Ragionamento Automatico

Richiami di tableaux proposizionali

Lezione 1

Richiami di logica e deduzione proposizionale

(L. Carlucci Aiello & F. Pirri: SLL, Cap. 5)

◇ La logica proposizionale
◇ I tableau proposizionali

Logica proposizionale (SLL Cap. 5))

◇ **Alfabeto**

- I **connettivi proposizionali** $\neg$ (unario) e $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (binari);
- Le **costanti proposizionali** $\top$, $\bot$ (per denotare il vero e il falso);
- Un insieme non vuoto (finito o numerabile) di **simboli proposizionali** $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots, P, Q, \ldots\}$;
- I simboli separatori '(' e ')'.

Logica proposizionale: Sintassi

◇ **Formule**

L'insieme **Prop** delle **formule ben formate** o **formule** del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è l'insieme definito induttivamente come segue:

1. Le costanti e i simboli proposizionali sono formule;
2. Se A è una formula $(\neg A)$ è una formula;
3. Se $\circ$ è un connettivo binario (cioè $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)e se A e B sono due formule, $(A \circ B)$ è una formula.

Logica proposizionale: Semantica

$\diamondsuit$ Il **sistema di valutazione** $\mathcal{S} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O}p \rangle$ della logica proposizionale è definito da:

1. $\mathcal{B} = \{0, 1\}$;
2. $\mathcal{T} = \{1\}$;
3. $\mathcal{O}p = \{\mathcal{O}p_\neg, \mathcal{O}p_\wedge, \mathcal{O}p_\vee, \mathcal{O}p_\rightarrow, \mathcal{O}p_\leftrightarrow\}$ uno per ogni connettivo del linguaggio $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, con $\mathcal{O}p_\neg : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ e $\mathcal{O}p_\circ : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Logica proposizionale: Semantica

Dove:

$\mathcal{O}p_\neg(1) = 0$ e $\mathcal{O}p_\neg(0) = 1$

$\mathcal{O}p_\wedge, \mathcal{O}p_\vee, \mathcal{O}p_\rightarrow, \mathcal{O}p_\leftrightarrow$:

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Valutazione booleana

$\diamondsuit$ Un'**assegnazione booleana** $\mathcal{V}$ ai simboli proposizionali $\mathcal{P}$ è una funzione totale:$\mathcal{V} : \mathcal{P} \rightarrow \{1, 0\}$.
$\diamondsuit$ Una **valutazione booleana** $I_\mathcal{V}$: **Prop** $\mapsto \{1, 0\}$ è l'estensione a **Prop** di un'assegnazione booleana, cioè

$$
\begin{array}{rcl}
I_\mathcal{V}(A) & = & \mathcal{V}(A) \text{ se } A \in \mathcal{P}; \\
I_\mathcal{V}(\top) & = & 1; \\
I_\mathcal{V}(\bot) & = & 0; \\
I_\mathcal{V}(\neg A) & = & \mathcal{O}p_\neg(I_\mathcal{V}(A)); \\
I_\mathcal{V}(A \circ B) & = & \mathcal{O}p_\circ(I_\mathcal{V}(A), I_\mathcal{V}(B)).
\end{array}
$$

dove $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Data $\mathcal{V}$, l'esistenza e l'unicità della estensione $I_\mathcal{V}$ sono garantite dal teorema di ricorsione.
Se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ coincidono su $simb(A)$ allora $I_{\mathcal{V}_1}(A) = I_{\mathcal{V}_2}(A)$.

Tautologie e contraddizioni

Definizioni:
$\diamondsuit$ Una formula proposizionale A è **soddisfatta** da una valutazione booleana $I_\mathcal{V}$ se $I_\mathcal{V}(A) = 1$.
$\diamondsuit$ Una formula proposizionale A è **soddisfacibile** se è soddisfatta da una qualche valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.
$\diamondsuit$ Una formula proposizionale A è una **tautologia** se è soddisfatta da ogni valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.
$\diamondsuit$ Una formula proposizionale A è una **contraddizione** non è soddisfatta da nessuna valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.

Modelli

Sia A una formula, e $\mathcal{M}$ un insieme di simboli proposizionali se assumendo tutti e soli gli elementi di $\mathcal{M}$ veri si ha che A è vera diciamo che $\mathcal{M}$ è un **modello** di A, ovvero che $\mathcal{M}$ **rende vera** A e scriviamo $\mathcal{M} \models A$.

