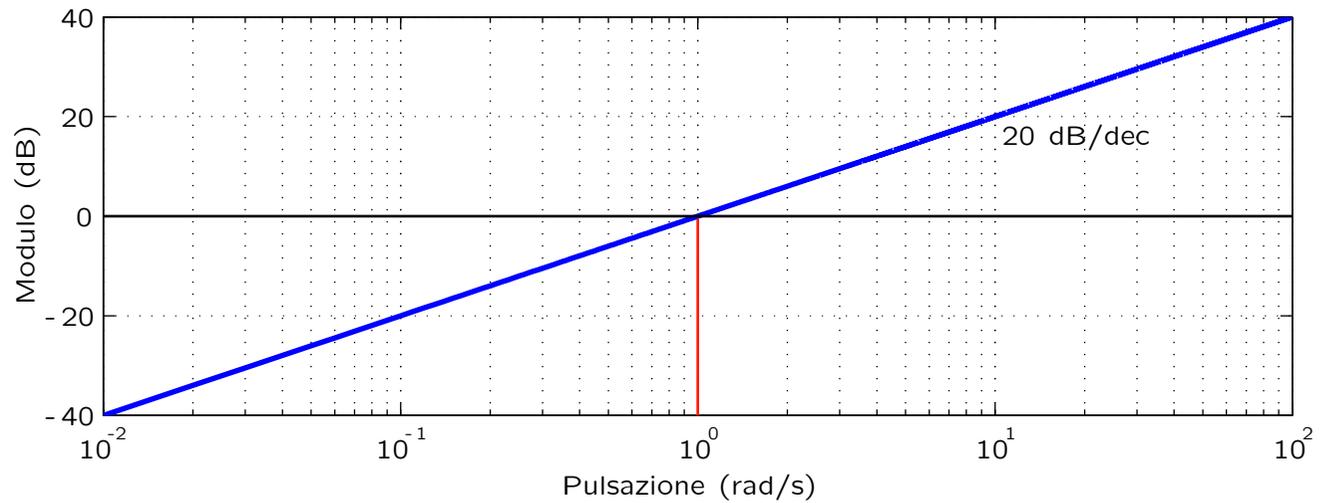
Fattore Monomio $j\omega$

$|j\omega|_{dB} = 20 \log_{10} \omega$ nel piano complesso

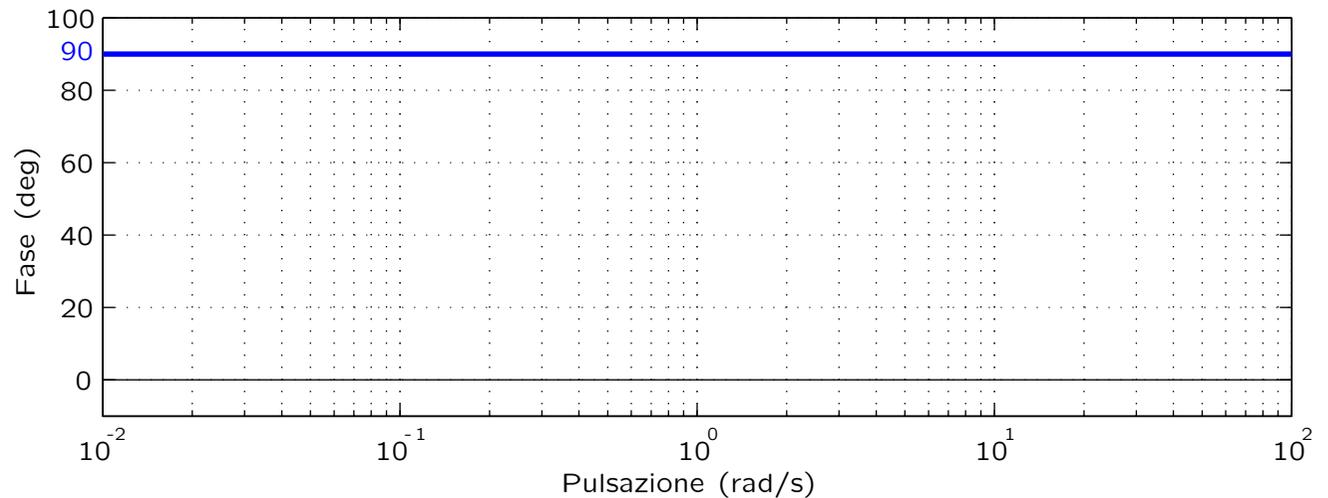
$|j\omega|_{dB} = 20x$ con le ascisse x in scala logaritmica



Modulo



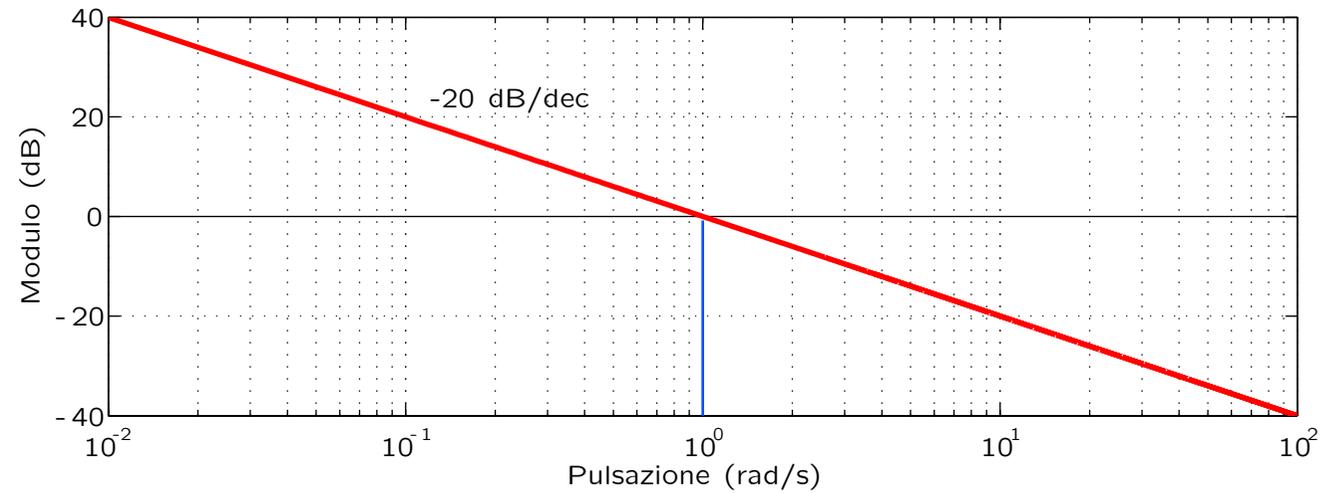
Fase



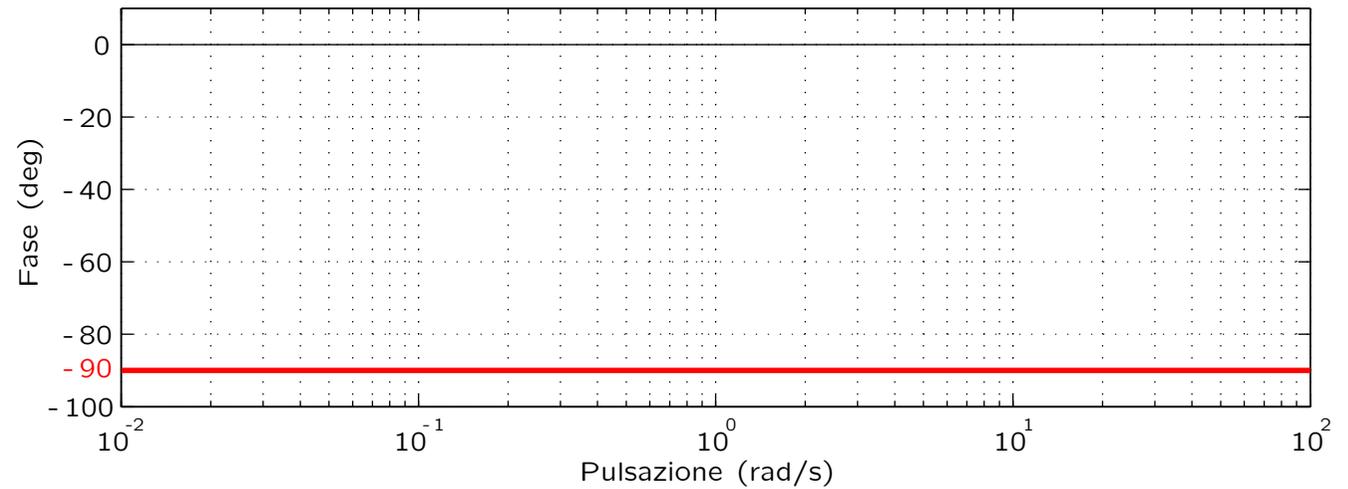
Fattore Monomio a Denominatore $1/j\omega$

Dalle proprietà del modulo in dB e della fase

Modulo



Fase



Fattore Binomio a numeratore $(1 + j\omega\tau)$

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

Approssimazione rispetto alla **pulsazione di rottura** $1/|\tau|$

$$\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ \sqrt{\omega^2\tau^2} & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

e quindi

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

mentre alla pulsazione di rottura $\omega^* = 1/|\tau|$

$$|1 + j\tau/|\tau||_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

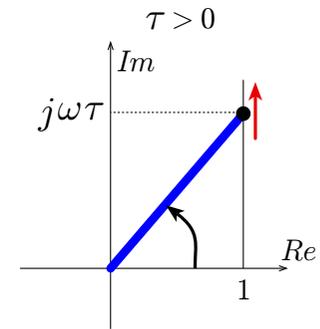
Si approssima il modulo con due semi-rette.

Andamento del modulo indipendente dal segno di τ

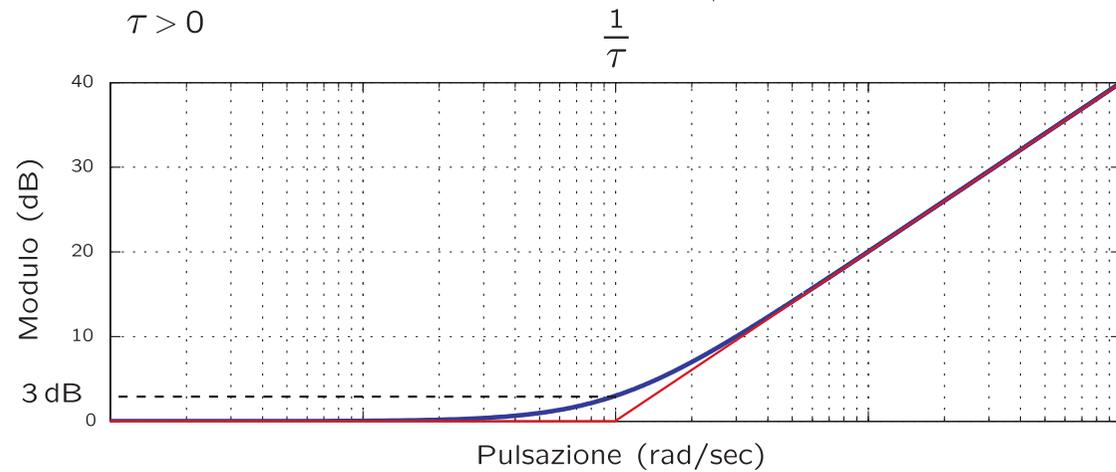
L'andamento della fase dipende invece dal segno di τ

