Fondamenti di Automatica

Doppio carrello

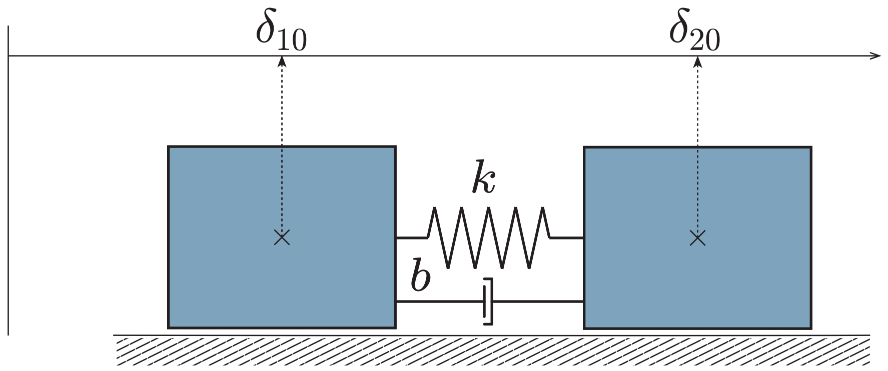
Prof. Leonardo Lanari
DIS, Università di Roma "La Sapienza"

Ultima modifica – March 6, 2008

Doppio carrello

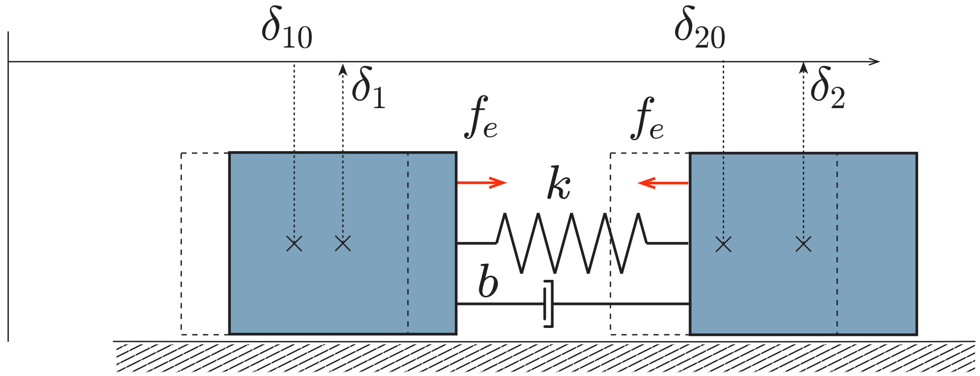
Parametri

- k costante elastica (Ipotesi: legame lineare forza/scostamento)
- b coefficiente di smorzamento (Ipotesi: legame lineare forza/velocità)
- m_1 e m_2 masse dei due carrelli



Situazione di equilibrio (statica) senza forze esterne applicate ai carrelli.

Doppio carrello



Forze

- $F_{e1} = -k(\delta_1(t) - \delta_{10} - \delta_2(t) + \delta_{20})$ forza elastica sulla massa 1
- $F_{e2} = -k(\delta_1(t) - \delta_{10} - \delta_2(t) + \delta_{20})$ forza elastica sulla massa 2
- $F_{a1} = -b(\dot{\delta}_1(t) - \dot{\delta}_2(t))$ forza d'attrito viscoso sulla massa 1
- $F_{a2} = b(\dot{\delta}_1(t) - \dot{\delta}_2(t))$ forza d'attrito viscoso sulla massa 2
- $f_e(t)$ forza esterna
  (caso particolare: agisce con la stessa intensità ma in direzioni opposte sui singoli carrelli)

Doppio carrello

Equazioni della dinamica

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{\delta}_1(t) &= -k[\delta_1(t) - \delta_{10} - \delta_2(t) + \delta_{20}] - b[\dot{\delta}_1(t) - \dot{\delta}_2(t)] + f_e(t) \\
m_2\ddot{\delta}_2(t) &= k[\delta_1(t) - \delta_{10} - \delta_2(t) + \delta_{20}] + b[\dot{\delta}_1(t) - \dot{\delta}_2(t)] - f_e(t)
\end{aligned}
$$