Se $\mathcal{M}$ rende vere tutte le formule di un insieme Γ, cioè se $\mathcal{M} \models A$, per ogni formula A in Γ, diciamo che $\mathcal{M}$ è **un modello** per Γ e indichiamo questo con $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Se A è una tautologia, possiamo scrivere $\models A$.

Se $\mathcal{M} \models A$ per qualche $\mathcal{M}$, allora diciamo che A è **soddisfacibile**.

Se per nessun insieme di simboli proposizionali $\mathcal{M}$ è verificato che $\mathcal{M} \models A$ allora diciamo che A è **insoddisfacibile**.

Notazioni

Se A **implica tautologicamente** B scriviamo $\models A \rightarrow B$.

Dato un insieme di proposizioni Γ e una proposizione A, se Γ **implica logicamente** A scriviamo $\Gamma \models A$.

Decidibilità

La logica proposizionale è decidibile.
Cioè si può decidere se una formula A del calcolo proposizionale è una tautologia o meno.

Un altro interessante problema di decisione per il calcolo proposizionale consiste nello stabilire se una formula è soddisfacibile o meno (questo problema è di solito indicato con **SAT**).

Complessità

Il problema della verifica se una formula del calcolo proposizionale è o meno una tautologia, come pure il problema SAT, sono esponenziali nella dimensione della formula.

Data una formula A con n simboli proposizionali distinti, per verificare se è una tautologia o se è soddisfacibile basta costruire una tabella di verità con 2^n righe.

Si può fare di meglio? È possibile trovare algoritmi polinomiali per risolvere il problema di decisione delle tautologie e della soddisfacibilità del calcolo proposizionale?

SAT non è ancora stato dimostrato intrinsecamente esponenziale, anche se esiste una certa evidenza in questo senso.

Apparato deduttivo

◇ Un insieme Ax di assiomi (logici) eventualmente vuoto
◇ Un insieme $\mathcal{R}$ di regole di inferenza

Le regole di inferenza di $\mathcal{R}$ spesso vengono scritte nella seguente forma:

$$\frac{A_1 \cdots A_n}{A}$$

premesse − conclusione.

◇ Se $A \in Ax$ possiamo scrivere

$$\frac{}{A}$$

Dimostrazione

◇ Una sequenza finita di formule $A_1, \cdots, A_n$ di Λ è detta una **dimostrazione** o **prova** in Λ se, per ogni i compreso tra 1 ed n, o $A_i \in Ax$, cioè è un assioma di Λ, oppure è una conseguenza diretta mediante una delle regole di $\mathcal{R}$ di alcune delle formule che la precedono nella sequenza.

Teoremi

◇ Una formula A di Λ è detta un *teorema* di Λ se esiste una dimostrazione di Λ che ha A come ultima formula. Tale dimostrazione è detta *una dimostrazione di* A in Λ.

◇ Indicheremo con $\vdash A$ il fatto che A è un teorema di Λ.

◇ Scriveremo anche $\vdash_\Lambda A$ oppure $\vdash_\mathcal{R} A$

◇ Sia Γ un insieme di formule. Diciamo che una formula A è una conseguenza di Γ (lo scriviamo $\Gamma \vdash A$ se esiste una sequenza di formule $A_1, \ldots, A_n$ tale che A è A_n e per ciascun i compreso tra 1 e n si ha che o $A_i \in Ax$, o $A_i \in \Gamma$ o A_i è conseguenza diretta di alcune delle formule che la precedono nella sequenza. Tale sequenza è detta una *derivazione* o *prova di* A *da* Γ *in* Λ. Gli elementi di Γ sono detti le *premesse*, o *ipotesi*, o anche *assunzioni* di A.

