

Corso di Fondamenti di Automatica

Università di Roma “La Sapienza”

Sistemi Interconnessi

L. Lanari

Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Università di Roma “La Sapienza”

Roma, Italy

Considerazioni generali

Si consideri un sistema \mathcal{S} ottenuto come interconnessione di m sotto-sistemi \mathcal{S}_i ($i = 1, \dots, m$) ognuno dei quali caratterizzato dalla rappresentazione con lo spazio di stato (A_i, B_i, C_i, D_i) e vettore di stato $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ di dimensione n_i , ingresso u_i e uscita y_i

$$\mathcal{S}_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \end{cases}$$

Lo stato $x(t)$ del sistema interconnesso può essere scelto pari a*

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$$

ed ha dimensione $n = \sum_{i=1}^m n_i$.

Le diverse interconnessioni sono individuate dalle **relazioni di interconnessione** tra le variabili di ingresso e uscita dei vari sotto-sistemi.

*L'ordine dei sotto-vettori $x_i(t)$ nel vettore di stato $x(t)$ è arbitrario; ovviamente cambia la rappresentazione nello spazio di stato del sistema interconnesso se si altera l'ordine dei vettori $x_i(t)$ in $x(t)$.

Autovalori nascosti

Un autovalore λ_i della matrice dinamica A di un sistema S si definisce **autovalore nascosto** se la sua molteplicità come polo della funzione di trasferimento $F(s)$ di S è *strettamente inferiore* a quella che tale autovalore ha come radice del polinomio caratteristico di A (molteplicità algebrica).

La presenza di un autovalore nascosto nasce dall'esistenza di una dinamica non raggiungibile e/o inosservabile (**dinamica nascosta**) caratterizzata dall'autovalore stesso.

Vale il seguente risultato (**Test di Hautus**)

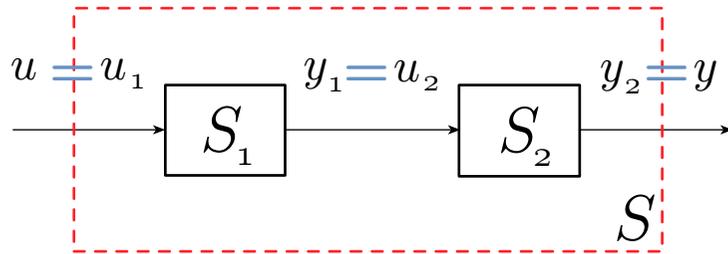
Un autovalore λ_i **non** è un **autovalore nascosto** se e solo se

$$\text{rango} \left(\begin{array}{c|c} (A - \lambda_i I) & B \end{array} \right) = n \quad \text{Test di controllabilità}$$

e

$$\text{rango} \left(\begin{array}{c} (A - \lambda_i I) \\ C \end{array} \right) = n \quad \text{Test di osservabilità}$$

Interconnessione in Serie (o Cascata)



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u_1(t) \\ y_1(t) = C_1x_1(t) + D_1u_1(t) \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + B_2u_2(t) \\ y_2(t) = C_2x_2(t) + D_2u_2(t) \end{cases}$$

stato: $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ relazioni di interconnessione: $y_1 = u_2, \quad u = u_1, \quad y = y_2$

Per ottenere la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso si calcola $\dot{x}(t)$ e si usano le relazioni di interconnessione

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1u_1 \\ A_2x_2 + B_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1u \\ A_2x_2 + B_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1u \\ A_2x_2 + B_2(C_1x_1 + D_1u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 = C_2x_2 + D_2(C_1x_1 + D_1u_1) = \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D_2D_1u \\ &= Cx + Du \end{aligned}$$

Sistema interconnesso caratterizzato da

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \quad D = D_1D_2$$

Interconnessione in Serie (o Cascata)

Dall'espressione della matrice A (triangolare inferiore a blocchi) del sistema interconnesso si ha l'importante relazione*

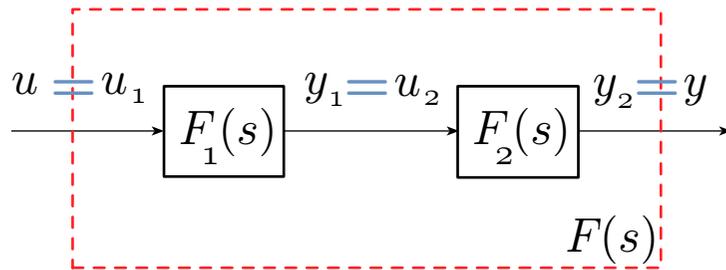
$$\text{aut}\{A\} = \text{aut}\{A_1\} \cup \text{aut}\{A_2\}$$

In generale si ha

Il sistema **interconnesso in serie** \mathcal{S} ha come **autovalori**
l'**unione** degli **autovalori**
dei **sotto-sistemi** \mathcal{S}_i che lo compongono

*Con $\text{aut}\{A\}$ si indica l'insieme degli autovalori della matrice A .

Interconnessione in Serie (o Cascata) Funzione di trasferimento



$$\mathcal{S}_1 : F_1(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)}$$

$$\mathcal{S}_2 : F_2(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)}$$

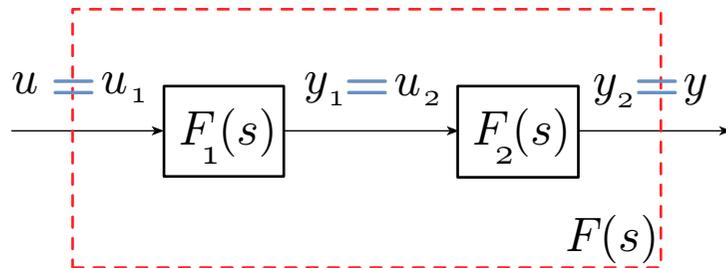
$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y_2(s) u_2(s)}{u_1(s) u_2(s)} = \frac{y_2(s) y_1(s)}{u_1(s) u_2(s)} = \frac{y_2(s) y_1(s)}{u_2(s) u_1(s)} = F_2(s) F_1(s) = F_1(s) F_2(s)$$

La **funzione di trasferimento** $F(s)$ del sistema **interconnesso in serie** \mathcal{S} è data dal **prodotto** delle **funzioni di trasferimento** $F_i(s)$ dei singoli sotto-sistemi \mathcal{S}_i che lo compongono

Attenzione: nella funzione di trasferimento finale $F(s)$ ci possono essere delle cancellazioni tra poli e zeri. In tal caso si ha sicuramente una perdita di raggiungibilità e/o osservabilità per il sistema interconnesso. I poli del sistema interconnesso, in presenza di tali cancellazioni, non comprenderanno tutti i poli (autovalori) dei singoli sotto-sistemi* e quindi ci saranno autovalori nascosti.