Possibile scelta del vettore di stato $x(t)$

$$
x(t) = \begin{pmatrix} \text{posizioni} \\ \text{velocità} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right. \\ \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right. \end{matrix} \begin{pmatrix} \delta_1(t) - \delta_{10} \\ \delta_2(t) - \delta_{20} \\ \dot{\delta}_1(t) \\ \dot{\delta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}
$$

Ingresso

$$
u(t) = f_e(t)
$$

Sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -k[x_1(t) - x_2(t)] - b[x_3(t) - x_4(t)] + u(t) \\
\dot{x}_4(t) &= k[x_1(t) - x_2(t)] + b[x_3(t) - x_4(t)] - u(t)
\end{aligned}
$$

Doppio carrello

In forma matriciale

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & -b/m_1 & b/m_1 \\ k/m_2 & -k/m_2 & b/m_2 & b/m_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ -1/m_2 \end{pmatrix} u(t)$$

e cioè

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & -b/m_1 & b/m_1 \\ k/m_2 & -k/m_2 & b/m_2 & b/m_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ -1/m_2 \end{pmatrix}$$

Evoluzione temporale di $x(t)$ non evidente.

Doppio carrello: nuove coordinate

Scegliamo le nuove coordinate:

- centro di massa (variazione)

$$\delta_b(t) = \underbrace{\frac{m_1\delta_1(t) + m_2\delta_2(t)}{m_1 + m_2}}_{\substack{\text{posizione centro} \\ \text{di massa}}} - \underbrace{\frac{m_1\delta_{10} + m_2\delta_{20}}{m_1 + m_2}}_{\substack{\text{posizione centro} \\ \text{di massa a riposo}}}$$

- scostamento relativo (variazione)

$$\delta_s(t) = \underbrace{\delta_2(t) - \delta_1(t)}_{\text{scostamento}} - \underbrace{(\delta_{20} - \delta_{10})}_{\substack{\text{scostamento} \\ \text{a riposo}}}$$

e le loro derivate ($n = 4$ in totale)

Doppio carrello: nuove coordinate

Ponendo $M = m_1 + m_2$ si hanno i seguenti legami con le vecchie coordinate

- centro di massa (variazione)

$$
\begin{aligned}
\delta_b(t) &= \frac{m_1[\delta_1(t) - \delta_{10}] + m_2[\delta_2(t) - \delta_{20}]}{M} = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{M} \\
\dot{\delta}_b(t) &= \frac{m_1 \dot{x}_1(t) + m_2 \dot{x}_2(t)}{M} = \frac{m_1 x_3(t) + m_2 x_4(t)}{M}
\end{aligned}
$$

- scostamento relativo (variazione)

$$
\begin{aligned}
\delta_s(t) &= [\delta_2(t) - \delta_{20}] - [\delta_1(t) - \delta_{10}] = x_2(t) - x_1(t) \\
\dot{\delta}_s(t) &= \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) = x_4(t) - x_3(t)
\end{aligned}
$$

In forma matriciale

$$
z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_b(t) \\ \delta_s(t) \\ \dot{\delta}_b(t) \\ \dot{\delta}_s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1/M & m_2/M & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1/M & m_2/M \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = Tx
$$

con T non singolare

Doppio carrello: nuove coordinate

Nelle nuove coordinate, ponendo

$$H = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = H$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1(t) &= 0 \\ \ddot{z}_2(t) &= -kHz_2(t) - Hu(t) \end{aligned}$$

- $\ddot{z}_1(t) = 0$ dinamica del centro di massa, note le condizioni iniziali $z_1(0)$ e $\dot{z}_1(0) = z_2(0)$, si ha, integrando due volte

$$z_1(t) = \dot{z}_1(0)t + z_1(0)$$

  - Dinamica indipendente da z_2 e $\dot{z}_2$ e viceversa (dinamiche di z_1 e z_2 disaccoppiate)
  - L'ingresso (caso particolare) non influenza l'evoluzione di z_1 (centro di massa). Se si sollecita il doppio carrello con un andamento qualsiasi dell'ingresso partendo da condizioni iniziali $z_1(0) = \dot{z}_1(0) = 0$ e si misura l'andamento di $z_1(t)$, non si osserva alcun movimento (anche se i due carrelli si muovono).