Chiusura deduttiva

Sia Γ un insieme di formule.:
◇ La *chiusura deduttiva* di Γ, denotata con $Cn(\Gamma)$, è l'insieme di tutte le formule che sono conseguenza di Γ (cioè $Cn(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$)

Correttezza e Completezza

- ◇ Un apparato deduttivo $\mathcal{R}$ è *corretto* se per ogni formula $A \in \mathbf{F}$,

$$\vdash_{\mathcal{R}} A \text{ implica } \models A$$

- ◇ Un apparato deduttivo $\mathcal{R}$ è *completo* rispetto a una classe di formule $\Gamma \subseteq \mathbf{F}$, se per ogni formula $A \in \Gamma$,

$$\models A \text{ implica } \vdash_{\mathcal{R}} A$$

- ◇ **Teorema di completezza**:

$$\vdash \ \equiv \ \models$$

Riassumendo

sintassi	semantica
$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A$ derivabilità	$\Gamma \models A$ conseguenza logica
$\vdash_{\mathcal{R}} A$ teorema	$\models A$ validità

$$\boxed{\vdash \ \equiv \models}$$

Richiami di logica e deduzione proposizionale

- ◇ La logica proposizionale
- ◇ I tableau proposizionali

I tableau proposizionali

- ◇ Metodo di dimostrazione per refutazione
- ◇ Può agire su formule in forma non clausale

Formule di tipo α e β

α	α_1 α_2	β	β_1 β_2
$A \wedge B$	A B	$A \vee B$	A B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$ $\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$ $\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A $\neg B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$ B

Per ogni valutazione booleana $I_{\mathcal{V}}$ e per tutte le formule di tipo α e β si ha:

$$I_{\mathcal{V}}(\alpha) = I_{\mathcal{V}}(\alpha_1) \wedge I_{\mathcal{V}}(\alpha_2)$$

$$I_{\mathcal{V}}(\beta) = I_{\mathcal{V}}(\beta_1) \vee I_{\mathcal{V}}(\beta_2).$$

Inoltre, per ogni formula di tipo α e β si ha che $\alpha \leftrightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ e $\beta \leftrightarrow (\beta_1 \vee \beta_2)$ sono tautologie.

◇ Le formule α sono dette **congiuntive** e le β **disgiuntive**.

Regole di espansione dei tableau

$\neg$-regole) $\quad \dfrac{\neg\neg A}{A} \quad \dfrac{\neg\top}{\bot} \quad \dfrac{\neg\bot}{\top}$

α-regole) $\quad \dfrac{\alpha_1 \wedge \alpha_2}{\alpha_1, \alpha_2} \quad \dfrac{\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)}{\neg\alpha_1, \neg\alpha_2} \quad \dfrac{\neg(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)}{\alpha_1, \neg\alpha_2}$

β-regole) $\quad \dfrac{\beta_1 \vee \beta_2}{\beta_1 | \beta_2} \quad \dfrac{\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)}{\neg\beta_1 | \neg\beta_2} \quad \dfrac{\beta_1 \rightarrow \beta_2}{\neg\beta_1 | \beta_2}$

Regole di espansione dei tableau (cont)

Riassumendo:

1. $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ 2. $\dfrac{\neg\top}{\bot}$ 3. $\dfrac{\neg\bot}{\top}$ 4. $\dfrac{\alpha}{\alpha_1\ , \alpha_2}$ 5. $\dfrac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$

Regole di espansione dei tableau (cont 1)

Il connettivo $\leftrightarrow$ può essere trattato riscrivendo

$$A \leftrightarrow B \ \textit{come} \ (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

ma si può anche introdurre una regola composta a esso specifica:

$\leftrightarrow$-regole) $\quad \dfrac{A \leftrightarrow B}{A, B | \neg A, \neg B} \quad \dfrac{\neg(A \leftrightarrow B)}{A, \neg B | \neg A, B}$

Definizione di tableau

Dato Γ, un **tableau** per Γ è un albero binario i cui nodi sono etichettati da formule di Γ.

Dato Γ, l'albero binario costituito dal solo nodo radice etichettato dalla congiunzione delle formule di Γ è detto **tableau iniziale** per Γ e denotato $\mathbf{T}_0$.

Passo di espansione di tableau

Dato Γ, se $\mathbf{T}_1$ è un tableau per Γ e A è il nodo foglia su un ramo **B** di $\mathbf{T}_1$, possiamo costruire un tableau $\mathbf{T}_2$ per Γ attraverso un **passo di espansione**:

1. Se $\neg\neg B$, oppure $\neg\top$ oppure $\neg\bot$ occorrono sul ramo **B** di $\mathbf{T}_1$ che porta alla foglia A, allora si aggiunge come figlio di A un ramo contenente B, $\bot$ oppure $\top$, rispettivamente (regole 1, 2 e 3 della tabella);
2. Se una formula di tipo α occorre sul ramo **B** di $\mathbf{T}_1$ che porta alla foglia A, allora si aggiunge come figlio di A un ramo contenente α_1 e α_2 in successione (regola 4 della tabella);

Passo di espansione di tableau (cont)

3. Se una formula di tipo β occorre sul ramo **B** di $\mathbf{T}_1$ che porta alla foglia A, allora si aggiungono come figli di A due rami contenenti rispettivamente β_1 e β_2 (regola 5 della tabella).