Fattore Binomio a numeratore $(1 + j\omega\tau)$, $\tau > 0$

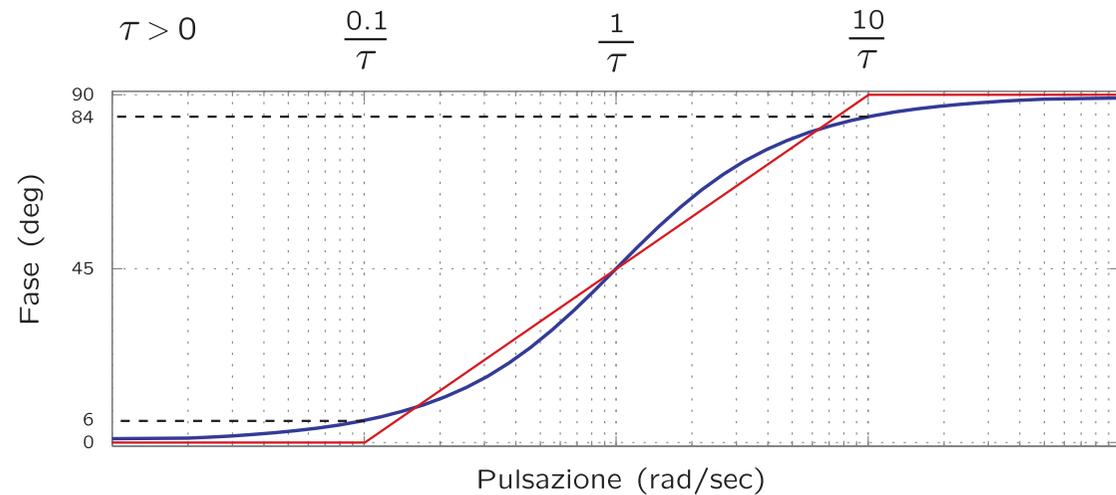
Nel piano complesso



Modulo



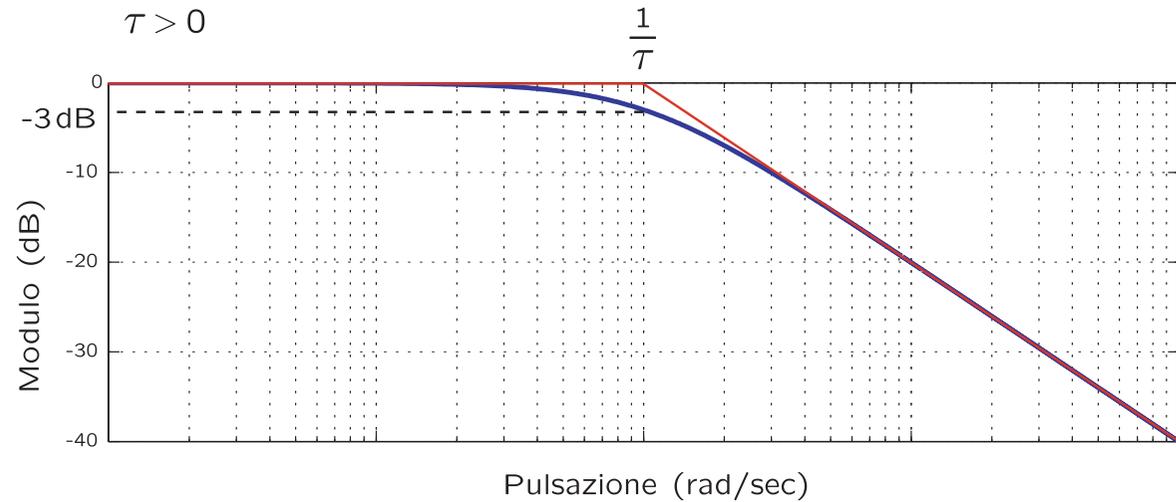
Fase



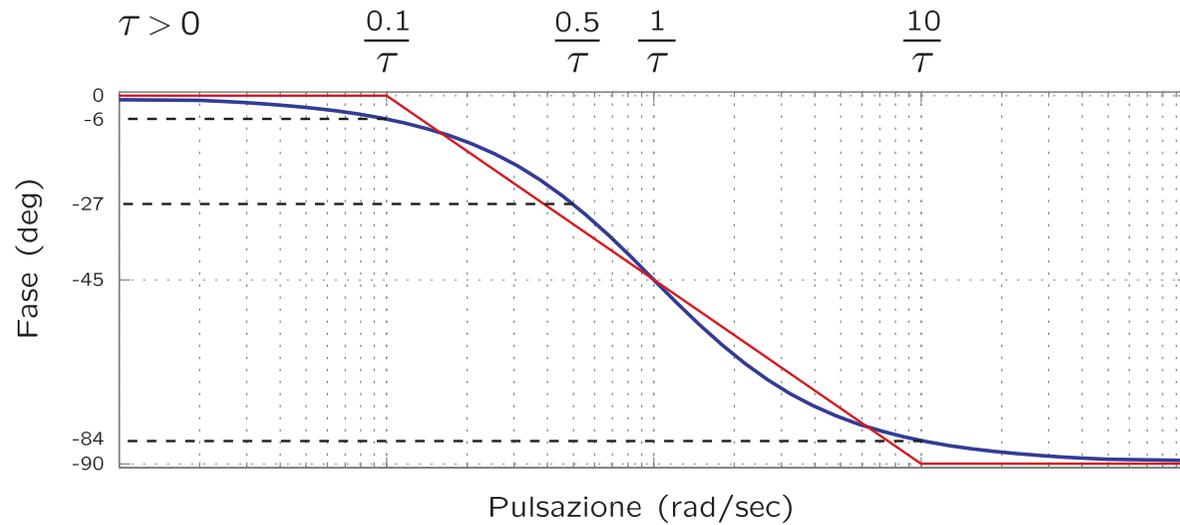
Fattore Binomio a denominatore $1/(1 + j\omega\tau)$, $\tau > 0$

Dalle proprietà del modulo in dB e della fase

Modulo

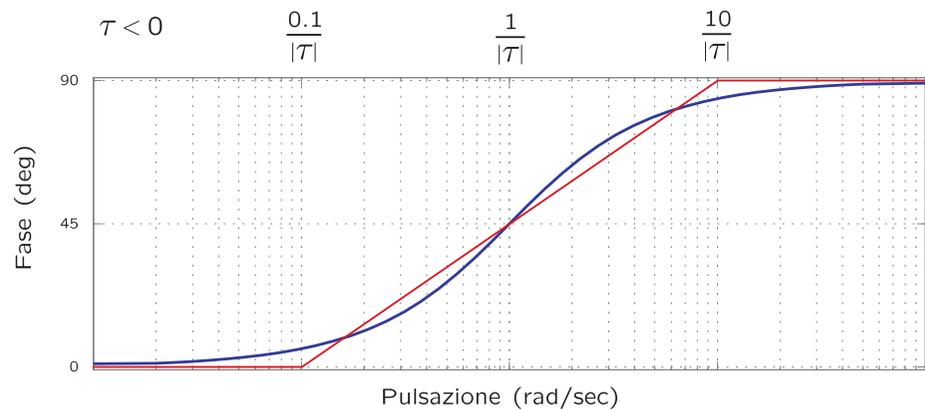
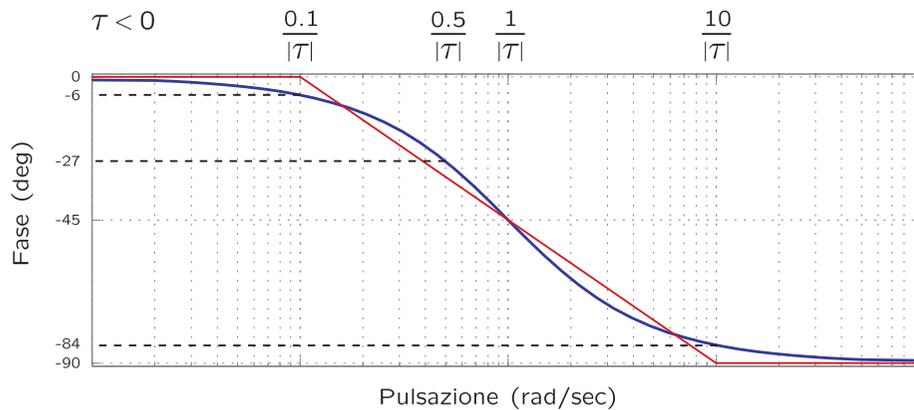
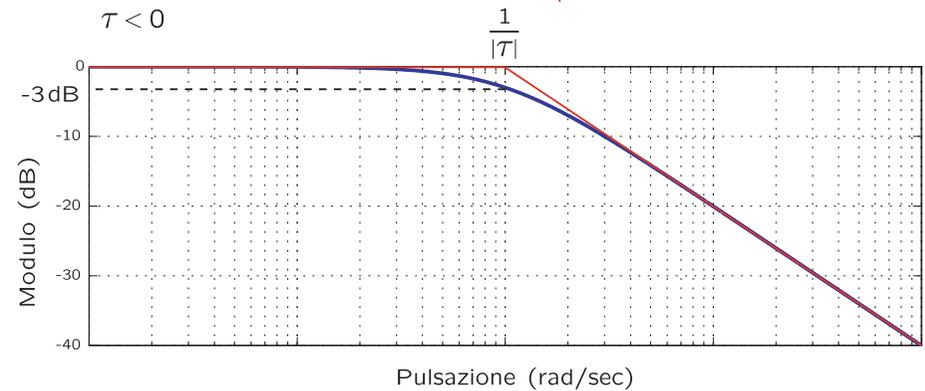
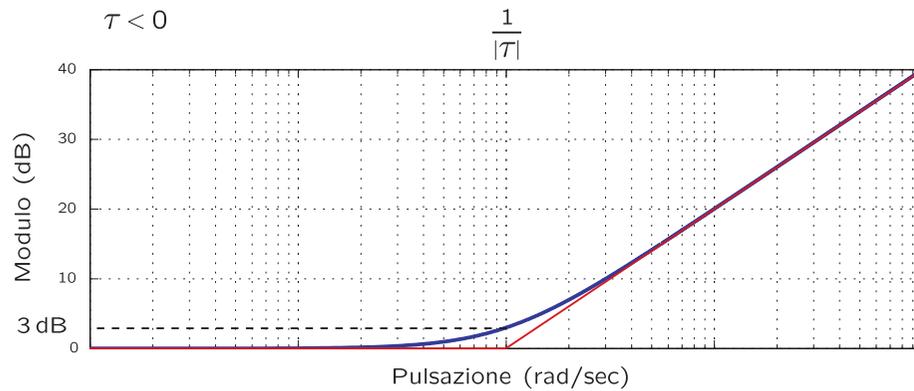
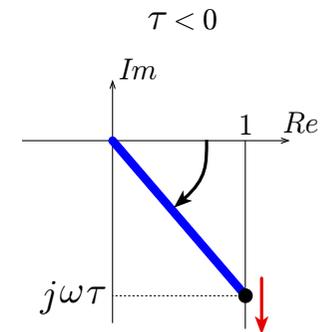


Fase



Fattore Binomio a numeratore/denominatore $\tau < 0$

Modulo non cambia, fase si



Numeratore

Denominatore

Fattore Trinomio a numeratore

Modulo

$$\begin{aligned} \left| 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| &= \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} \right| \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \end{aligned}$$

Approssimazione rispetto alla **pulsazione naturale** ω_n

$$\begin{aligned} |\text{TRINOMIO}| &\approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases} \\ |\text{TRINOMIO}|_{dB} &\approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ 40 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_n^2 & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases} \end{aligned}$$

in $\omega = \omega_n$ si ha $|\text{TRINOMIO}| = 2|\zeta|$

\Rightarrow se $\zeta = 0$ si ha $-\infty \text{ dB}$, se $|\zeta| = 0.5$ si ha 0 dB , se $|\zeta| = 1$ si ha 6 dB

Fattore Trinomio $|\zeta| = 1$

Si noti che, nel caso $\zeta = \pm 1$, le radici del fattore trinomio sono reali coincidenti in

$$\text{radici} = \begin{cases} -\omega_n & \text{se } \zeta = 1 \\ \omega_n & \text{se } \zeta = -1 \end{cases}$$

$$1 \pm 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} = \left(1 \pm \frac{s}{\omega_n}\right)^2$$

e quindi gli andamenti del modulo e della fase per $\zeta = \pm 1$ coincidono con quelli del doppio fattore binomio con pulsazione di rottura

$$\frac{1}{|\tau|} = \omega_n$$

Pertanto in $\omega = \omega_n$ il modulo del fattore trinomio, nel caso $|\zeta| = 1$, vale

$$2 \times (3 \text{ dB}) = 6 \text{ dB} \quad \text{Trinomio a numeratore}$$

$$2 \times (-3 \text{ dB}) = -6 \text{ dB} \quad \text{Trinomio a denominatore}$$

Fattore Trinomio

Inoltre se $|\zeta| < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$, il modulo di un fattore trinomio a denominatore