Doppio carrello: nuove coordinate

- La seconda equazione descrive la dinamica dello scostamento relativo dei due carrelli. Nel caso particolare di assenza di forzamento ($u(t) \equiv 0$), essendo $kH > 0$, si può definire

$$\omega_n^2 = kH$$

e riscrivere l'equazione nella forma

$$\ddot{z}_2(t) = -kH z_2(t) = -\omega_n^2 z_2(t)$$

Note le condizioni iniziali $z_2(0)$ e $\dot{z}_2(0) = z_4(0)$, si può ricercare la soluzione nella classe

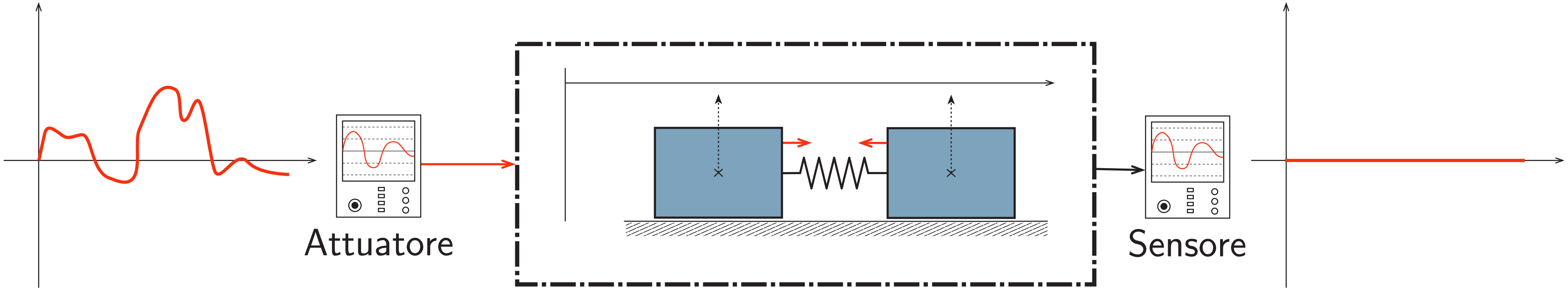
$$z_2(t) = c_1 \sin \omega_n t + c_2 \cos \omega t$$

Dalle condizioni iniziali

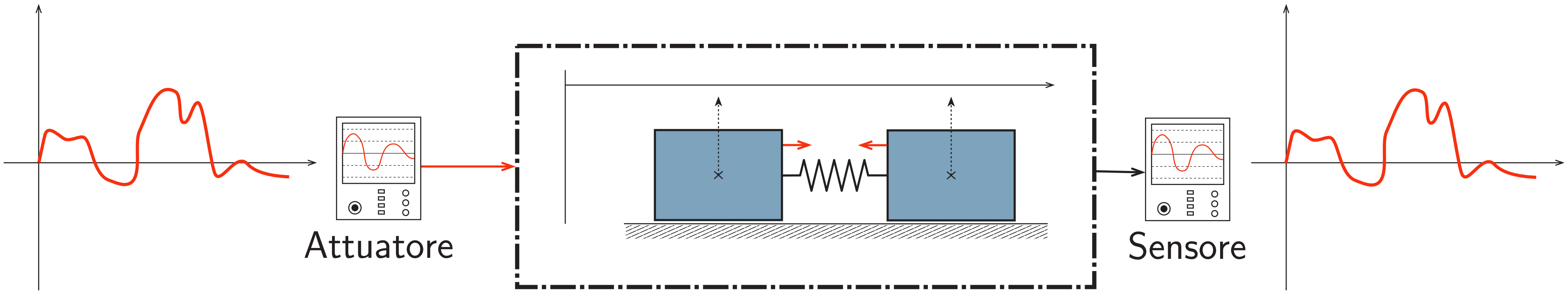
$$\left.\begin{array}{rcl} z_2(0) & = & c_2 \\ \dot{z}_2(0) & = & c_1 \omega_n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} c_1 & = & \dot{z}_2(0)/\omega_n \\ c_2 & = & z_2(0) \end{array}\right.$$

