Esercizi proposti di Fondamenti di Automatica - Parte 1

17 Febbraio 2005

Es. 1) Individuare i modi naturali del sistema caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es. 2) Calcolare l'evoluzione libera nello stato e in uscita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

a partire da

$$x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es. 3) Calcolare l'evoluzione libera nello stato per il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a partire da

$$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es. 4) Dato il sistema descritto da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_3(t) \end{aligned}$$

(a) Determinare la rappresentazione con spazio di stato (A, B, C, D);

(b) Determinare i modi naturali;

(c) Calcolare l'evoluzione libera nello stato e nell'uscita a partire dallo stato iniziale

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1$$

Es. 5) Determinare, se esistono, gli stati iniziali del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

a partire dai quali l'evoluzione libera in uscita non diverge. Spiegare il risultato ottenuto.

Es. 6) Dato il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t)$$

determinare per quali valori dello stato iniziale l'evoluzione libera rimane costante.

Es. 7) Individuare una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema la cui dinamica è descritta dalla seguente equazione differenziale

$$3\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) - u(t) = 0.$$

con $y(t)$ l'uscita e $u(t)$ l'ingresso del sistema.

Bozze di soluzione di
"Esercizi proposti di Fondamenti di Automatica - Parte 1"

Sol. 1) Matrice diagonale a blocchi, autovalori di A sono l'unione degli autovalori delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = \lambda_2^* = -i$ (il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$) $\Rightarrow$ i modi naturali sono

$$e^{\lambda_1 t} = e^t, \quad \sin t, \quad (\cos t)$$

Sol. 2) Polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3) \Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Autovettore relativo a $\lambda_1 = -1$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

o un vettore ad esso parallelo. Autovettore relativo a $\lambda_2 = -3$,

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o un vettore ad esso parallelo. Si pone $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$,

$$U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}$$

Forma spettrale dell'esponenziale

$$\begin{aligned}
x_\ell(t) = e^{At}x(0) &= \left(e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t}u_2 v_2^T\right) x(0) \\
&= \left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}
\end{aligned}$$

mentre

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x(0) = Cx_\ell(t) = e^{-t} + 3e^{-3t}$$

In alternativa, individuare c_1 e c_2 t.c.

$$x(0) = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

e quindi (essendo $v_i^T u_j = \delta_{ij}$ e c_1, c_2 scalari)

$$\begin{aligned}
e^{At}x(0) &= \left(e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t}u_2 v_2^T\right) x(0) \\
&= \left(e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t}u_2 v_2^T\right)(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\
&= c_1 e^{\lambda_1 t}u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}u_2
\end{aligned}$$

Sol. 3) Autovalori e relativi autovettori

$$\lambda_1 = 1 \to u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \to u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 2 \to u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che $x(0) = au_1$ e pertanto l'evoluzione libera dello stato a partire da $x(0)$ rimane confinata nell'autospazio generato da u_1 ($v_2^T u_1 = v_3^T u_1 = 0$); in particolare dalla forma spettrale dell'esponenziale

$$e^{At}x(0) = ae^{\lambda_1 t}u_1 = \begin{pmatrix} ae^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol. 4)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Autovalori e relativi autovettori

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -3 \rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e i modi naturali sono $e^{\lambda_1 t} = e^{-2t}$, $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$ e $e^{\lambda_3 t} = e^{-3t}$. Essendo lo stato iniziale

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$$

si ottiene

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= e^{At}x(0) = e^{-t}u_2 \\ y_\ell(t) &= Ce^{At}x(0) = e^{-t} \end{aligned}$$

Sol. 5) Autovalori e relativi autovettori

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Evoluzione libera in uscita

$$\begin{aligned} y_\ell(t) &= Ce^{At}x(0) = C\left\{e^{\lambda_1 t}u_1 v_1^T + e^{\lambda_1 t}u_2 v_2^T\right\}x(0) \\ &= \left\{e^{\lambda_1 t}Cu_1 v_1^T + e^{\lambda_1 t}Cu_2 v_2^T\right\}x(0) \\ &= \left\{e^{\lambda_1 t}Cu_1 v_1^T\right\}x(0) \end{aligned}$$

essendo $Cu_2 = 0$. In evoluzione libera in uscita compare solo il modo naturale $e^{\lambda_1 t} = e^{-t}$ convergente; qualsiasi condizione iniziale $x(0)$ risolve il problema.

Si noti che il modo naturale $e^{\lambda_2 t}$ non compare mai nell'evoluzione libera in uscita, indipendentemente dalla condizione iniziale $x(0)$ e pertanto risulta essere un modo naturale inosservabile in uscita. Per conferma, effettuando la scomposizione rispetto all'osservabilità, si ha

$$\mathcal{O} = \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dinamica del sottosistema inosservabile è caratterizzata dall'autovalore $\lambda_2 = 1$ e pertanto il modo naturale corrispondente è inosservabile in uscita.

Sol. 6) Autovalori e relativi autovettori

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 5 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affinché il modo naturale divergente, associato a $\lambda_2 = 5$, non compaia nell'evoluzione libera in uscita, lo stato iniziale deve appartenere all'autospazio associato a $\lambda_1 = 0$ e cioè

$$x(0) = \alpha u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Sol. 7) Una singola equazione differenziale del terzo ordine $\rightarrow$ vettore di stato di dimensione 3. Scegliendo, ad esempio,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -\frac{1}{3}x_1(t) + x_2(t) + \frac{1}{3}u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0
$$