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{1}{\text{TRINOMIO}} \right|$$

ha un massimo chiamato **picco di risonanza**

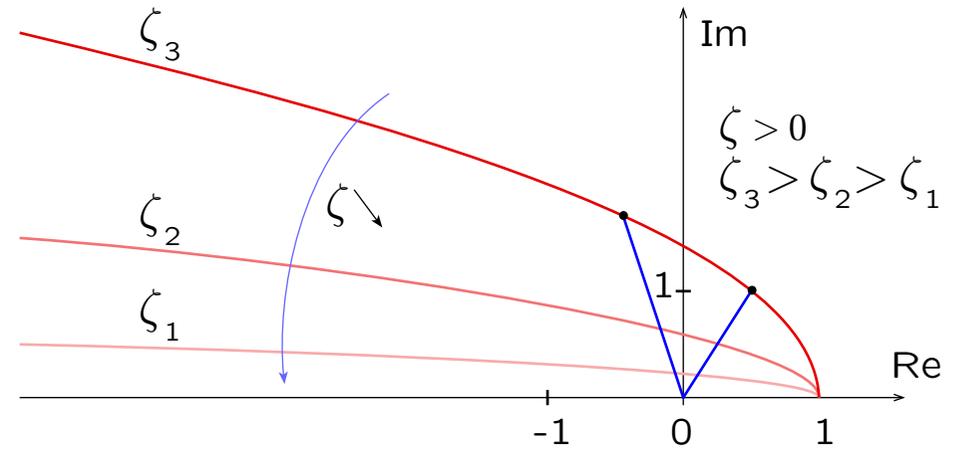
$$|F(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\zeta|\sqrt{1-\zeta^2}}$$

in corrispondenza della **pulsazione di risonanza** ω_r (coincidente con la pulsazione naturale solo per $\zeta = 0$)

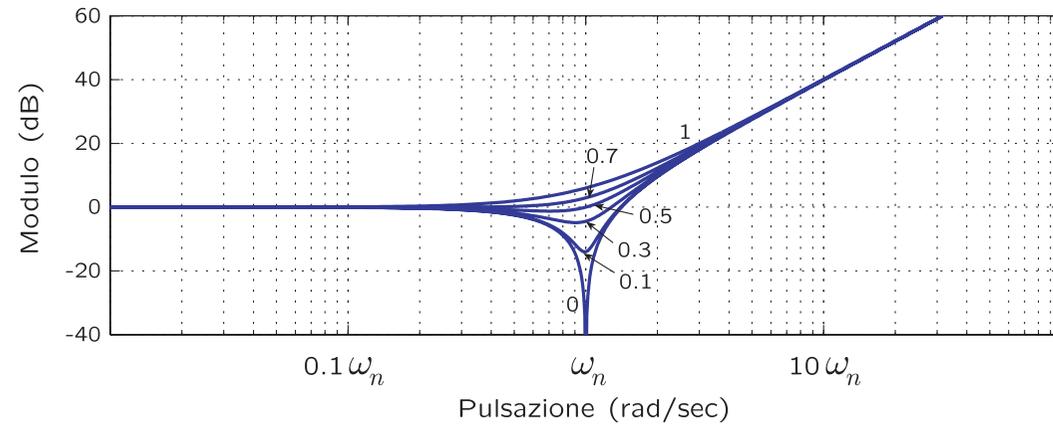
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Fattore Trinomio a numeratore $\zeta \geq 0$

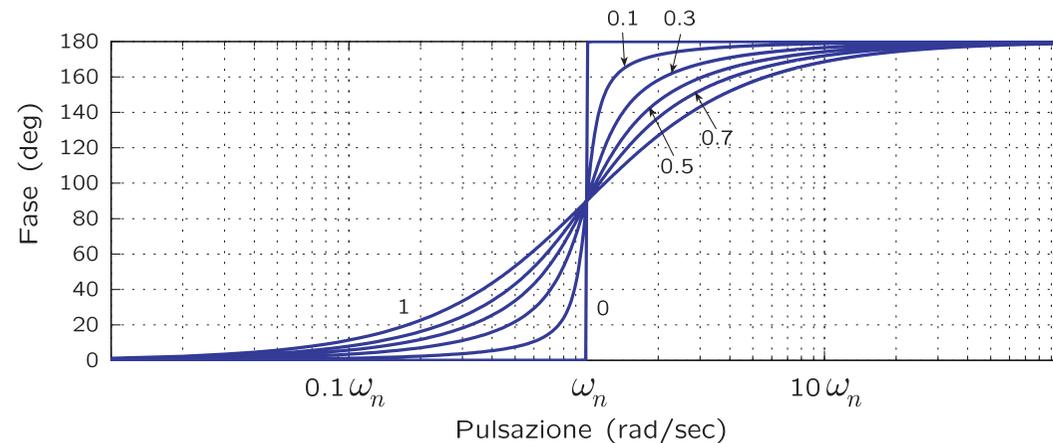
Nel piano complesso



Modulo
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)



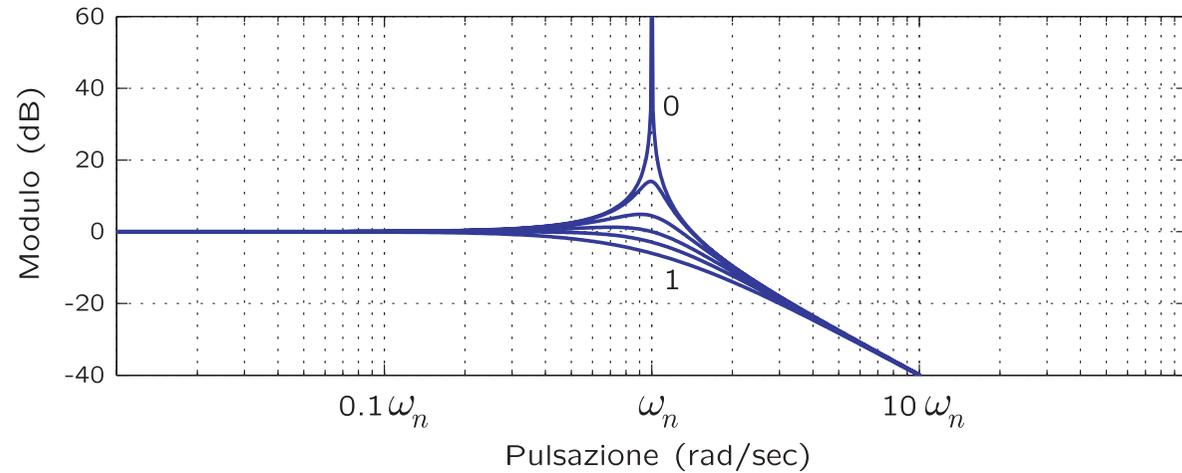
Fase
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)



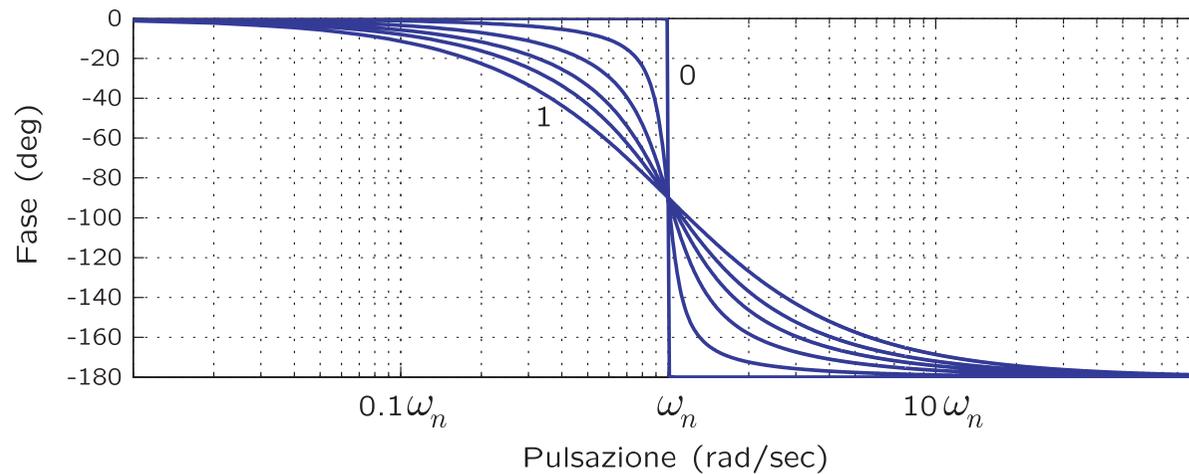
Fattore Trinomio a denominatore $\zeta \geq 0$

Dalle proprietà del modulo in dB e della fase

Modulo
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)

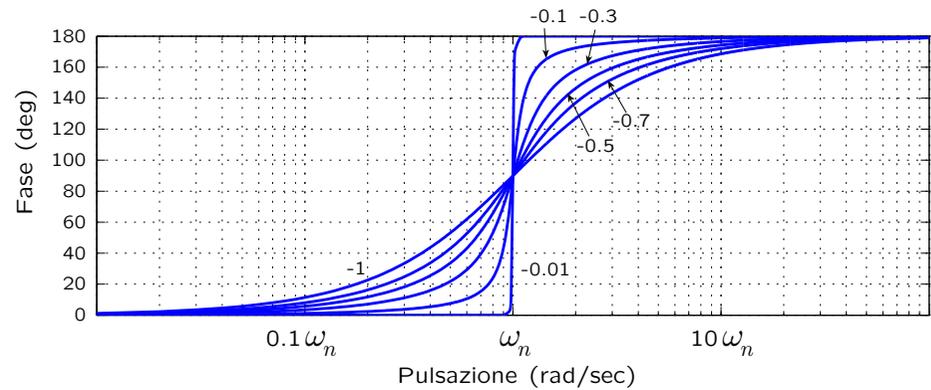
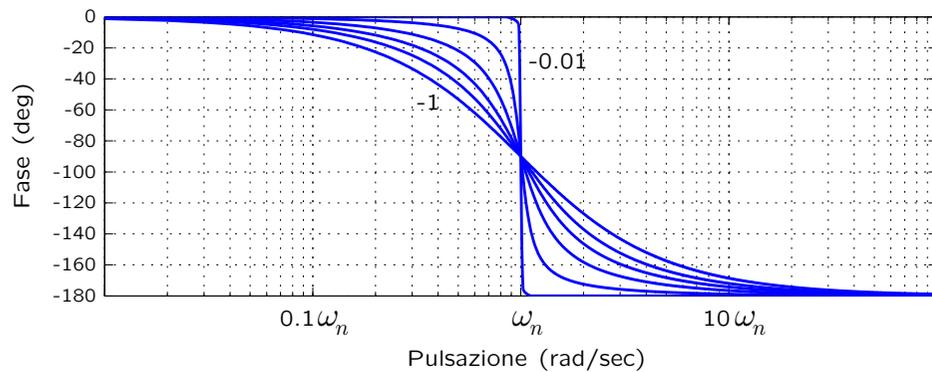
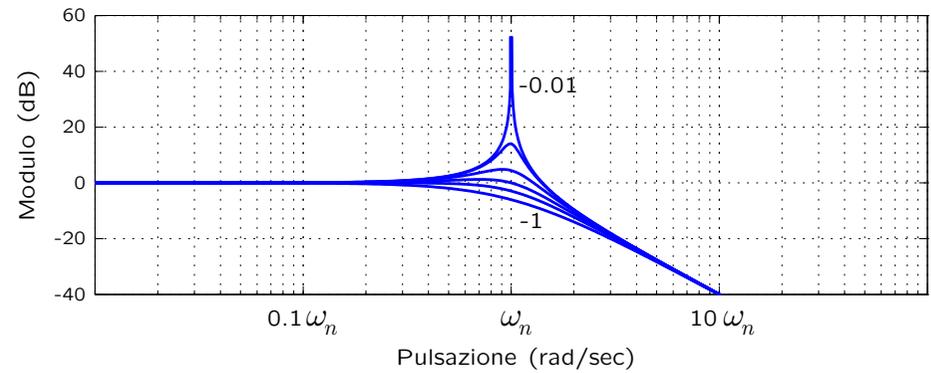
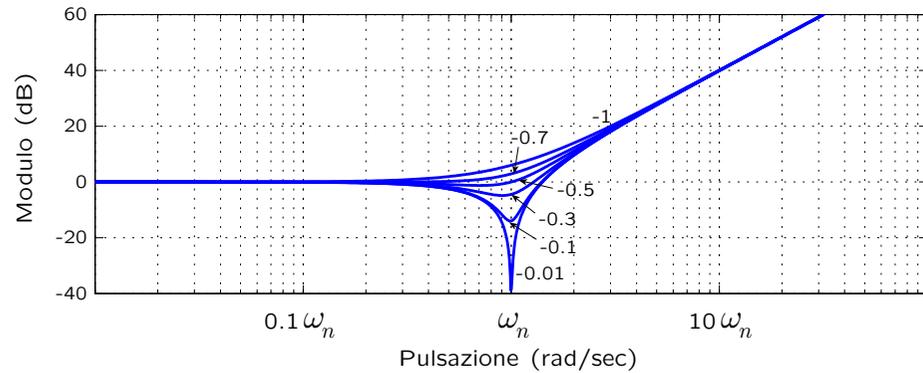