*Si parte dal presupposto che i singoli sottosistemi siano, presi singolarmente, completamente osservabili e raggiungibili e quindi i poli e gli autovalori di ogni singolo sotto-sistema coincidono.

Interconnessione in Serie - Esempio 1



$$\mathcal{S}_1 : \quad F_1(s) = \frac{s-1}{s+1} = 1 - \frac{2}{s+1}$$

$$\mathcal{S}_2 : \quad F_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)} \frac{1}{(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

Un solo polo mentre il sistema deve avere 2 autovalori
 \Rightarrow un autovalore nascosto = +1 \Rightarrow perdita di raggiungibilità e/o osservabilità

Si deve individuare la rappresentazione nello spazio di stato del sistema interconnesso a partire dalle singole rappresentazioni dei due sotto-sistemi \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 .

Realizzazioni

$$\mathcal{S}_1 : \quad A_1 = -1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = -2, \quad D_1 = 1$$

$$\mathcal{S}_2 : \quad A_2 = 1, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 1, \quad D_2 = 0$$

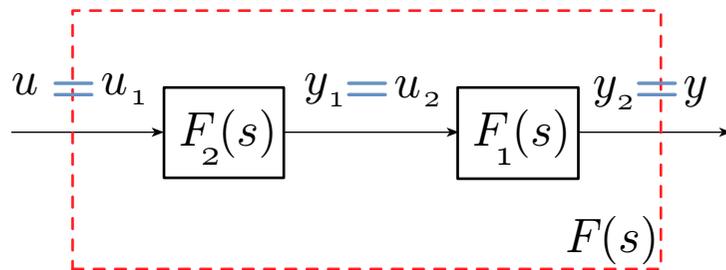
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad C_2) = (0 \quad 1), \quad D = 0$$

Test di Hautus per $\lambda_2 = 1$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 < n = 2, \quad \Rightarrow \lambda_2 \text{ non raggiungibile}$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = n, \quad \Rightarrow \lambda_2 \text{ osservabile}$$

Interconnessione in Serie - Esempio 2



$$S_1 : \quad F_1(s) = \frac{s-1}{s+1} = 1 - \frac{2}{s+1}$$

$$S_2 : \quad F_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

Att. ordine diverso rispetto all'esempio 1

$$F(s) = F_2(s)F_1(s) = F_1(s)F_2(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)} \frac{1}{(s-1)} = \frac{1}{s+1} \quad \text{un solo polo}$$

Stesse realizzazioni dei singoli sotto-sistemi dell'esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad D_1C_2) = (-2 \quad 1)$$

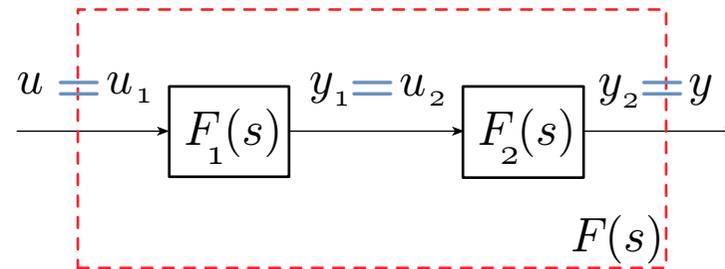
Test di Hautus per $\lambda_2 = 1$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = n, \quad \Rightarrow \lambda_2 \text{ raggiungibile}$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 < n = 2, \quad \Rightarrow \lambda_2 \text{ inosservabile}$$

\Rightarrow l'ordine di interconnessione in caso di cancellazione è importante

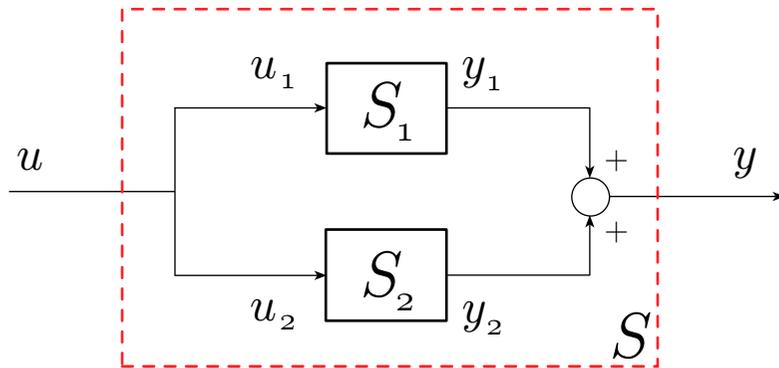
Interconnessione in Serie - Proprietà strutturali



Se nell'interconnessione in serie di $F_1(s) = N_1(s)/D_1(s)$ e $F_2(s) = N_2(s)/D_2(s)$ si verificano cancellazioni che coinvolgono fattori comuni tra $N_1(s)$ e $D_2(s)$ (cancellazione nell'ordine zero/polo) oppure tra $D_1(s)$ e $N_2(s)$ (cancellazione polo/zero) si generano dinamiche nascoste. Rispetto allo schema di figura:

- se uno *zero* di $F_1(s)$ cancella un *polo* di $F_2(s)$ si genera una dinamica *non raggiungibile* caratterizzata dall'autovalore nascosto coincidente con il polo di $F_2(s)$ cancellato;
- se un *polo* di $F_1(s)$ cancella uno *zero* di $F_2(s)$ si genera una dinamica *inosservabile* caratterizzata dall'autovalore nascosto coincidente con il polo di $F_1(s)$ cancellato.

