Dispensa n.1

Sul legame tra autovalori della matrice A
e poli della funzione di trasferimento

E' dato un sistema lineare, avente un solo ingresso, una sola uscita e uno spazio di stato a dimensione n. Tale sistema è descritto dalle relazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

in cui A è una matrice $n \times n$, B è un vettore colonna $n \times 1$, C è un vettore riga $1 \times n$ e D è uno scalare. Come è noto, la funzione di trasferimento di tale sistema risulta pari a

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \ .$$

Tale funzione è una funzione *razionale* della variabile complessa s, propria se $D \neq 0$ o strettamente propria se $D = 0$.

Si vuole studiare il legame che esiste tra gli *autovalori* della matrice A e i *poli* della funzione razionale $T(s)$.

1. Per semplicità, consideriamo dapprima il caso particolare in cui la matrice A possieda n autovettori indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_n$. In questo caso, la matrice A può essere posta nella forma

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i w_i \tag{1}$$

(detta *rappresentazione spettrale*) in cui $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori associati, rispettivamente, agli autovalori (destri) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e gli n vettori riga $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sono (autovettori sinistri indipendenti) definiti dalle relazioni

$$w_i v_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \ . \end{cases}$$

Partendo da tale forma è facile mostrare che

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v_i w_i$$

e quindi, prendendo le trasformate di Laplace di ambo i membri, che

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - \lambda_i} v_i w_i \ .$$

Nel caso speciale in cui vale la (1) la funzione di trasferimento $T(s)$ assume dunque l'espressione semplice

$$T(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - \lambda_i} C v_i w_i B + D \ . \tag{2}$$

Il secondo membro di questa espressione è chiaramente un sviluppo in frazioni parziali. Se si pone, per $i = 1, \ldots, n$,

$$R_i = C v_i w_i B$$

(si noti che R_i è uno scalare) la (2) si riscrive come

$$T(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - \lambda_i} + D$$

da cui si vede che:

- i poli della funzione $T(s)$ *sono* necessariamente *compresi* tra gli autovalori di A,
- il singolo autovalore λ_i di A è polo della funzione $T(s)$ *se e solo se* $R_i \neq 0$ (cioè se il corrispondente residuo nello sviluppo (2) non è nullo).

Questa osservazione si presta a provare un semplice criterio per stabilire se un dato autovalore λ_i è anche polo di $T(s)$. Il criterio è il seguente:

- $R_i \neq 0$ *se e solo se*

$$\text{rango}\,(\,(A - \lambda_i I) \quad B\,) = n \qquad \text{e} \qquad \text{rango} \begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) \\ C \end{pmatrix} = n \ . \tag{3}$$

Per provare la parte "se", si osservi che, per definizione di w_i,

$$w_i A = w_i \lambda_i$$

e quindi

$$w_i \left((A - \lambda_i I) \quad B \right) = \left(w_i(A - \lambda_i I) \quad w_i B \right) = \left(0 \quad w_i B \right) \ . \tag{4}$$

Se vale la relazione a sinistra nella (3), le n righe della matrice $\left((A - \lambda_i I) \quad B \right)$ sono indipendenti e il prodotto (4) non può essere nullo, in quanto $w_i \neq 0$. Ne segue necessariamente che

$$w_i B \neq 0 \ .$$

Inoltre, per definizione di v_i,

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) \\ C \end{pmatrix} v_i = \begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) v_i \\ C v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C v_i \end{pmatrix} \ . \tag{5}$$

Se vale la relazione a destra nella (3), le n colonne della matrice $\begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) \\ C \end{pmatrix}$ sono indipendenti e il prodotto (5) non può essere nullo, in quanto $v_i \neq 0$. Ne segue necessariamente che

$$C v_i \neq 0 \ .$$

Si conclude allora che, se valgono le (3), $R_i \neq 0$.

Per provare la parte "solo se", si supponga – per assurdo – che una delle condizioni (3), ad esempio quella a destra, sia violata. Di conseguenza, esiste un vettore colonna v non nullo tale che

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) \\ C \end{pmatrix} v = 0 \ .$$

Da questa relazione, si deduce che, necessariamente

$$A v = \lambda_i v \qquad \text{e} \qquad C v = 0 \ .$$

La prima di esse mostra che il vettore v è necessariamente un autovettore (destro) della matrice A, associato all'autovalore λ_i. Poichè, per ipotesi, la matrice A possiede n autovettori (destri) indipendenti, si deve concludere che necessariamente $v = c_i v_i$ per un opportuno coefficiente scalare $c_i \neq 0$. La seconda relazione mostra allora che $C v_i = 0$, da cui si conclude che $R_i = 0$.

Analogo risultato si ottiene supponendo falsa la prima delle (3). In definitiva, il venire meno dell'una o dell'altra delle (3) implica $R_i = 0$: ciò prova che se $R_i \neq 0$ le (3) sono vere.

2. Abbiamo mostrato sopra che, nell'ipotesi che la matrice A possieda n autovettori indipendenti, esiste un semplice criterio per stabilire se un autovalore λ_i è anche polo di $T(s)$: devono valere le condizioni (3). Vogliamo ora mostrare che il criterio in questione vale *in generale* (senza cioè dover ipotizzare che la matrice A possieda n autovettori indipendenti).