Fase
(al variare di $0 \leq \zeta \leq 1$)



Fattore Trinomio a numeratore/denominatore $\zeta < 0$

Modulo non cambia, fase cambia di segno



Trinomio a Numeratore

$$-1 \leq \zeta < 0$$

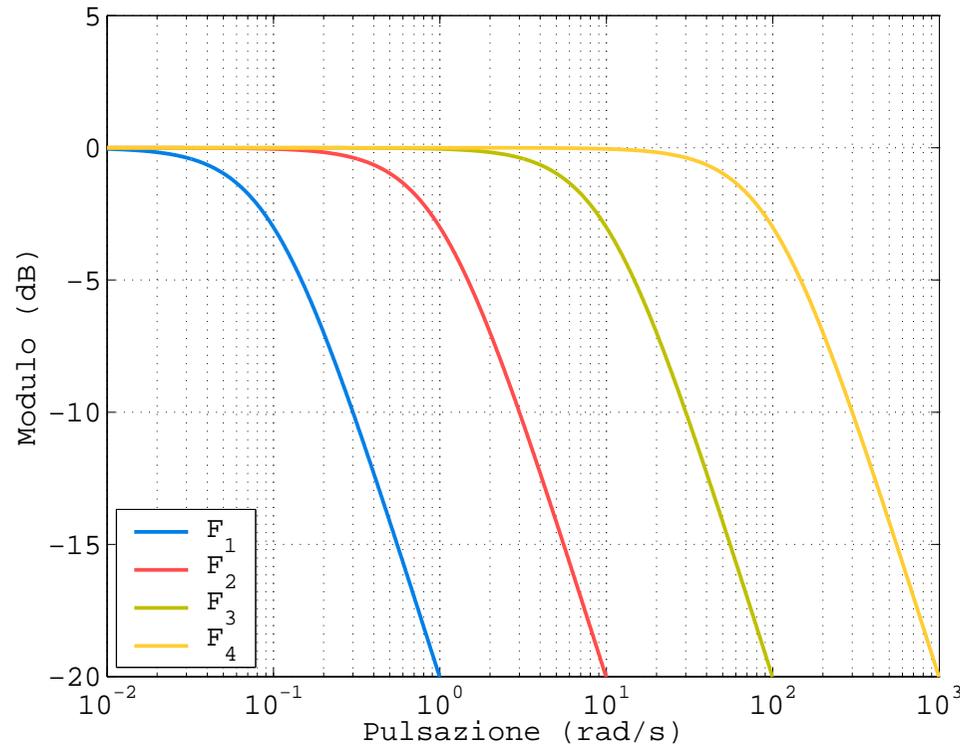
Trinomio a Denominatore

$$-1 \leq \zeta < 0$$

Sistema come filtro

Siano 4 sistemi con stesso guadagno e pulsazione di rottura diversa

$$F_1(s) = \frac{1}{1 + 10s}, \quad F_2(s) = \frac{1}{1 + s}, \quad F_3(s) = \frac{1}{1 + 0.1s}, \quad F_4(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}$$



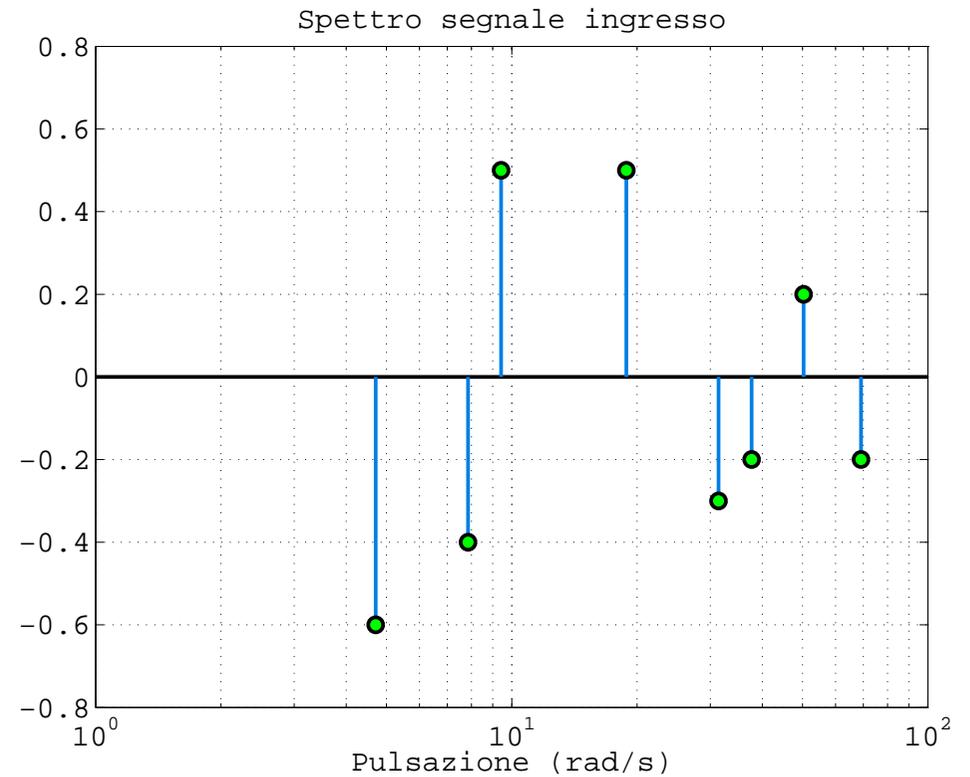
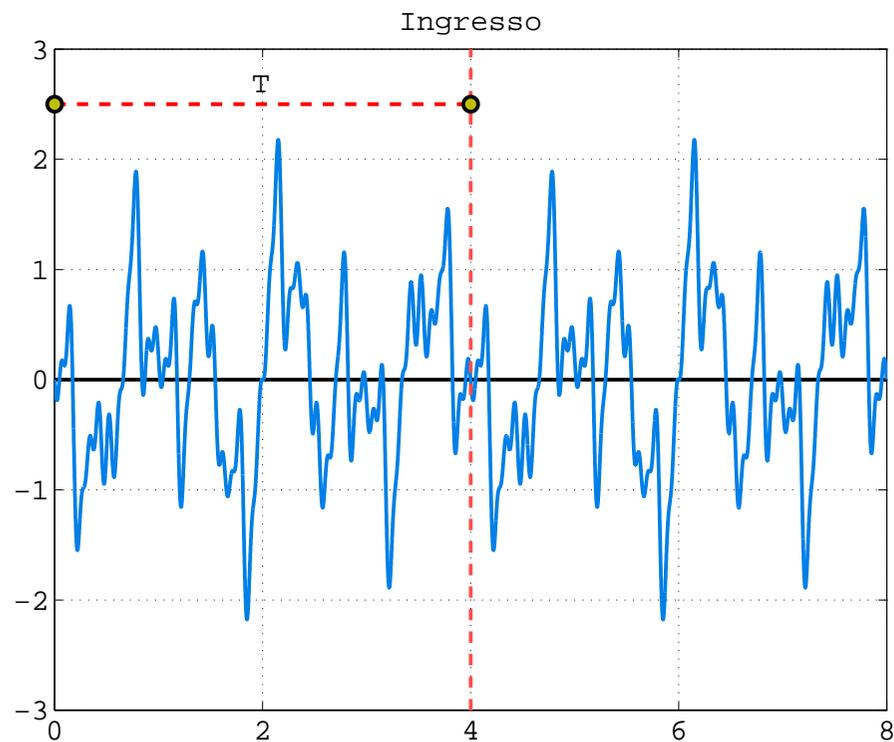
e l'ingresso combinazione lineare di segnali sinusoidali a diverse pulsazioni

$$u(t) = -0.6 \sin(f_1 t) - 0.4 \sin(f_2 t) + 0.5 \sin(f_3 t) + 0.5 \sin(f_4 t) - 0.3 \sin(f_5 t) - 0.2 \sin(f_6 t) + 0.2 \sin(f_7 t) - 0.2 \sin(f_8 t)$$

$$f_1 = 2\pi 0.75, \quad f_2 = 2\pi 1.25, \quad f_3 = 2\pi 1.5, \quad f_4 = 2\pi 3, \quad f_5 = 2\pi 5, \quad f_6 = 2\pi 6, \quad f_7 = 2\pi 8, \quad f_8 = 2\pi 11$$

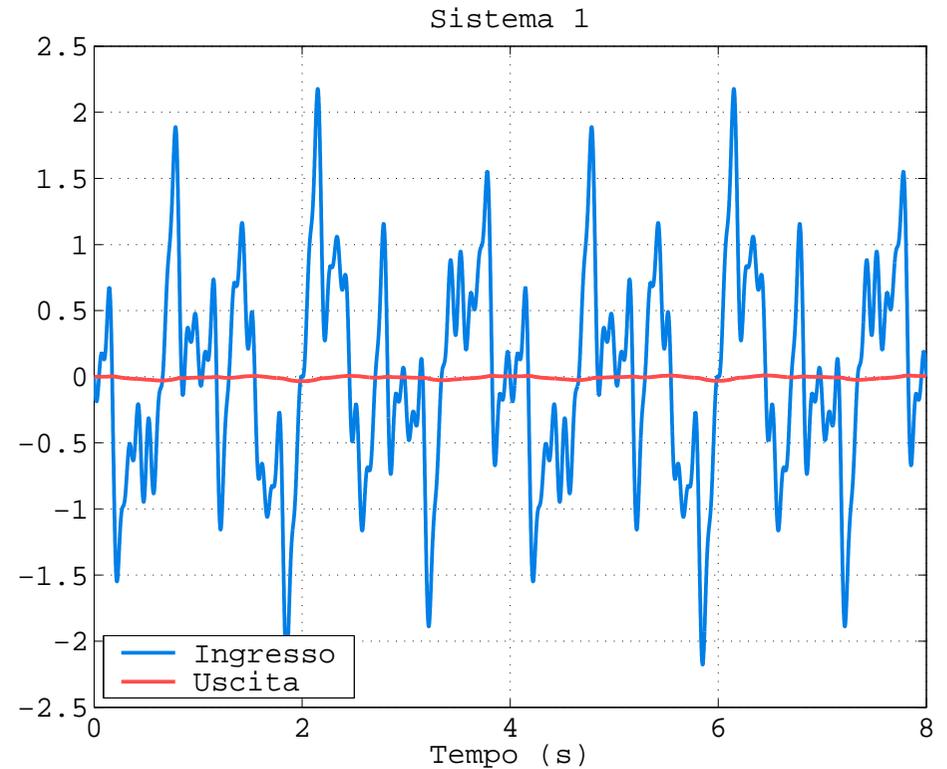
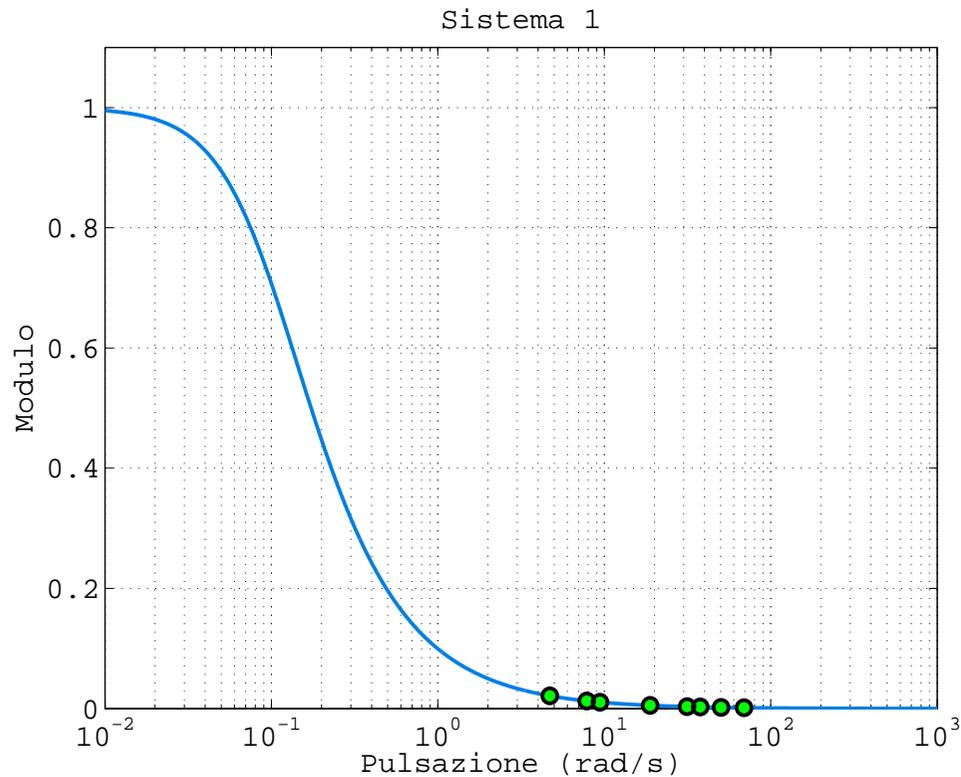
Sistema come filtro