Interconnessione in Parallelo



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u_1(t) \\ y_1(t) = C_1x_1(t) + D_1u_1(t) \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + B_2u_2(t) \\ y_2(t) = C_2x_2(t) + D_2u_2(t) \end{cases}$$

relazioni di interconnessione: $y = y_1 + y_2, \quad u = u_1 = u_2$

Procedimento analogo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1u_1 \\ A_2x_2 + B_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1u \\ A_2x_2 + B_2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u = Ax + Bu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = C_1x_1 + D_1x_1 + C_2x_2 + D_2x_2 = (C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (D_1 + D_2)u \\ &= Cx + Du \end{aligned}$$

Sistema interconnesso caratterizzato da

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \ C_2), \quad D = D_1 + D_2$$

Interconnessione in Parallelo

Dall'espressione della matrice A (diagonale a blocchi) del sistema interconnesso si ha l'importante relazione

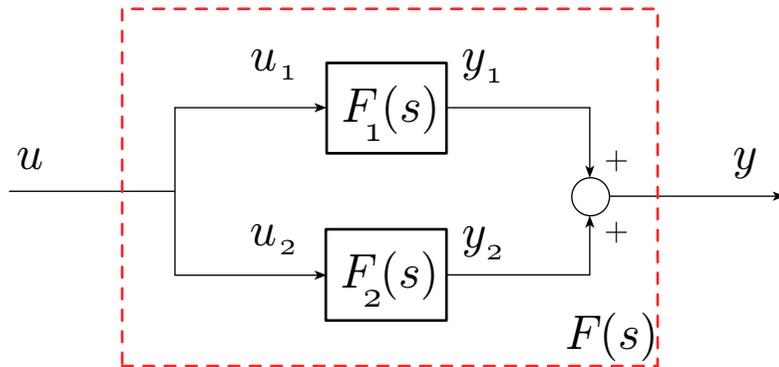
$$\text{aut}\{A\} = \text{aut}\{A_1\} \cup \text{aut}\{A_2\}$$

In generale si ha

Il sistema **interconnesso in parallelo** \mathcal{S} ha come **autovalori**
l'**unione** degli **autovalori**
dei **sotto-sistemi** \mathcal{S}_i che lo compongono

Interconnessione in Parallelo

Funzione di trasferimento



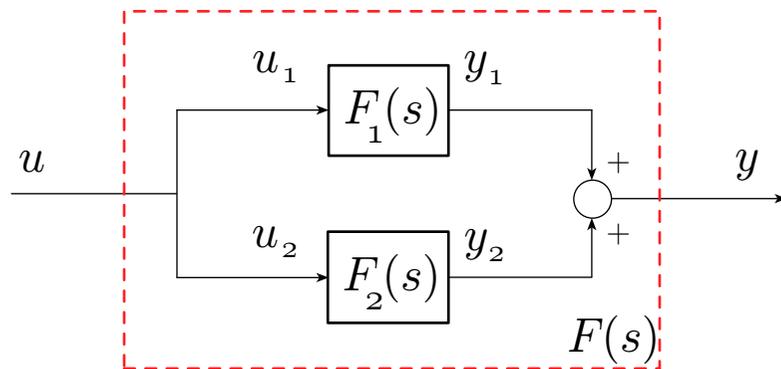
$$\mathcal{S}_1 : F_1(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)}$$

$$\mathcal{S}_2 : F_2(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)}$$

$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y_1(s) + y_2(s)}{u(s)} = \frac{y_1(s)}{u(s)} + \frac{y_2(s)}{u(s)} = \frac{y_1(s)}{u_1(s)} + \frac{y_2(s)}{u_2(s)} = F_1(s) + F_2(s)$$

La **funzione di trasferimento** $F(s)$ del sistema **interconnesso in parallelo** \mathcal{S} è data dalla **somma** delle **funzioni di trasferimento** $F_i(s)$ dei singoli sotto-sistemi \mathcal{S}_i che lo compongono

Interconnessione in Parallelo - Esempio



$$\mathcal{S}_1 : \quad F_1(s) = \frac{s-1}{s+1} = 1 - \frac{2}{s+1}$$

$$\mathcal{S}_2 : \quad F_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

Realizzazioni

$$\mathcal{S}_1 : \quad A_1 = -1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = -2, \quad D_1 = 1$$

$$\mathcal{S}_2 : \quad A_2 = -1, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 1, \quad D_2 = 0$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{s-1}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \quad \text{un solo polo}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 1), \quad D = D_1 = 1$$

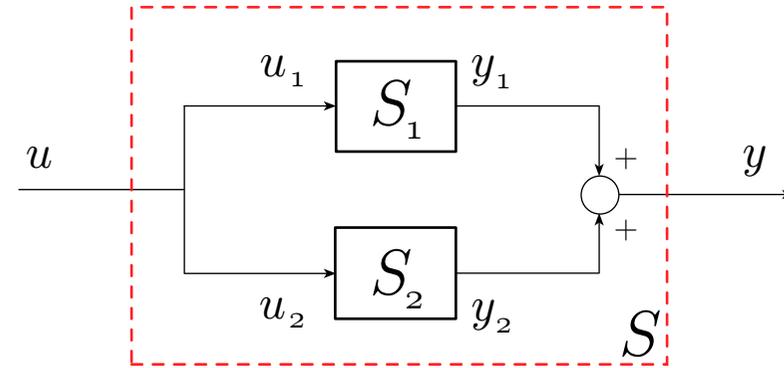
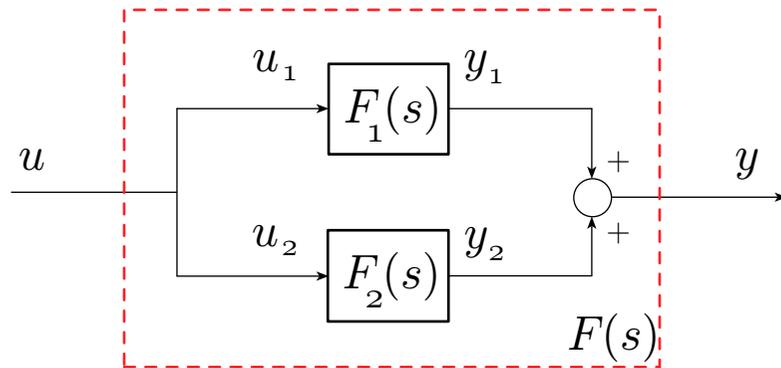
Test di Hautus per $\lambda = -1$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 < n = 2, \quad \Rightarrow \lambda \quad \text{non raggiungibile}$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 < n = 2, \quad \Rightarrow \lambda \quad \text{inosservabile}$$

Dinamica di ordine 1 (dimensione del sotto-sistema) non raggiungibile e inosservabile caratterizzata da un autovalore in -1

Interconnessione in Parallelo - Proprietà strutturali



Se $F_1(s)$ e $F_2(s)$ hanno un polo p_i in comune, allora, mettendo in evidenza tale polo

