# Ragionamento Automatico

Richiami di calcolo dei predicati

Lezione 2



## Richiami di logica del primo ordine

(SLL: Capitolo 7)

◇ Sintassi
◇ Semantica



## Il linguaggio: i simboli logici

Un **linguaggio del primo ordine** $\mathcal{L}$ è costruito sui seguenti insiemi di simboli: **Simboli Logici**

- I connettivi proposizionali: $\neg$,$\wedge$,$\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$;
- Le costanti proposizionali $\top$ e $\bot$;
- Il simbolo di uguaglianza $=$, eventualmente assente;
- I simboli separatori '(', ')' e ',';
- Un'infinità numerabile di simboli di **variabile individuale** $x_1$, $x_2$, $\ldots$;
- Il simbolo di **quantificazione universale** $\forall$;
- Il simbolo di **quantificazione esistenziale** $\exists$.



## Il linguaggio: i parametri

**Parametri**

- Un insieme finito o numerabile di **simboli di predicato**, ognuno dei quali ha associato un intero positivo $n$ detto arità. Un predicato di arità n è detto n-ario;
- Un insieme finito o numerabile di **simboli di funzione**, ognuno dei quali ha associato un intero positivo detto arità. Una funzione di arità $n$ è detta $n$-aria;
- Un insieme finito o numerabile di **simboli di costante**.

## Termini

L'insieme Term dei **termini** di $\mathcal{L}$ è l'insieme induttivo definito come segue:

1. Ogni simbolo di costante e di variabile è un termine;
2. Se $t_1 \dots t_n$ sono termini e $f$ è un simbolo di funzione n-aria, $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine (detto **termine funzionale**).

Esempi: $x$, $c$, $f(x, y + c)$,...



## Formule atomiche

L'insieme Atom degli **atomi** o **formule atomiche** è definito induttivamente come segue:

1. $\perp$ e $\top$ sono atomi;
2. Se $t_1$ e $t_2$ sono termini allora $t_1 = t_2$ è un atomo;
3. Se $t_1, \dots, t_n$ sono termini e P è un simbolo di predicato n-ario $P(t_1, \dots, t_n)$ è un atomo.

Esempi: $P(x)$, $Q(x, c)$, $R(x, f(x, y + c))$,...



## Formule

L'insieme delle **formule** di $\mathcal{L}$ è l' insieme induttivo definito come segue:

- Ogni atomo è una formula;
- Se $A$ è una formula $\neg A$ è una formula;
- Se $\circ$ è un connettivo binario, $A$ e $B$ due formule, $A \circ B$ è una formula;
- Se $A$ è una formula, $x$ una variabile, $\forall x A$ e $\exists x A$ sono formule.

Esempi: $P(x)$, $\exists x Q(x, c)$, $\forall z R(x, f(x, y + c))$,...



## Variabili in termini

L'insieme $var(t)$ delle **variabili di un termine** $t$ è definito come segue:

i. $var(t) = \{t\}$, se $t$ è una variabile;

ii. $var(t) = \{\}$, se $t$ è una costante;

iii. $var(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$

Un **termine** si dice **chiuso** – o anche **ground** – se non contiene variabili.

## Variabili in formule atomiche

L'insieme delle variabili in una formula atomica $R(t_1, \ldots, t_n)$ è:

$$var(R(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$$

Un **atomo** si dice **chiuso** – o anche **ground** – se non contiene variabili



## Variabili libere e legate

1. Se $A$ è un atomo, $x$ **occorre libera** in $A$ se $x$ occorre in $A$;
2. $x$ occorre libera in $(\neg A)$ se $x$ occorre libera in $A$;
3. $x$ occorre libera in $(A \circ B)$ se $x$ occorre libera in $A$ o $x$ occorre libera in $B$;
4. $x$ occorre libera in $\forall z A$ (rispettivamente $\exists z A$) se $x$ occorre libera in $A$ e $x \neq z$.

Una **occorrenza** di una variabile $x$, in una formula, si dice **vincolata** o **legata** se non è libera.



## Enunciati

Un **enunciato** – detto altrimenti **formula chiusa** – è una formula senza occorrenze libere di variabili.



## Interpretazioni e modelli

Una **struttura** per il linguaggio $\mathcal{L}$ è una coppia $\mathcal{S} = \langle D, I \rangle$ dove:

- $D$ è un insieme non vuoto chiamato **dominio** di $\mathcal{S}$;
- $I$ è una funzione chiamata **interpretazione**. $I$ associa:
  - a ogni simbolo di costante $c$ un elemento $c^I \in D$;
  - a ogni simbolo di funzione n-aria $f$ una funzione $f^I : D^n \to D$;
  - a ogni simbolo di predicato n-ario $P$ una relazione n-aria $P^I \subseteq D^n$.