Ingresso ha l'andamento nel tempo periodico con periodo $T = 4$ s mentre la sua rappresentazione spettrale (nel dominio della frequenza) mette in evidenza i contributi dei singoli segnali sinusoidali.



Sistema come filtro – Sistema 1

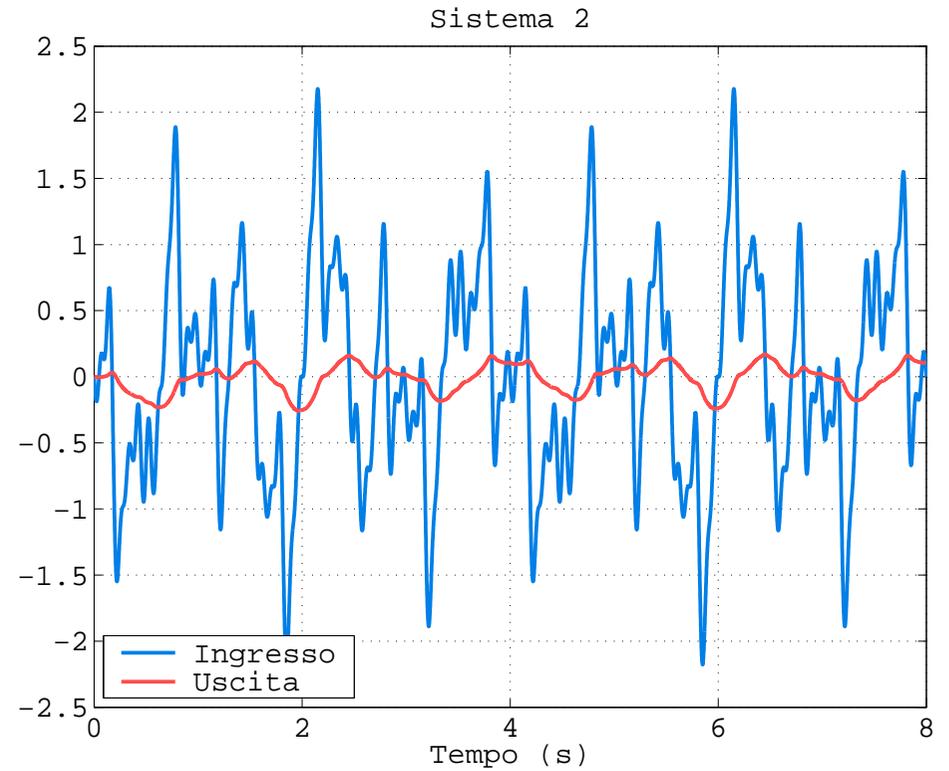
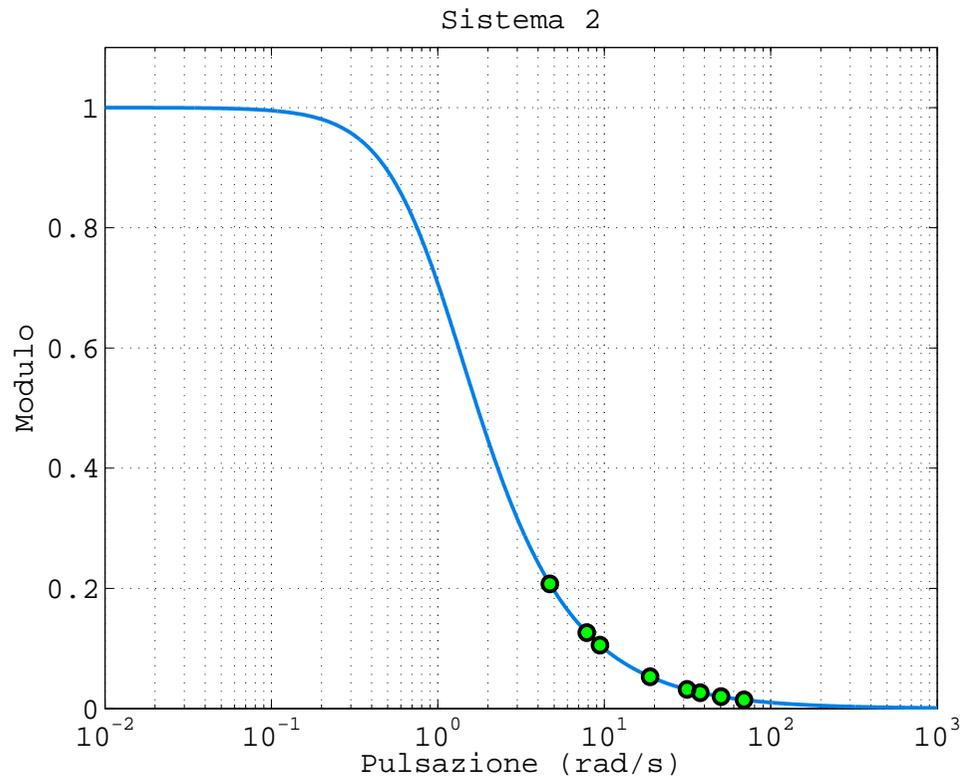
Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



Sono evidenziati i valori del modulo alle diverse pulsazioni del segnale in ingresso.

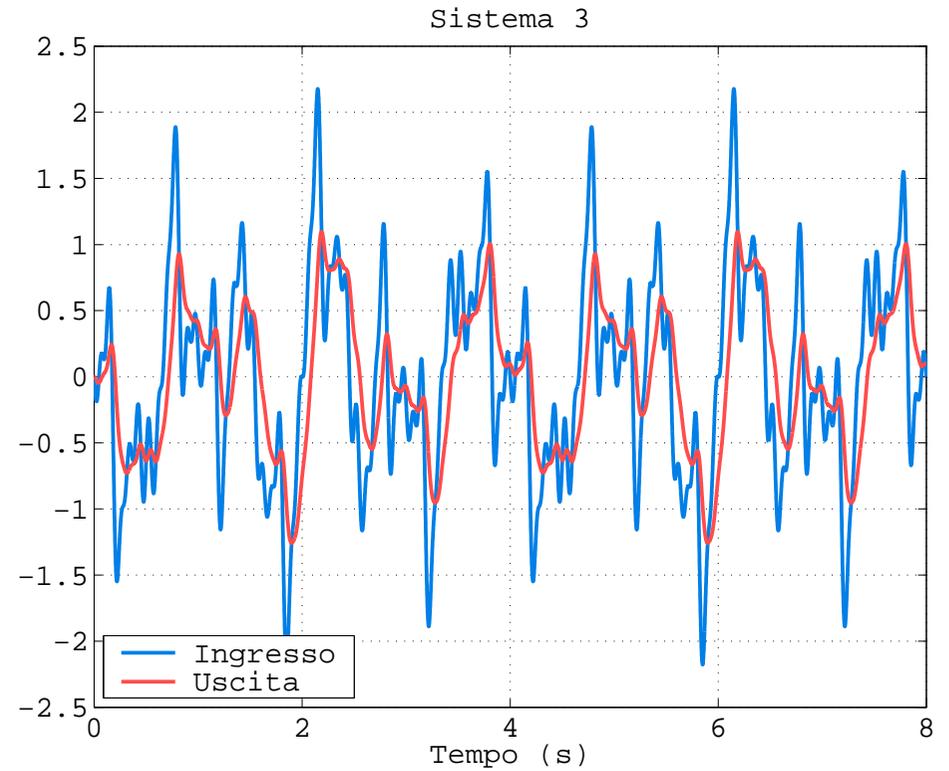
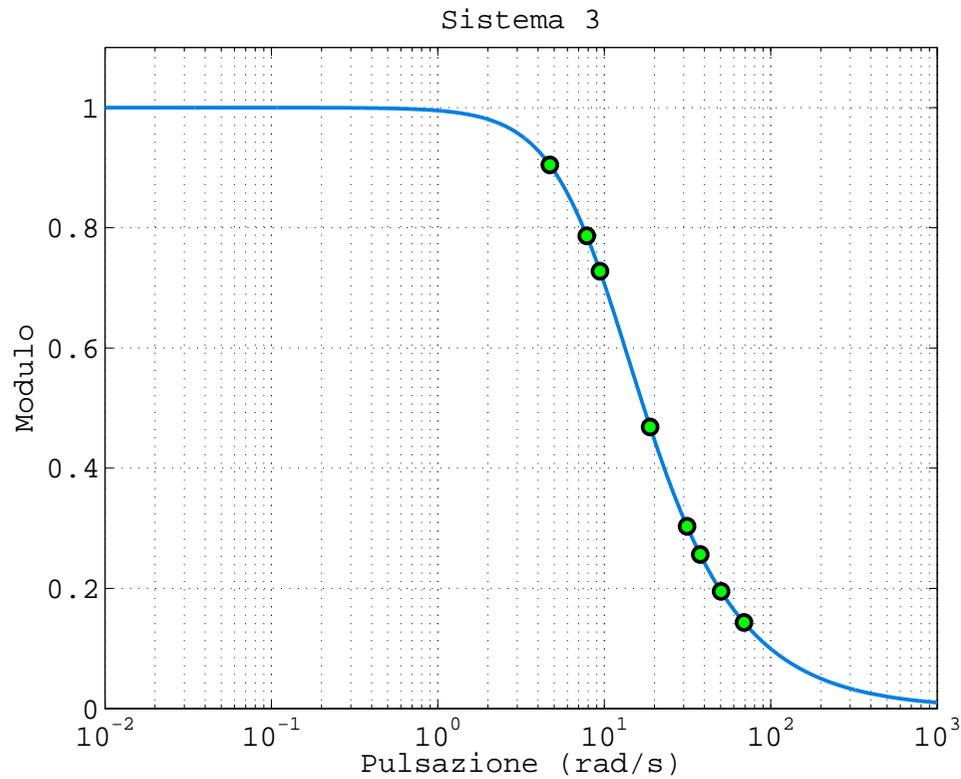
Sistema come filtro – Sistema 2

Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



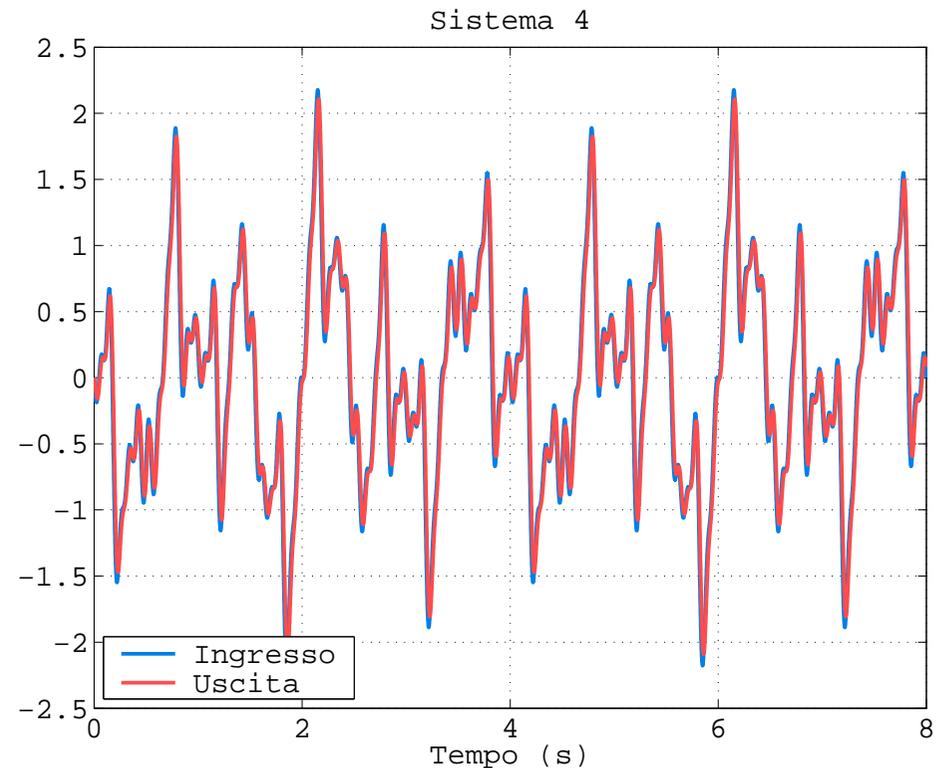
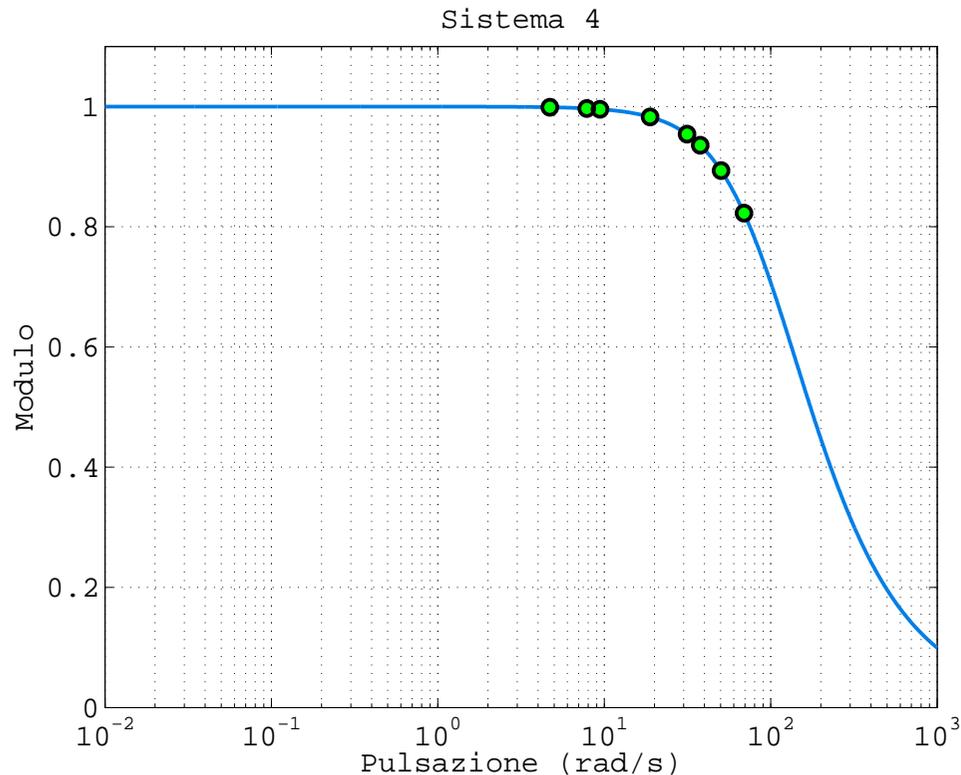
Sistema come filtro – Sistema 3

Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



Sistema come filtro – Sistema 4

Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo

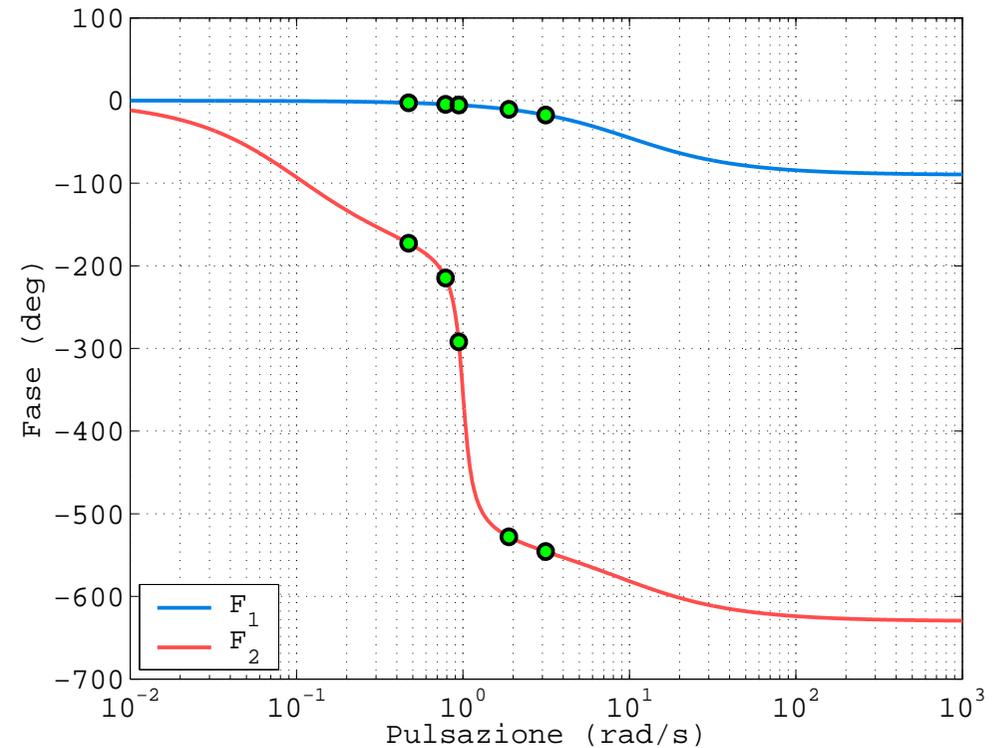
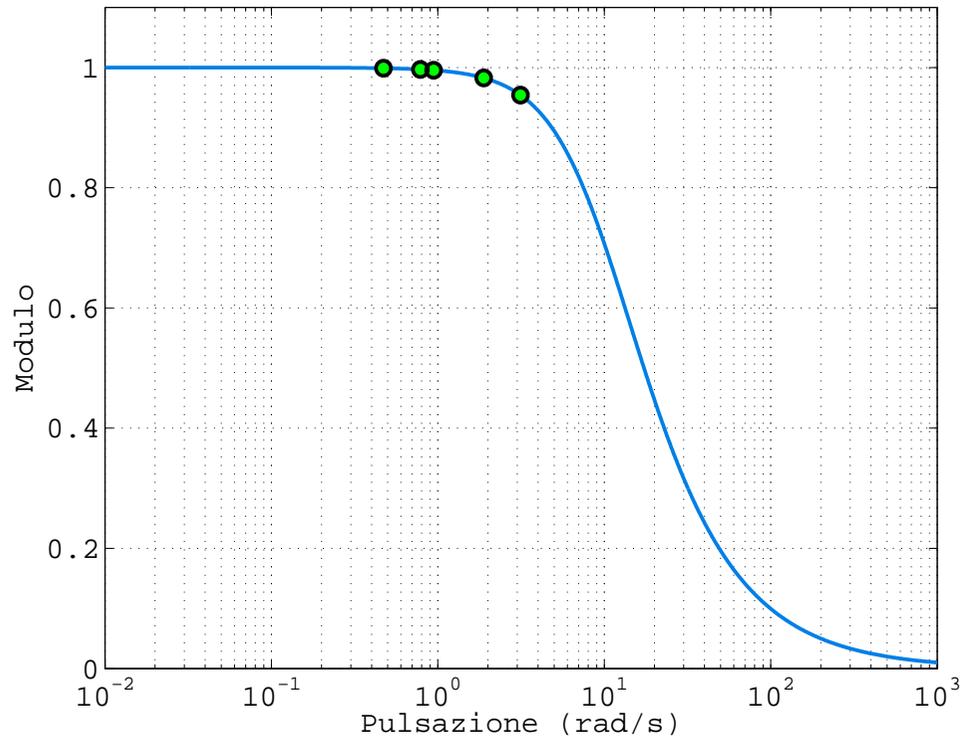


All'aumentare della pulsazione di rottura il sistema filtra sempre di meno il segnale in ingresso e l'uscita, a regime permanente, diventa sempre più simile all'ingresso.

Sistema come filtro

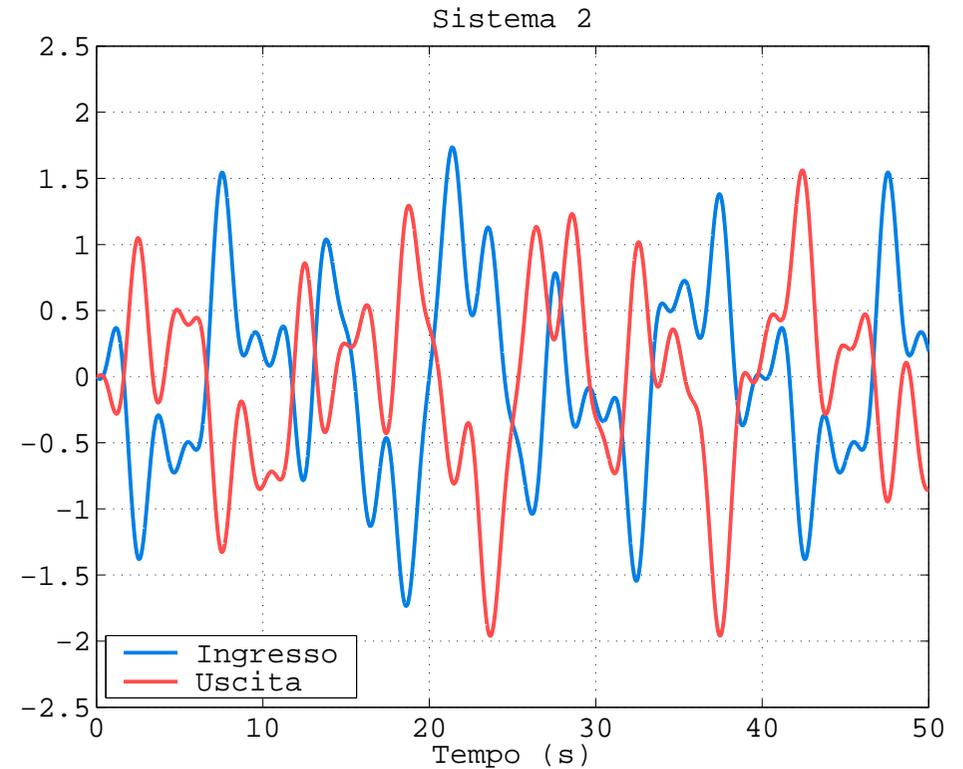
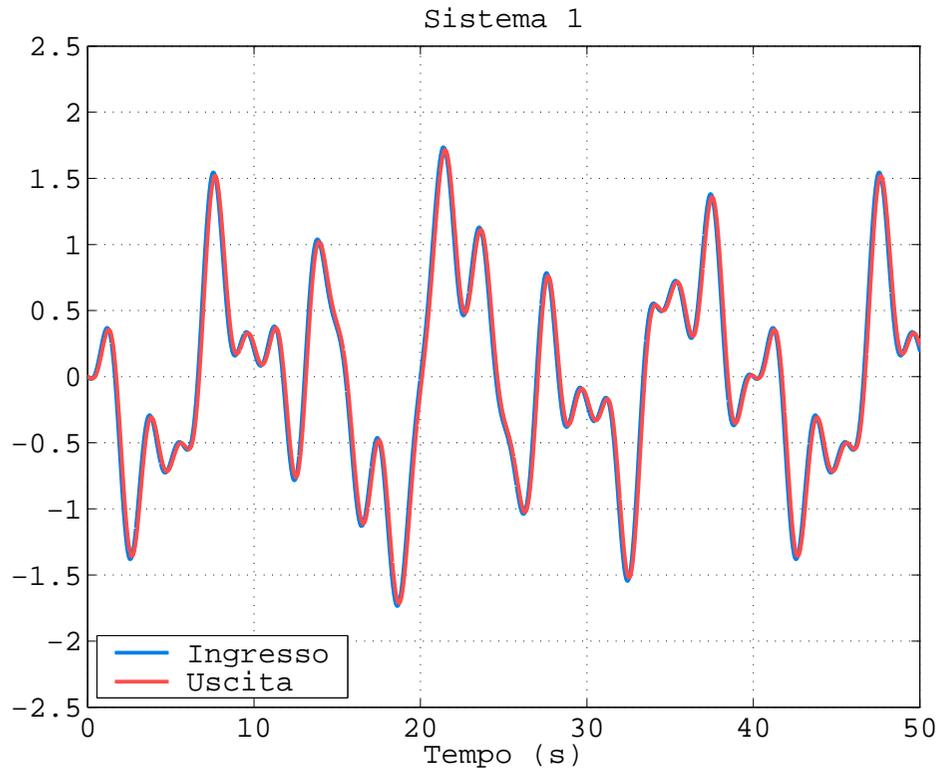
Attenzione – La capacità di un sistema di riprodurre fedelmente un dato segnale in uscita dipende anche dalla fase.