Il tableau $\mathbf{T}_2$ si dice ottenuto da $\mathbf{T}_1$ con **un passo di espansione**.

Espansione di tableau

Dati due tableau $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ per Γ, $\mathbf{T}_2$ è una **espansione coerente** di $\mathbf{T}_1$ se esiste un nodo n in $\mathbf{T}_1$ tale che $\mathbf{T}_2$ è stato ottenuto da $\mathbf{T}_1$ attraverso un numero finito di passi di espansione ognuno dei quali ha espanso la formula che etichetta n su tutte le foglie del sottoalbero che ha come radice n.

Un tableau **T** per Γ si dice **ben costruito** se è stato ottenuto per espansioni coerenti dal tableau radice e nessun nodo è stato oggetto di più di una espansione coerente.

Un tableau **T** per Γ è **completo** se è ben costruito e non può più essere oggetto di espansioni coerenti.

Osservazioni

Il **ramo** di un tableau è la **congiunzione** delle formule che appaiono in esso.

Un tableau è una **disgiunzione di congiunzioni**.

Soddisfacibililtà di tableau

Un **ramo** di un tableau è **soddisfacibile** se la congiunzione delle formule che etichettano i suoi nodi è soddisfacibile.

Un **tableau è soddisfacibile** se almeno uno dei suoi rami è soddisfacibile.

Osserviamo che l'espansione preserva la soddisfacibilità, ovvero se un tableau è soddisfacibile il tableau ottenuto attraverso l'applicazione di una regola di espansione è ancora soddisfacibile.

Soddisfacibililtà di tableau (cont)

Un **ramo** di un tableau si dice **chiuso** se, per qualche formula A, entrambe A e $\neg A$ etichettano nodi che occorrono sul ramo, oppure $\neg\top$ o $\bot$ occorrono sul ramo. Altrimenti il ramo è detto **aperto**.

Un **tableau è chiuso** se tutti i suoi rami sono chiusi, altrimenti è **aperto.**

Tableau refutazioni

Una **tableau-refutazione di una formula A** è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da A.

Una **tableau-refutazione di una formula A da** Γ è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\Gamma \cup \{A\}$.

Tableau dimostrazioni

Una **tableau-dimostrazione** di una formula A è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\neg A$. A è un **teorema del sistema di calcolo dei tableau** se A ha una tableau-dimostrazione. In questo caso scriviamo:

$$\vdash_T A$$

Una **tableau-deduzione** di una formula A da Γ, insieme finito di formule, è un tableau chiuso la cui radice è etichettata da $\Gamma \cup \{\neg A\}$. In questo caso scriviamo:

$$\Gamma \vdash_T A$$

Algoritmo per la costruzione di tableau

Per costruire una tableau-deduzione per $\Gamma \vdash_T A$:

- Costruiamo il tableau $\mathbf{T}_0$ etichettato con $\Gamma \cup \{\neg A\}$.
- **Finché ci sono nodi non marcati**, scegliamo un nodo da espandere e
  - **facciamo un passo di espansione coerente**, cioè espandiamo il nodo rispetto a tutte le foglie a esso sottostanti nei rami ancora aperti;
  - **marchiamo** il nodo espanso;
  - **verifichiamo** se i rami interessati dall'espansione sono chiusi e li marchiamo tali.

Algoritmo per la costruzione di tableau (cont)

Il procedimento si arresta quando tutti i rami sono stati chiusi oppure quando il tableau è completo. Se il tableau è chiuso, A è dedotto a partire da Γ. Altrimenti, se il tableau è completo e c'è ancora qualche ramo aperto, abbiamo provato che il tableau è consistente, quindi $\Gamma \cup \{\neg A\} \not\vdash_T$, cioè $\Gamma \not\vdash_T A$.

Correttezza e completezza

$$\vdash_T A \text{ sse } \models A$$

$$\Gamma \vdash_T A \text{ sse } \Gamma \models A$$