## Verità in una struttura

◇ Assegnazione alle variabili

Sia $\mathcal{V}ar$ l'insieme delle variabili di un linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$, una **assegnazione**, o **ambiente**, o **stato delle variabili** $\eta$ in una struttura $\mathcal{S} = \langle D, I \rangle$ è una funzione dall'insieme delle variabili $\mathcal{V}ar$ all'insieme $D$:

$$\eta : \mathcal{V}ar \mapsto D$$



## Interpretazione dei termini

Sia $\mathcal{S} = \langle D, I \rangle$ una struttura per $\mathcal{L}$ e sia $\eta$ una assegnazione. Estendiamo tale assegnazione a una assegnazione $\overline{\eta} = \langle I, \eta \rangle$ sui termini, ricorsivamente come segue:

- Per ogni variabile $x$, $x^{I,\eta} = x^{\eta}$;
- Per ogni costante $c$, $c^{I,\eta} = c^{I}$;
- Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini ed $f$ è una funzione $n$-aria, allora

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{I,\eta} = f^{I}(t_1^{I,\eta}, \ldots, t_n^{I,\eta}).$$



## Soddisfacibilità di formule

La **soddisfacibilità** di una formula $\phi$, in una struttura $\mathcal{S}$ e rispetto a una assegnazione $\eta$ alle variabili, è denotata con:

$$\mathcal{S}, \eta \models \phi$$

che, intuitivamente, dice che la struttura $\mathcal{S}$ soddisfa $\phi$ sse è vera l'interpretazione di $\phi$ determinata da $\mathcal{S}$ e in cui una variabile $x$ − ovunque occorra libera in $\phi$ − è valutata come $x^{\eta}$.



## Soddisfacibilità: definizione

Sia $\mathcal{S} = \langle D, I \rangle$ una struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$ e $\eta$ una assegnazione in $\mathcal{S}$.

1. $(\mathcal{S}, \eta) \models \top$ e $(\mathcal{S}, \eta) \not\models \bot$;
2. Se $A$ è una formula atomica del tipo $P(t_1, \ldots, t_n)$, allora
$$(\mathcal{S}, \eta) \models P(t_1, \ldots, t_n) \text{ sse } \langle t_1^{I,\eta} \ldots t_n^{I,\eta} \rangle \in P^{I};$$
3. se $A$ è una formula atomica del tipo $t_1 = t_2$ allora
$$(\mathcal{S}, \eta) \models t_1 = t_2 \text{ sse } t_1^{I,\eta} = t_2^{I,\eta};$$
4. $(\mathcal{S}, \eta) \models \neg A$ sse $(\mathcal{S}, \eta) \not\models A$;

## Soddisfacibilità: definizione (cont)

5. $(\mathcal{S}, \eta) \models A \wedge B$ sse $(\mathcal{S}, \eta) \models A$ e $(\mathcal{S}, \eta) \models B$;
6. $(\mathcal{S}, \eta) \models A \vee B$ sse $(\mathcal{S}, \eta) \models A$ oppure $(\mathcal{S}, \eta) \models B$;
7. $(\mathcal{S}, \eta) \models (A \rightarrow B)$ sse $(\mathcal{S}, \eta) \models A$ implica che $(\mathcal{S}, \eta) \models B$;
8. $(\mathcal{S}, \eta) \models (A \leftrightarrow B)$ sse $(\mathcal{S}, \eta) \models A$ e $(\mathcal{S}, \eta) \models B$ oppure $(\mathcal{S}, \eta) \not\models A$ e $(\mathcal{S}, \eta) \not\models B$;
9. $(\mathcal{S}, \eta) \models \forall x A$ sse per ogni $d \in D$ è verificato che $\mathcal{S} \models A(\eta[d/x])$;



## Soddisfacibilità: definizione (cont)

10. $(\mathcal{S}, \eta) \models \exists x A$ sse esiste un $d \in D$ per cui è verificato che $\mathcal{S} \models A(\eta[d/x])$.

Dove l'assegnazione $\eta[d/x]$ indica la funzione che si comporta esattamente come $\eta$ eccetto che sulla variabile $x$, dove assume il valore $d$:

$$\eta[d/x](y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ y^\eta & \text{se } y \neq x \end{cases}$$



## Soddisfacibilità : proprietà

Se $A$ è chiusa, il suo valore di verità non dipende dal particolare stato delle sue variabili (o assegnazione) $\eta$.

Teorema: Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ due strutture che hanno lo stesso dominio e che concordano nell'interpretazione di tutti i parametri che occorrono in $\phi$. Allora

$$\mathcal{S}, \eta \models \phi \text{ sse } \mathcal{S}', \eta \models \phi.$$

$\mathcal{S}, \eta \models \phi$, dove $\phi$ è una **formula chiusa**, o per ogni assegnazione $\eta$ oppure per nessuna. Pertanto, data una formula chiusa $\phi$: $\phi$ è vera in $\mathcal{S}$ oppure essa è falsa in $\mathcal{S}$.



## Modelli

Se per una formula $A \in \mathcal{L}$, $(\mathcal{S}, \eta) \models A$ è verificato per ogni assegnazione alle variabili, allora scriviamo $\mathcal{S} \models A$ e diciamo che $\mathcal{S}$ è un **modello** di $A$, ovvero che $A$ è **vera** in $\mathcal{S}$.

Una formula $A \in \mathcal{L}$ è **valida** sse è vera in tutte le strutture di $\mathcal{L}$ e lo scriviamo $\models A$.

Un insieme di formule $\Gamma$ è **soddisfacibile** se esiste una struttura $\mathcal{S}$ ed una assegnazione $\eta$ tale che $(\mathcal{S}, \eta) \models A$ per ogni $A \in \Gamma$.

La soddisfacibilità per una formula chiusa $A$ coincide con la verità.

## Implicazione logica (entailment)

Sia Γ un insieme di formule e $A$ una formula. Allora Γ **implica logicamente** $A$

$$\Gamma \models A$$

sse per ogni struttura $\mathcal{S}$ del linguaggio e ogni assegnazione $\eta$ alle variabili, tale che $(\mathcal{S}, \eta) \models B$ per ogni $B \in \Gamma$, è verificato che $(\mathcal{S}, \eta) \models A$.