Doppio carrello

Partendo da condizioni iniziali $z_1(0)$ e $z_2(0)$ nulle e misurando $z_1(t)$



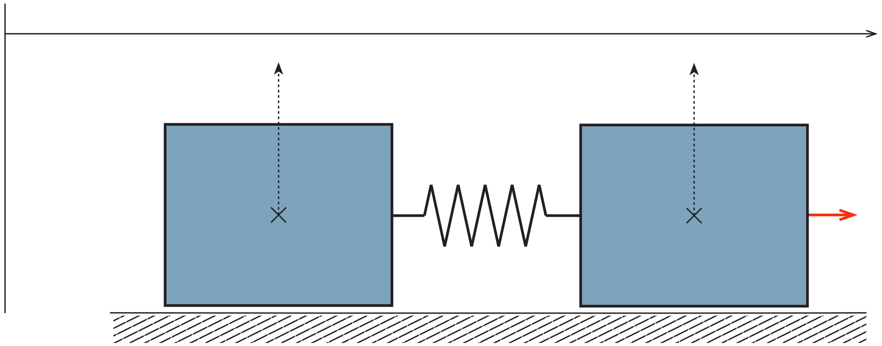
In generale invece

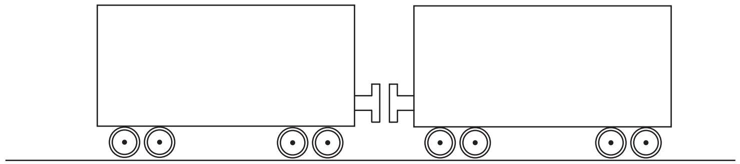


Doppio carrello

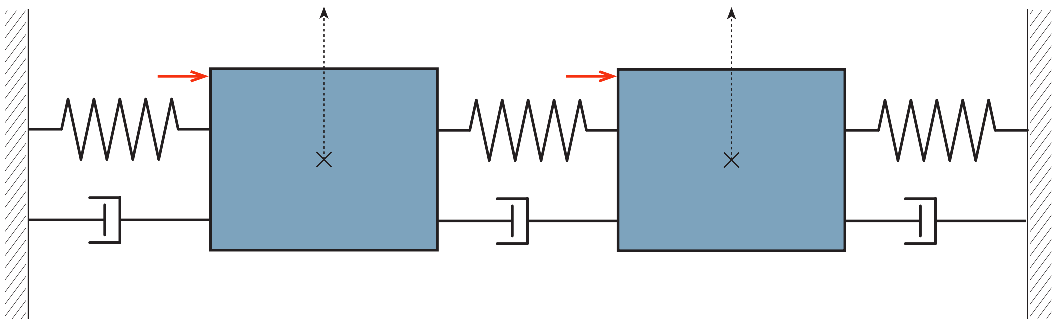
Estensioni

convoglio



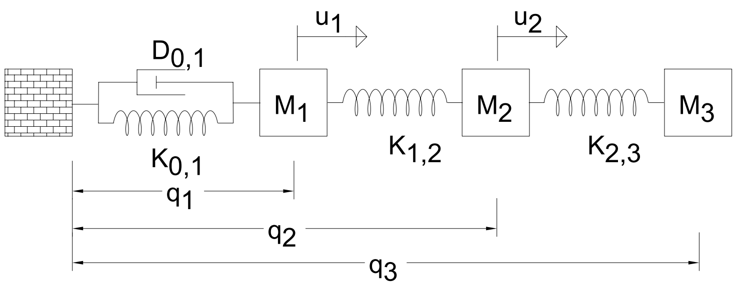


generale 2 masse

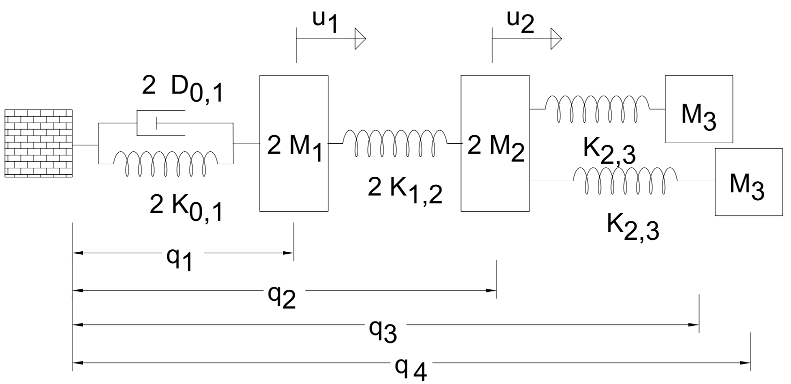


Doppio carrello

Estensioni



(a)



(b)