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{N_1(s)}{(s - p_i)D'_1(s)}, \quad F_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_2(s)}{(s - p_i)D'_2(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{N_1(s)}{(s - p_i)D'_1(s)} + \frac{N_2(s)}{(s - p_i)D'_2(s)} = \frac{N_1(s)D'_2(s) + N_2(s)D'_1(s)}{(s - p_i)D'_1(s)D'_2(s)}$$

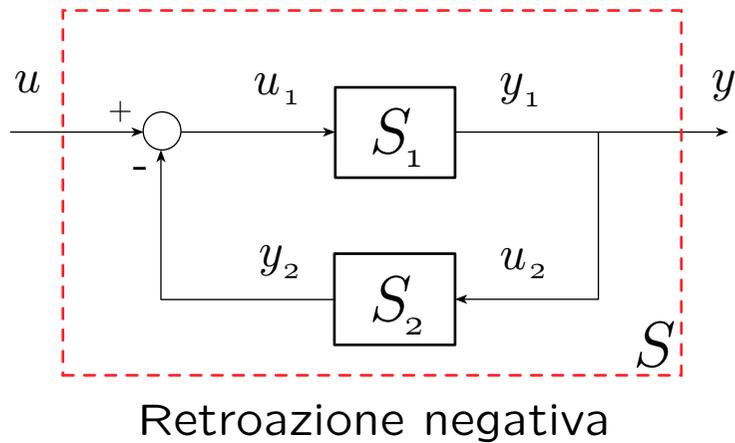
con il numero di poli finale minore di uno rispetto alla somma del numero dei poli di S_1 e S_2 . In generale si può dimostrare che

Se $F_1(s)$ e $F_2(s)$ hanno **poli in comune** allora si genera una dinamica contemporaneamente **non raggiungibile** e **inosservabile**

o, equivalentemente,

Se S_1 e S_2 hanno **autovalori in comune** allora si genera una dinamica contemporaneamente **non raggiungibile** e **inosservabile**

Interconnessione in Retroazione



$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$

(caso $D_1 = D_2 = 0$)

relazioni di interconnessione: $u_1 = u - y_2, \quad y = y_1 = u_2$

Scegliendo

$$\text{stato: } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

e calcolando $\dot{x}(t)$, si ottiene la rappresentazione con lo spazio di stato di S

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1(u - y_2) \\ A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

$$y = y_1 = C_1 x_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Cx$$

Interconnessione in Retroazione

Sistema interconnesso caratterizzato da

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \ 0), \quad D = 0$$

In generale si ha

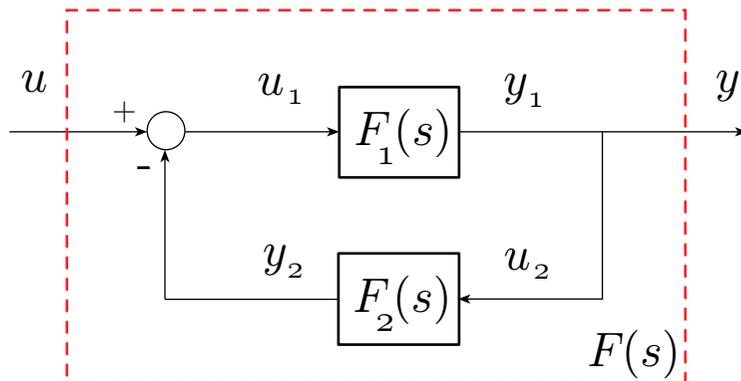
$$\text{aut}\{A\} \neq \text{aut}\{A_1\} \cup \text{aut}\{A_2\}$$

e quindi il sistema interconnesso avrà, in generale*, autovalori diversi dagli autovalori dei singoli sotto-sistemi.

*Come illustrato di seguito, se vi sono cancellazioni nella [funzione d'anello](#) $F_1(s)F_2(s)$, la dinamica non necessariamente nascosta, corrispondente a tali cancellazioni, rimane inalterata per il sistema ad anello chiuso.

Interconnessione in Retroazione

Funzione di trasferimento



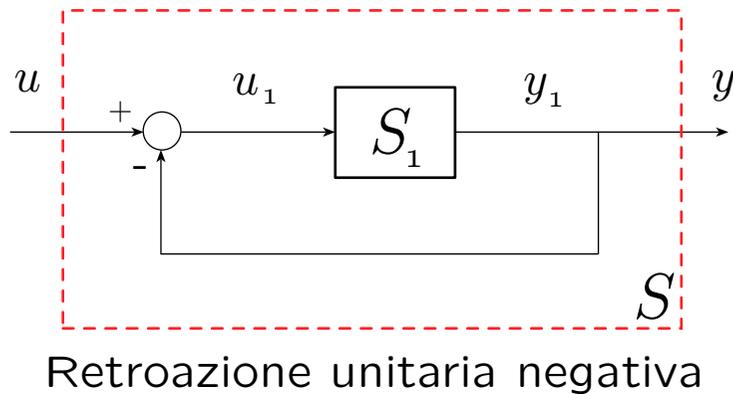
$$\mathcal{S}_1 : F_1(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)}$$

$$\mathcal{S}_2 : F_2(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)}$$

$$\begin{aligned} y(s) &= y_1(s) = F_1(s)[u(s) - y_2(s)] = F_1(s)[u(s) - F_2(s)u_2(s)] \\ &= F_1(s)[u(s) - F_2(s)y(s)] \\ \Rightarrow [1 + F_1(s)F_2(s)]y(s) &= F_1(s)u(s) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

Interconnessione in Retroazione Unitaria



S : sistema ad anello chiuso

S_1 : sistema ad anello aperto

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

(caso $D_1 = 0$)

relazioni di interconnessione: $u_1 = u - y_1, \quad y = y_1$

Lo stato del sistema interconnesso coincide con quello del sistema ad anello aperto S_1 .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(u - y_1) = A_1 x_1 - B_1 C_1 x_1 + B_1 u \\ &= (A_1 - B_1 C_1)x + B_1 u = Ax + Bu \\ y &= y_1 = C_1 x_1 = Cx \end{aligned}$$