Ad esempio, si considerino due sistemi F_1 e F_2 con diagrammi del modulo (non in dB) uguali ma fase notevolmente diversa



Sistema come filtro

Le corrispondenti uscite relative allo stesso ingresso, causa lo sfasamento introdotto dal sistema F_2 , differiscono notevolmente!

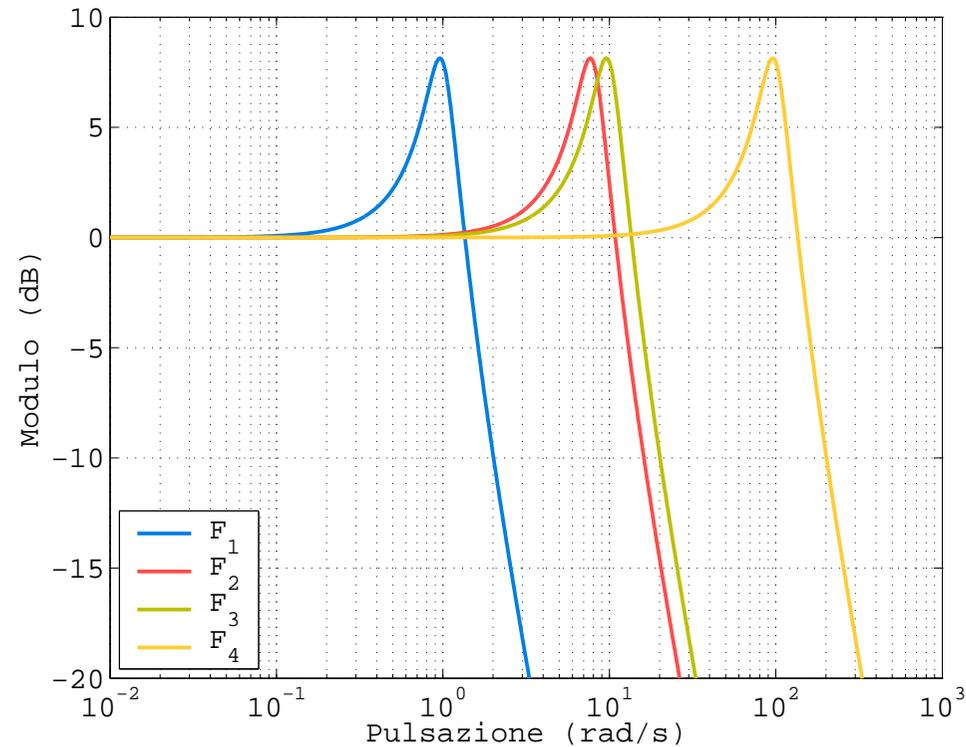


Sistema come filtro

Siano 4 sistemi con stesso guadagno e pulsazione naturale diversa

$$F(s) = \frac{1}{(1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)}$$

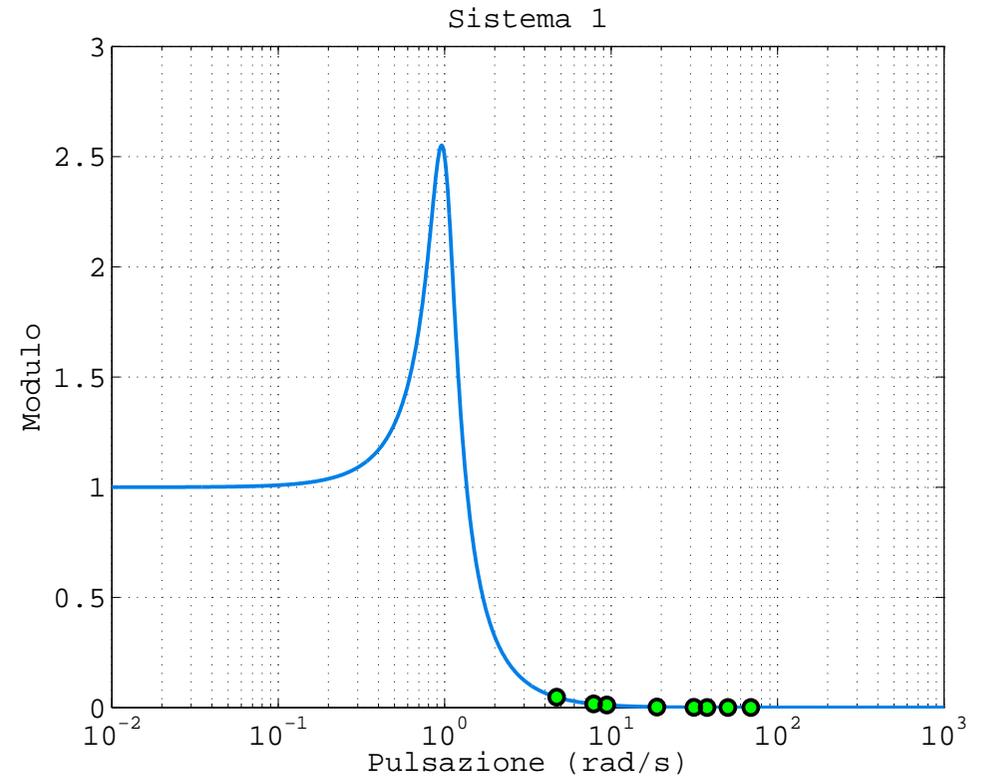
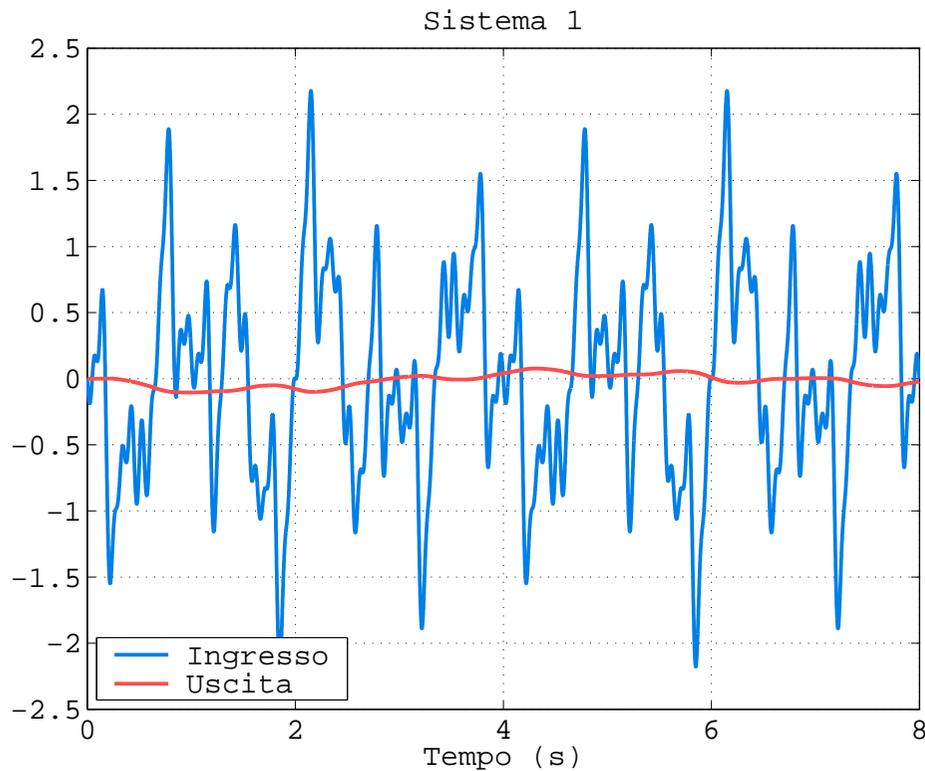
con $\zeta = 0.2$ e $\omega_n = \{1, 8, 10, 100\}$



e lo stesso ingresso dell'esempio precedente.

Sistema come filtro – Sistema 1

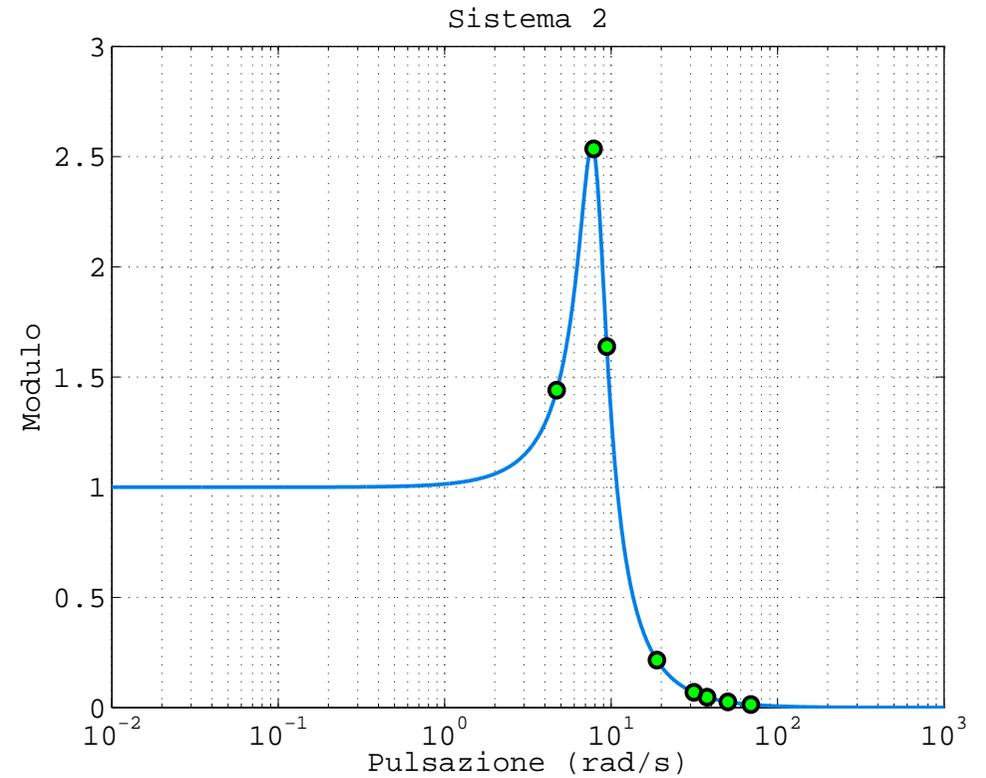
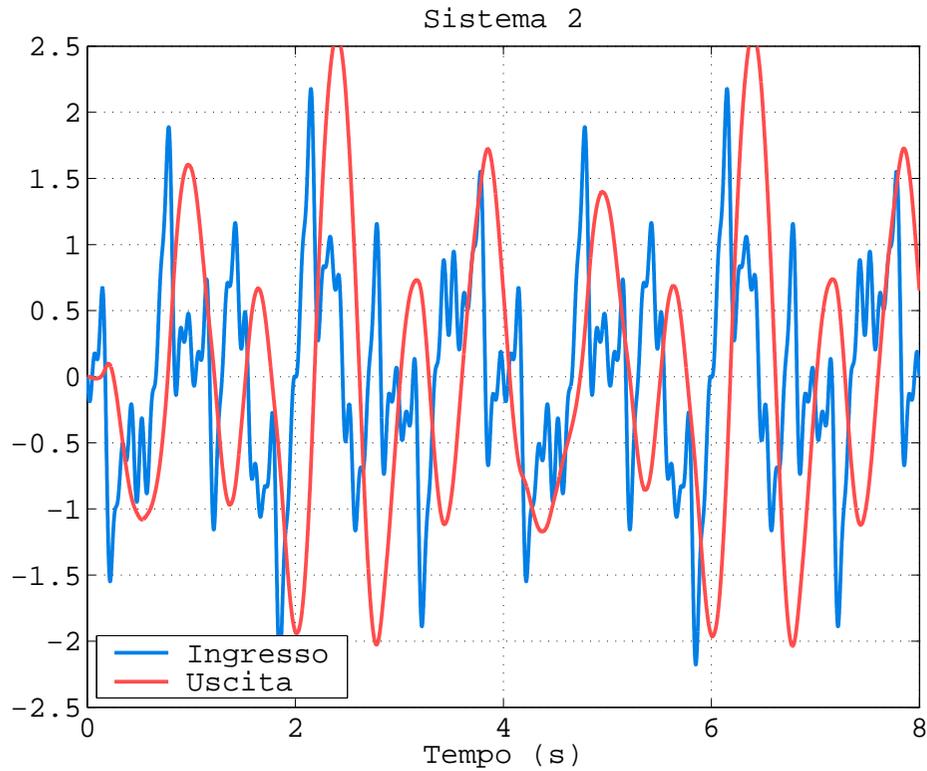
Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