In proposito, è utile servirsi della seguente formula per il calcolo di una matrice partizionata

$$\det \begin{pmatrix} S & P \\ Q & R \end{pmatrix} = \det(S)\det(R - QS^{-1}P)$$

da cui si deduce che

$$\det \begin{pmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A-sI)\det(D+C(sI-A)^{-1}B) = \det(A-sI)T(s) \;.$$

In altri termini, la funzione razionale $T(s)$ può essere scritta come rapporto di due polinomi nella forma

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con

$$N(s) = \det \begin{pmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D(s) = \det(A - sI) \;.$$

Il polinomio $D(s)$ coincide, a meno del segno, col polinomio caratteristico $\det(sI - A)$ della matrice A: dunque, le radici di $D(s)$ coincidono con gli autovalori di A (con le rispettive molteplicità, nel caso di radici multiple). Affinchè un autovalore λ_i di A sia polo della funzione $T(s)$ (*con identica molteplicità*, nel caso di autovalore multiplo), è evidentemente *necessario e sufficiente* che il polinomio $N(s)$ *non* abbia una radice nel punto λ_i. In altre parole:

- i poli della funzione $T(s)$ *sono* necessariamente *compresi* tra gli autovalori di A,

- il singolo autovalore λ_i di A è polo della funzione $T(s)$, con identica molteplicità, *se e solo se*

$$\det \begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq 0 \ . \tag{6}$$

Proveremo ora che la condizione (6) vale se e solo se valgono le condizioni (3).

Si supponga che una delle due condizioni (3) sia falsa, per esempio quella a sinistra. Se questo è il caso, le n righe della matrice

$$\left((A - \lambda_i I) \quad B \right)$$

sono dipendenti. Di conseguenza, anche le $n+1$ righe della matrice

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

sono dipendenti, e si conclude che

$$N(\lambda_i) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda_i I & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Analogo risultato si ottiene supponendo falsa la seconda delle (3). In definitiva, il venire meno dell'una o dell'altra delle (3) implica $N(\lambda_i) = 0$: ciò prova che se $N(\lambda_i) \neq 0$ le (3) sono vere. In altri termini, le condizioni (3) sono condizioni *necessarie* affinchè sia $N(\lambda_i) \neq 0$.

Per provare che tali condizioni sono sufficienti, si supponga ora – procedendo ancora una volta per assurdo – che sia $N(\lambda_i) = 0$. Per definizione, esisteranno un vettore colonna v a n elementi e uno scalare u, non entrambi nulli, tali che

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_i I & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Questa relazione è equivalente alle due relazioni

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)v + Bu = 0 \\ Cv + Du = 0 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Se $u = 0$ (e quindi $v \neq 0$), le (7) si possono riscrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - \lambda_i I)v \\ Cv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) \\ C \end{pmatrix} v \ .$$

Essendo $v \neq 0$, se ne deduce che le n colonne della matrice $\begin{pmatrix} (A - \lambda_i I) \\ C \end{pmatrix}$ sono dipendenti e quindi la proprietà a destra nella (3) non può essere vera.

Se invece $u \neq 0$, si moltiplichi a sinistra la prima delle (7) per un autovettore sinistro w_i di A associato all'autovalore λ_i. Per definizione,

$$w_i(A - \lambda_i I) = 0 \ ,$$

da cui segue che $w_i B u = 0$. Essendo però $u \neq 0$, si deduce che

$$w_i B = 0 \ .$$

Le due relazioni trovate si possono riunire nella

$$w_i \left((A - \lambda_i I) \quad B \right) = 0$$

il che prova che la condizione a sinistra nella (3) non può essere vera. In definitiva, la condizione $N(\lambda_i) = 0$ implica il venir meno dell'una o dell'altra delle condizioni (3). Di conseguenza, se entrambi le condizioni (3) sono valide, deve essere $N(\lambda_i) \neq 0$, e questo prova che tali condizioni sono *sufficienti* affinchè sia $N(\lambda_i) \neq 0$.

3. I risultati presentati ai punti precedenti possono essere riassunti nel modo seguente. Si supponga che la matrice A abbia r autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, di molteplicità rispettivamente $n_1, n_2, \ldots, n_r$, o – il che è lo stesso – il polinomio caratteristico della matrice A si fattorizzi nella forma

$$d(s) = (s - \lambda_1)^{n_1}(s - \lambda_2)^{n_2} \cdots (s - \lambda_r)^{n_r} \tag{8}$$

con

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{per } i \neq j \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{r} n_i = n \ .$$

Allora, i poli della funzione $T(s)$ sono radici di un polinomio della forma

$$\hat{d}(s) = (s - \lambda_1)^{\hat{n}_1}(s - \lambda_2)^{\hat{n}_2} \cdots (s - \lambda_r)^{\hat{n}_r} \tag{9}$$

con

$$0 \leq \hat{n}_i \leq n_i \ . \tag{10}$$

Nella relazione (10) vale a destra il segno di uguaglianza se e solo se valgono le condizioni (3).

In vista di questo fatto, appare naturale definire come "autovalore *nascosto*" un autovalore λ_i di A per il quale, nella (10), vale a destra il segno $<$. In altri termini un autovalore di A è un autovalore nascosto se la sua molteplicità come polo di $T(s)$ è strettamente inferiore a quella che tale autovalore ha come radice del polinomio caratteristico di A. Si noti che in questo è compreso il caso limite in cui $\hat{n}_i = 0$, cioè quello in cui λ_i non è affatto polo della funzione $T(s)$.

Si può allora concludere, in base a quanto visto ai punti precedenti, che la matrice A *non possiede autovalori nascosti se e solo se le condizioni* (3) *valgono per* $i = 1, 2, \ldots, r$, cioè per tutti gli autovalori della matrice A.