Sistema interconnesso caratterizzato da

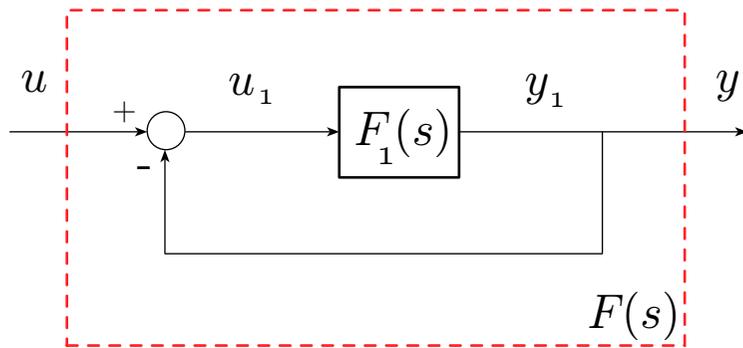
$$A = A_1 - B_1 C_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1$$

con, in generale,

$$\text{aut}\{A\} \neq \text{aut}\{A_1\}$$

Interconnessione in Retroazione Unitaria

Funzione di trasferimento



$$\mathcal{S}_1 : \quad F_1(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)}$$

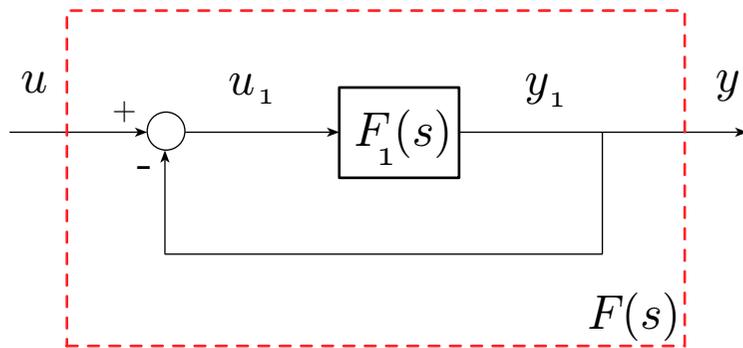
$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)}$$

Caso reazione positiva



$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F_1(s)}{1 - F_1(s)}$$

Interconnessione in Retroazione Unitaria – Esempio 1



- S_1 instabile, ad esempio

$$F_1(s) = \frac{2}{s-1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)} = \frac{2/(s-1)}{1 + 2/(s-1)} = \frac{2}{s-1+2} = \frac{2}{s+1}$$

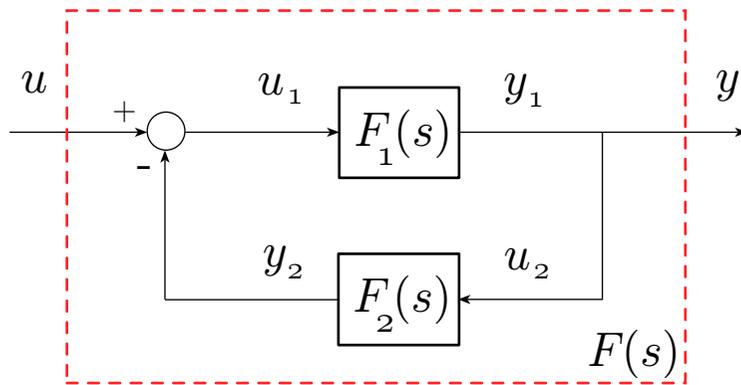
S stabile asintoticamente

- S_1 stabile asintoticamente, ad esempio

$$F_1(s) = \frac{K(s-1)}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)} = \frac{K(s-1)}{s^2 + s(2+K) + 1 - K}$$

- S è stabile asintoticamente se $-2 < K < 1$;
- S è stabile semplicemente se $K = 1$ o $K = -2$;
- S è instabile negli altri casi.

Interconnessione in Retroazione – Proprietà strutturali



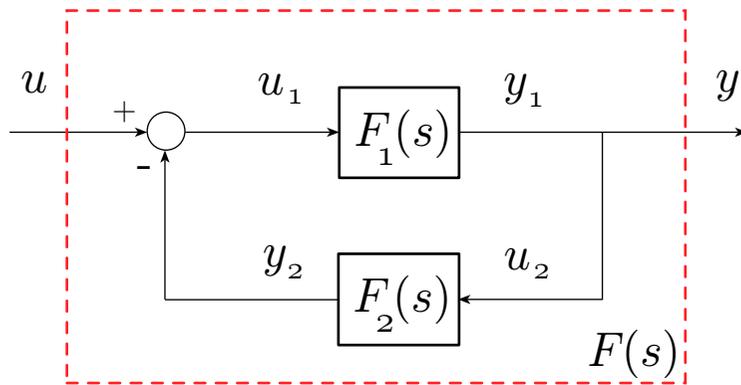
Se uno *zero* di $F_1(s)$ coincide con un *polo* di $F_2(s)$ si genera una dinamica nascosta **non raggiungibile e inosservabile**.

$$F_1(s) = \frac{(s+a)N_1'(s)}{D_1(s)}, \quad F_2(s) = \frac{N_2(s)}{(s+a)D_2'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{(s+a)^2 N_1'(s) D_2'(s)}{(s+a)[D_1(s)D_2'(s) + N_1'(s)N_2(s)]} \quad \text{cancellazione} \quad \frac{(s+a)N_1'(s)D_2'(s)}{D_1(s)D_2'(s) + N_1'(s)N_2(s)}$$

L'autovalore nascosto (corrispondente al polo "cancellato") non viene alterato dalla retroazione.

Interconnessione in Retroazione – Proprietà strutturali

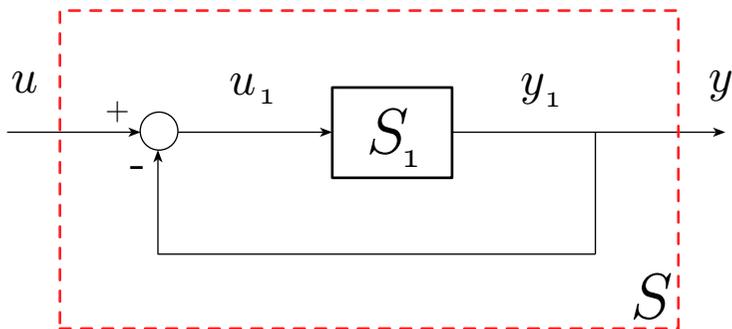


Att.: Se un *polo* di $F_1(s)$ coincide con uno *zero* di $F_2(s)$ nell'interconnessione a retroazione riportata in figura *non* si genera una dinamica nascosta ma il corrispondente polo non viene alterato dalla retroazione.