Sono evidenziati i valori del modulo alle diverse pulsazioni del segnale in ingresso.

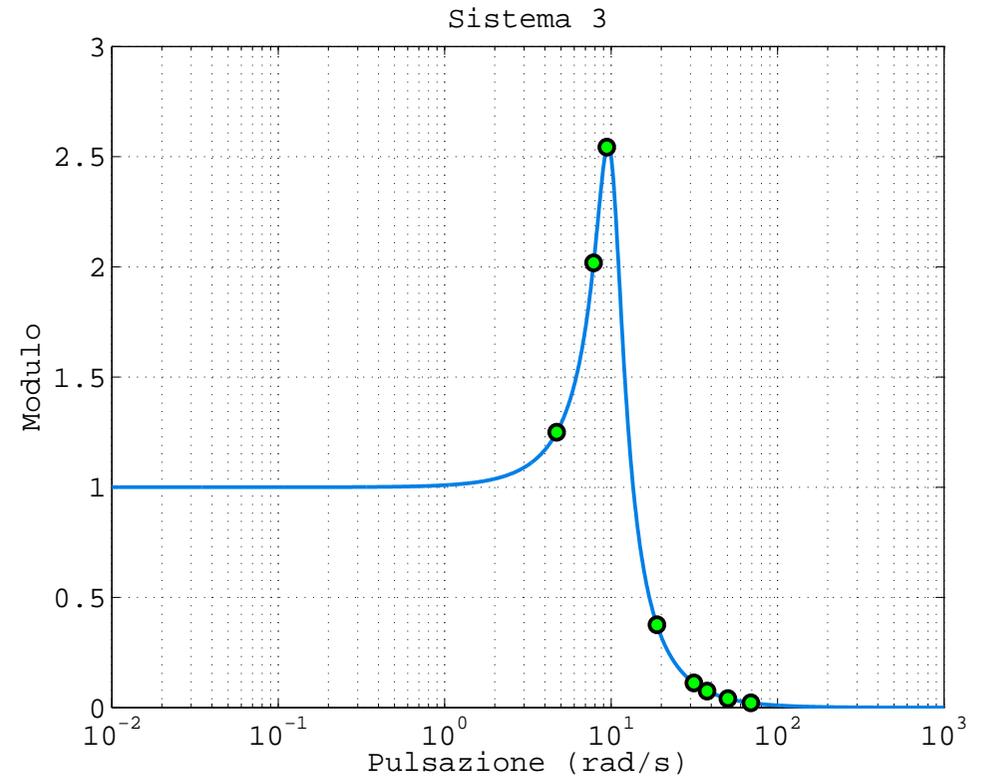
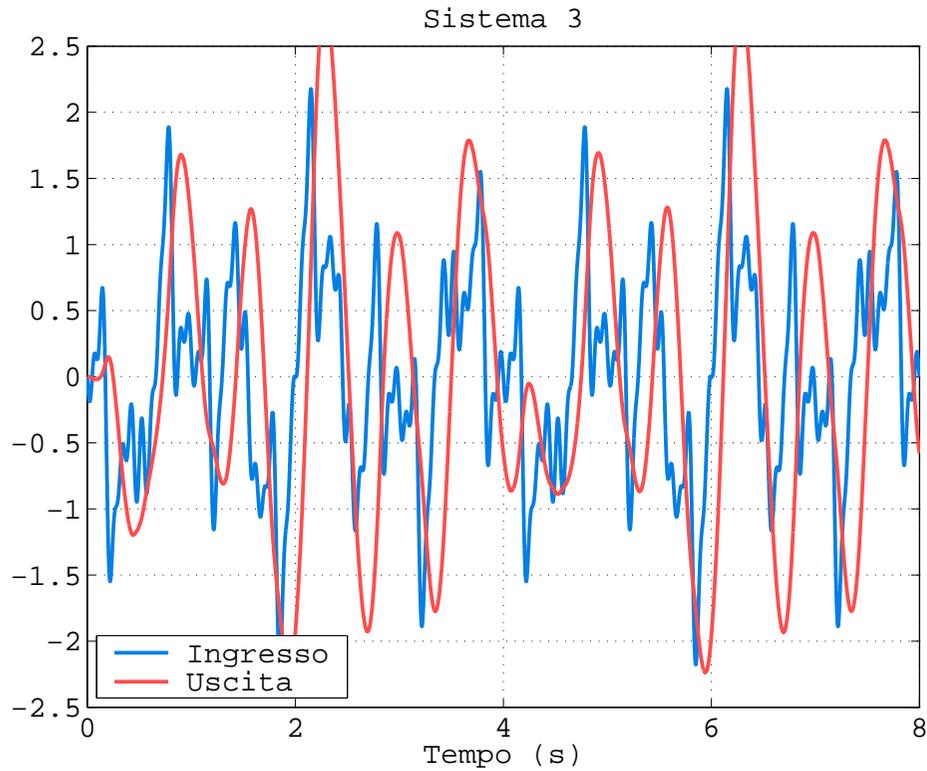
Sistema come filtro – Sistema 2

Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



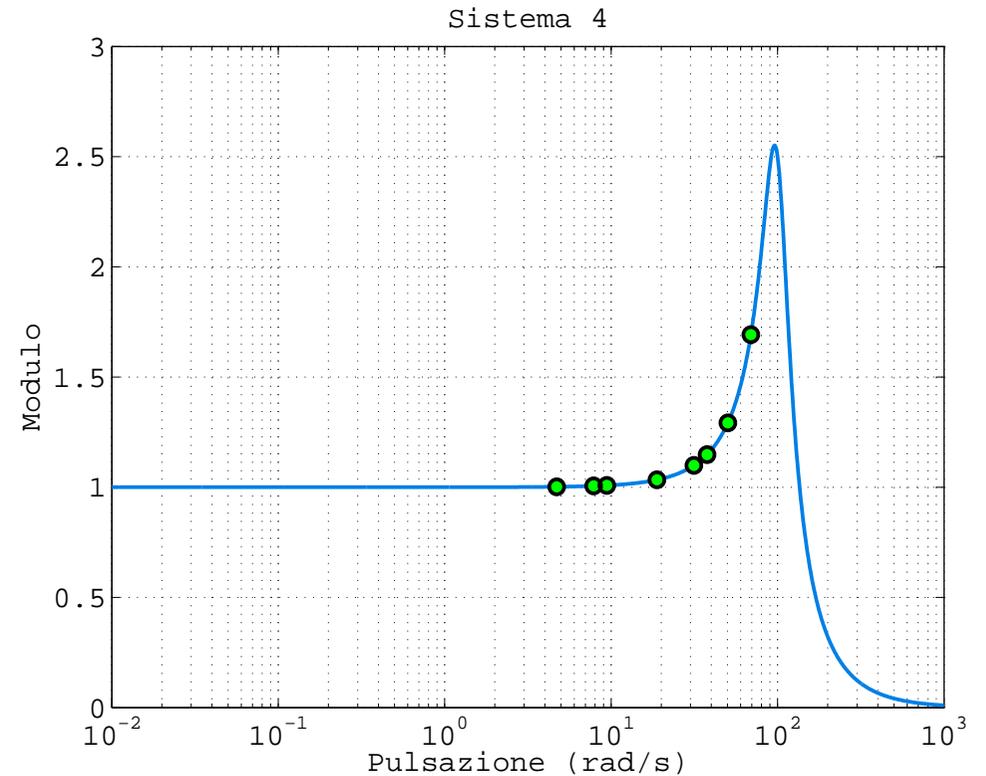
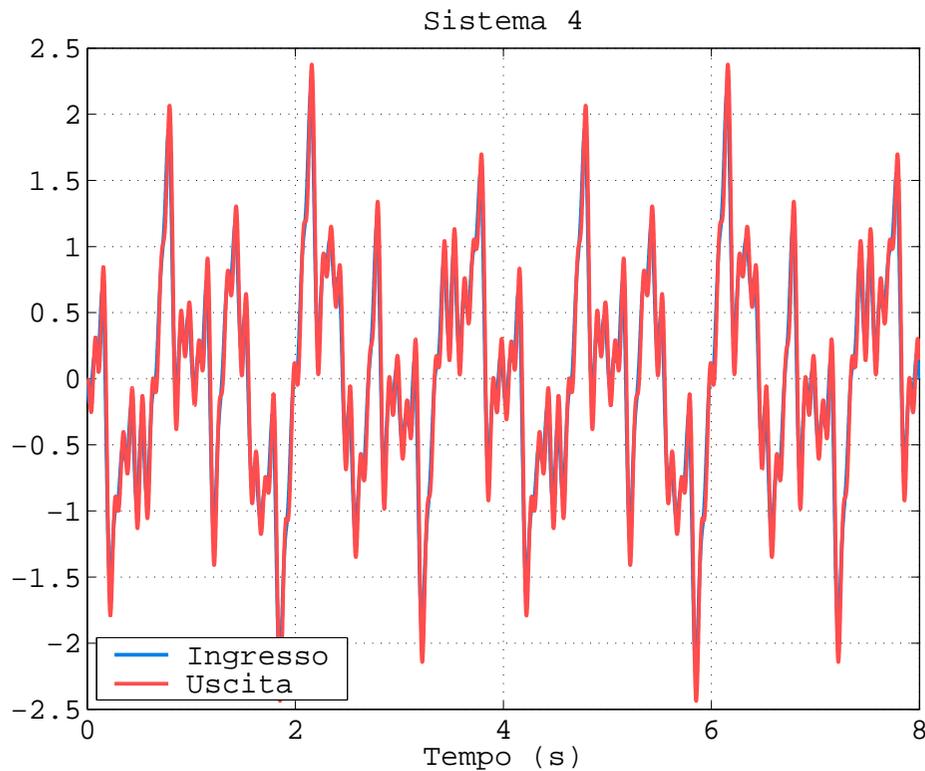
Sistema come filtro – Sistema 3

Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



Sistema come filtro – Sistema 4

Diagramma del modulo (non in dB) e risposta in uscita nel tempo



All'aumentare della pulsazione naturale e quindi della pulsazione di risonanza, variano le capacità filtranti del sistema.

Sistema come filtro – Sistema 3

Confronto tra il segnale ricostruito dalla risposta armonica (a regime permanente) e il segnale in uscita. La differenza è il transitorio.