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{(s+a)D'_1(s)}, \quad F_2(s) = \frac{(s+a)N'_2(s)}{D_2(s)}$$
$$\Rightarrow F(s) = \frac{N_1(s)D_2(s)}{(s+a)[D'_1(s)D_2(s) + N_1(s)N'_2(s)]}$$

Non ci sono cancellazioni: il grado del denominatore di $F(s)$ è uguale alla somma dei gradi dei denominatori di $F_1(s)$ e $F_2(s)$ (e uguale al numero di autovalori del sistema interconnesso).

Interconnessione in Retroazione Unitaria – Proprietà strutturali

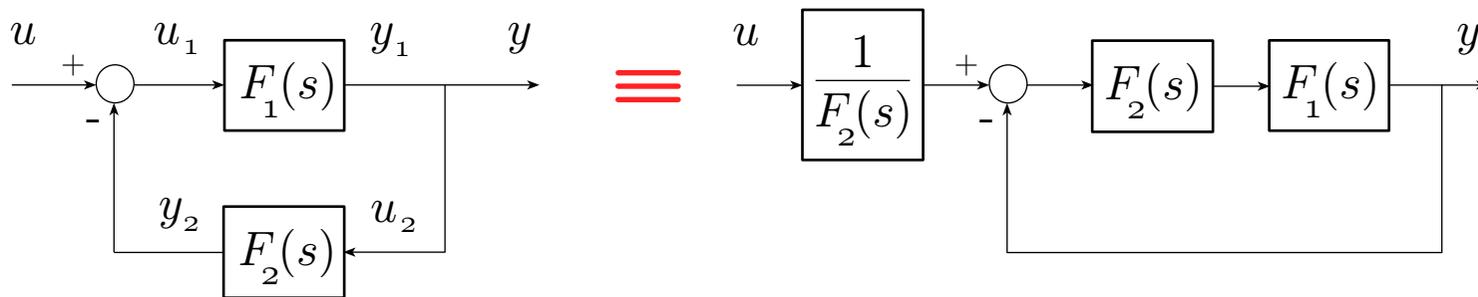
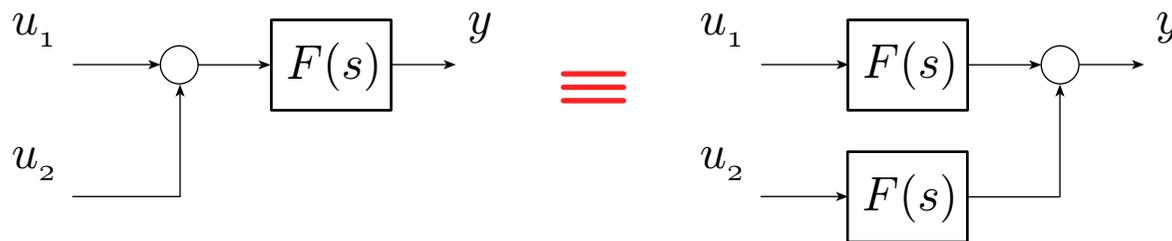
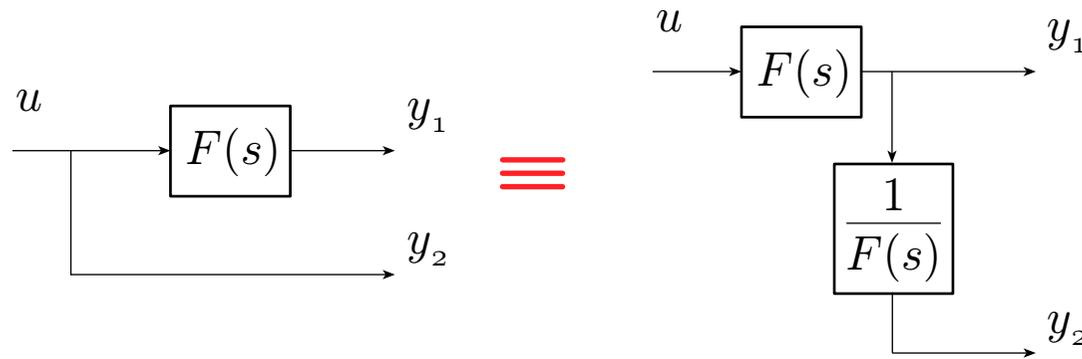


Il sistema retroazionato \mathcal{S} ha autovalori nascosti
se e solo se
li ha il sistema \mathcal{S}_1

$$\begin{aligned}
 F_1(s) &= \frac{(s+a)N'_1(s)}{(s+a)D'_1(s)} \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{(s+a)N'_1(s)}{(s+a)N'_1(s) + (s+a)D'_1(s)} = \frac{(s+a)N'_1(s)}{(s+a)[N'_1(s) + D'_1(s)]} \\
 &\stackrel{\text{cancellazione}}{=} \frac{N'_1(s)}{N'_1(s) + D'_1(s)}
 \end{aligned}$$

Gli autovalori nascosti di \mathcal{S}_1
non vengono spostati dalla retroazione

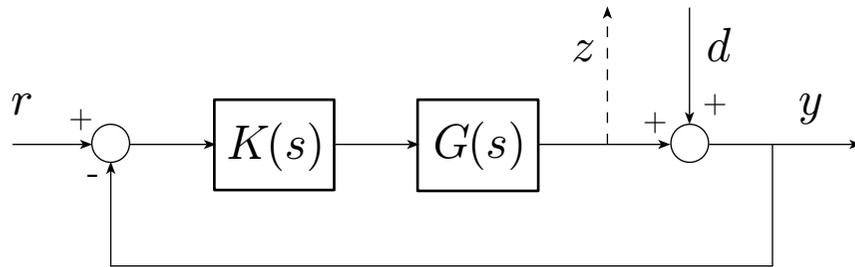
Alcune regole per la semplificazione di sistemi interconnessi



L'equivalenza è facilmente dimostrata confrontando i vari segnali.

Att.: l'equivalenza è solo di tipo algebrico, le cancellazioni introdotte servono solo a sbrogliare le interconnessioni.

Esempio 1



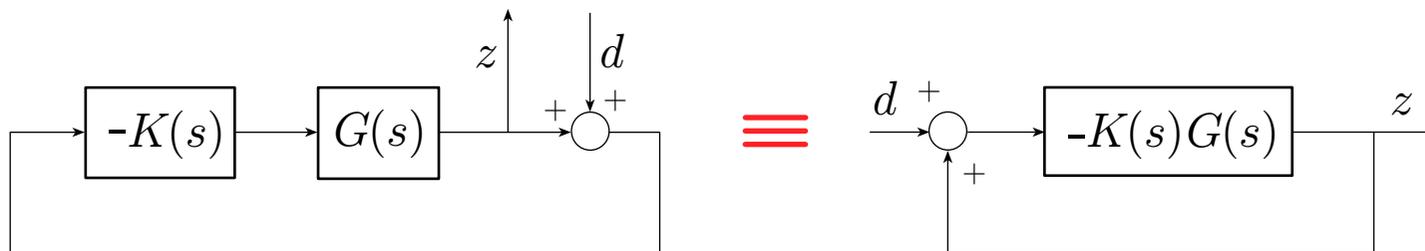
Calcolare la funzione di trasferimento $W_{dz}(s)$ tra le variabili $d(t)$ e $z(t)$

Principio di sovrapposizione degli effetti $\Rightarrow r = 0$. Il sistema interconnesso complessivo ha due ingressi ($r(t)$ e $d(t)$); entrambi, in generale, influenzeranno l'andamento delle diverse variabili del sistema e quindi anche $z(t)$. Definendo con $W_{rz}(s)$ la funzione di trasferimento tra r e z (ottenuta ponendo d a zero), la risposta forzata complessiva sarà

$$z(s) = W_{dz}(s)d(s) + W_{rz}(s)r(s)$$

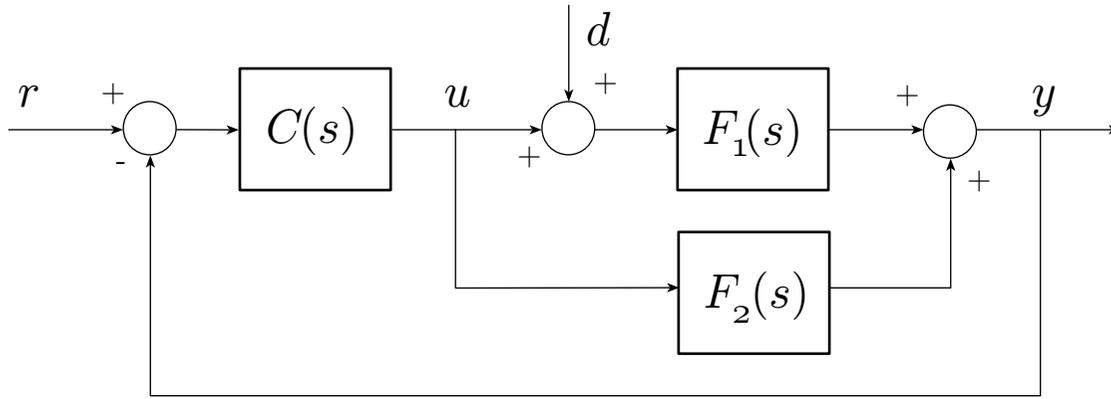
Volendo solo individuare l'effetto di $d(t)$ su $z(t)$ si può porre l'altro ingresso a zero.

Semplice manipolazione dello schema a blocchi



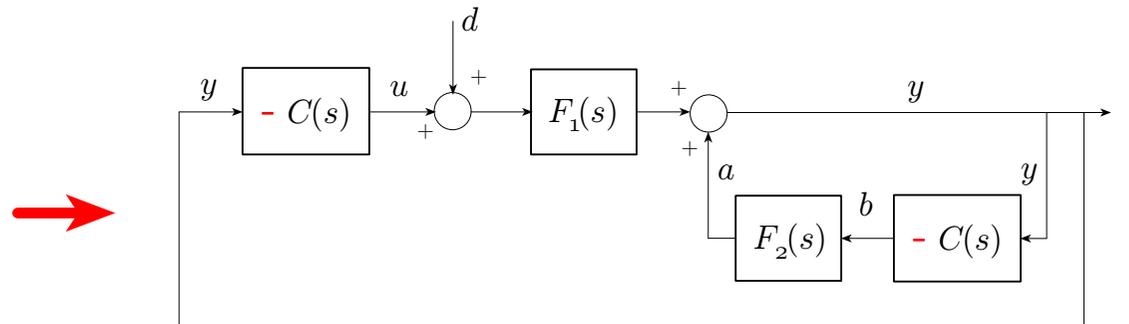
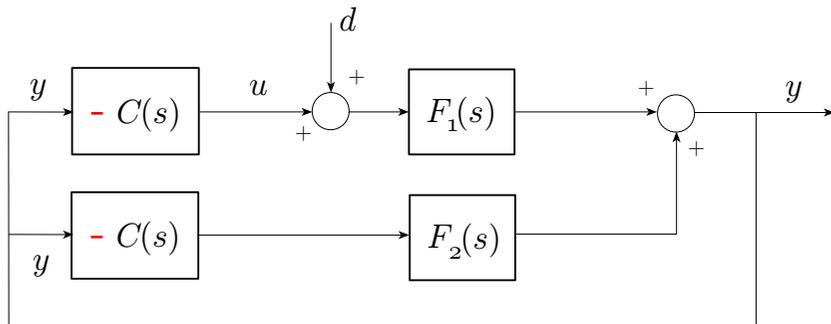
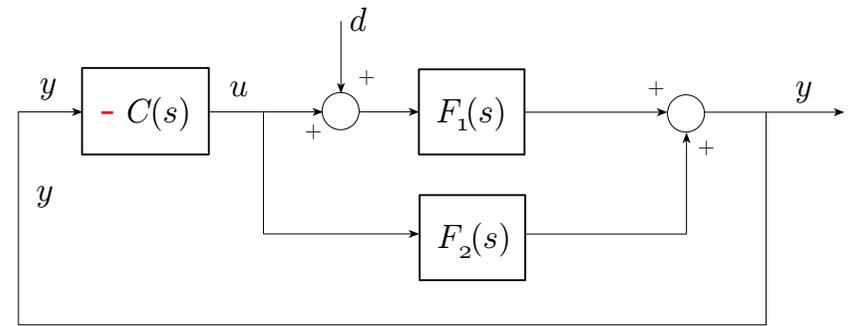
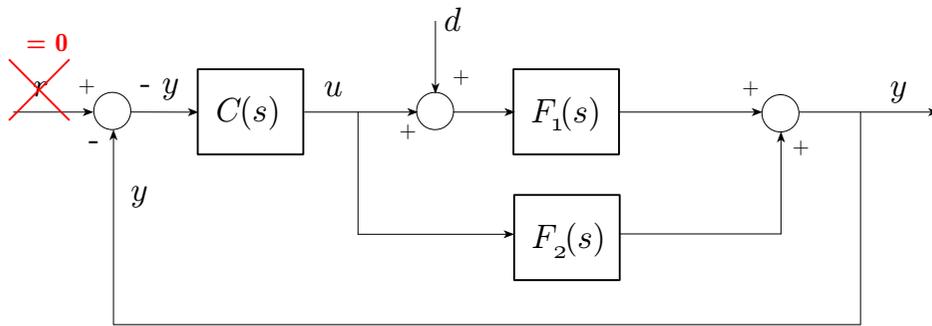
$$W_{dz}(s) = \frac{-K(s)G(s)}{1 - [-K(s)G(s)]} = -\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Esempio 2

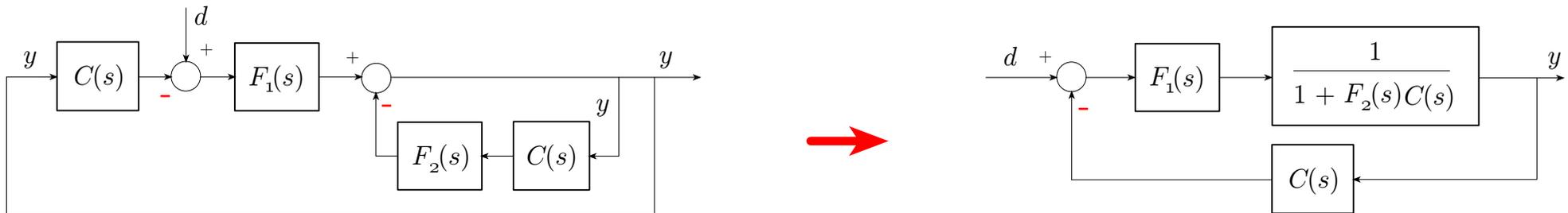


Individuare le funzioni di trasferimento $W_{dy}(s)$ e $W_{ry}(s)$

Opportune trasformazioni dello schema a blocchi



Esempio 2



Lo schema finale permette di applicare le formule note per il calcolo della funzione di trasferimento di un sistema interconnesso*

$$W_{dy}(s) = \frac{F_1(s)}{1 + [F_1(s) + F_2(s)] C(s)}$$

In modo analogo si ottiene

$$W_{ry}(s) = \frac{[F_1(s) + F_2(s)] C(s)}{1 + [F_1(s) + F_2(s)] C(s)}$$

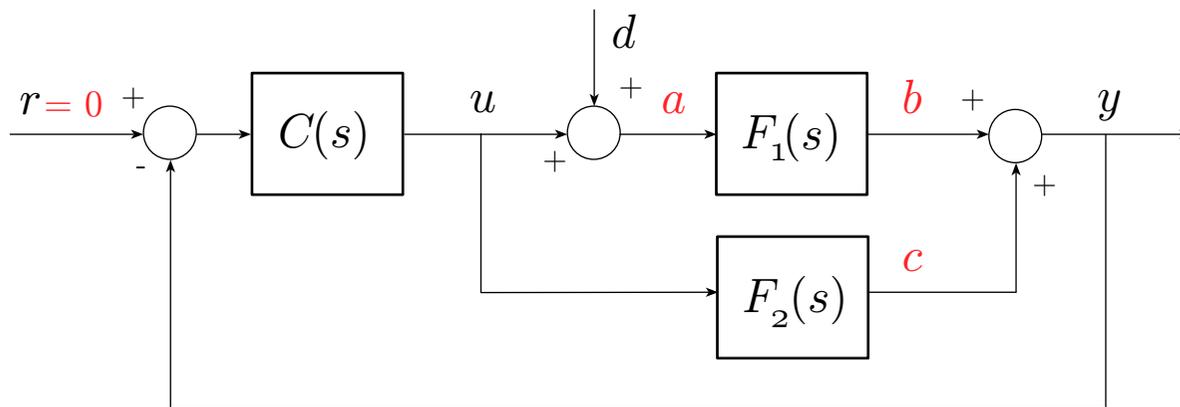
*Esiste un procedimento algoritmico di tipo algebrico – formula di Mason – che permette di calcolare in generale la funzione di trasferimento di un sistema interconnesso complesso.

Esempio 2

In alternativa si può procedere in modo algebrico:

- individuare tutti i segnali che appaiono nel sistema interconnesso
- scrivere le relazioni in s che legano i vari segnali*
- risolvere le equazioni algebriche.

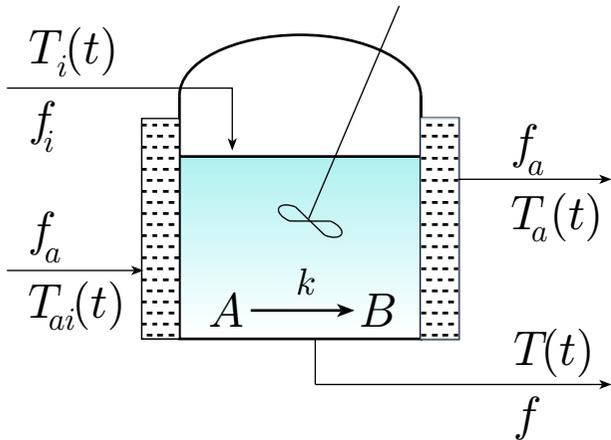
relazioni algebriche: $y(s) = b(s) + c(s)$, $b(s) = F_1(s)a(s)$, $c(s) = F_2(s)u(s)$,
 $a(s) = u(s) + d(s)$, $u(s) = -C(s)y(s)$



$$\begin{aligned} y &= b + c = F_2 u + F_1(u + d) \\ &= F_1 d - (F_1 + F_2) C y \end{aligned}$$

*Si ricorda che si sta considerando la sola risposta forzata e pertanto se un segnale $a(s)$ agisce in ingresso a un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$, la trasformata dell'uscita forzata $b(s)$ è data dal semplice prodotto $b(s) = G(s)a(s)$

Esempio 3



$T_{ai}(t)$, $T_a(t)$ temperatura in ingresso e in uscita jacket, °C
 ρ_a densità acqua raffreddamento nel jacket, kg/m³
 V_a volume acqua nella camicia di raffreddamento
 H_{ai} , H_a entalpie acqua in ingresso/uscita jacket, J/kg
 f_i , f flusso volumetrico in ingresso/uscita reattore m³/s
 C_{Ai} concentrazione del componente A in ingresso

