Ragionamento Automatico

Tableau al primo ordine

Lezione 3

Deduzione automatica in FOL

(SSL: Capitolo 8, par.7)

◇ Tableau al primo ordine

γ e δ formule

Formule del primo ordine:

- γ (**universalmente quantificate**) sono quelle formule $A[x]$ la cui soddisfacibilità implica la soddisfacibilità di $A[t/x]$ per qualunque termine t.
- δ (**esistenzialmente quantificate**) sono quelle formule $A[x]$ la cui soddisfacibilità implica la soddisfacibilità di $A[t/x]$ per qualche termine t.

Espansione di γ e δ formule

Per introdurre le regole di espansione per le formule di tipo γ e δ, estendiamo linguaggio $\mathcal{L}$ al linguaggio $\mathcal{L}^{sko}$ che include una quantità numerabile di nuovi simboli di costante, nuovi simboli di funzione, e una quantità numerabile di nuove variabili chiamate *metavariabili* o anche *variabili libere*. Se f e $v_1, \ldots, v_m$ appartengono al linguaggio esteso $\mathcal{L}^{sko}$, il termine $f(v_1, \ldots, v_m)$ viene definito *termine di Skolem*.

γ	γ_0
$\forall x \phi(x)$	$\phi[v/x]$
$\neg\exists x \phi(x)$	$\neg\phi[v/x]$

δ	δ_0
$\exists x \phi(x)$	$\phi[f(v_1, \ldots, v_n)/x]$
$\neg\forall x \phi(x)$	$\neg\phi[f(v_1, \ldots, v_n)/x]$

dove v è una nuova variable libera e dove f è un nuovo simbolo di funzione che non compare in δ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono tutte e sole le variabili libere che occorrono in δ.

Espansione

L'**espansione dei tableau** nel caso della logica del primo ordine è in tutto analoga al caso proposizionale. Per quanto riguarda il trattamento delle formule quantificate, ci si basa su una **skolemizzazione dinamica**, cioè le δ formule vengono skolemizzate man mano che si procede con l'espansione. Inoltre, mentre le δ formule (così come le α e β formule) possono essere espanse una sola volta

le γ formule possono essere espanse più volte.

Sostituzione per i Tableau

Sostituzione per i Tableau Sia Γ un insieme di formule. Se $\mathbf{T}$ è un tableau per Γ e σ una sostituzione libera per ogni formula in $\mathbf{T}$, allora $\mathbf{T}\sigma$ è anche esso un tableau per Γ.

Chiamiamo **atomico** un tableau in cui non ci sono più regole α, β e δ applicabili.

Sostituzioni Atomiche Data una formula ϕ, se un tableau per ϕ è stato espanso a un tableau $\mathbf{T}$ atomico, allora ogni sostituzione σ concerne solo variabili libere, pertanto è libera per $\mathbf{T}$.

Soddisfacibilità 1

Un tableau $\mathbf{T}$ è **soddisfacibile** se esiste una struttura $\mathcal{S}$ tale che per ogni assegnazione η alle variabili si ha che: $(\mathcal{S}, \eta) \models \mathbf{T}$, cioè esiste un ramo $\mathbf{B}$ in $\mathbf{T}$ tale che $(\mathcal{S}, \eta) \models \mathbf{B}$; dove un ramo $\mathbf{B}$ è un insieme di formule e $(\mathcal{S}\eta) \models \mathbf{B}$ significa che $(\mathcal{S}, \eta) \models \phi$ per ogni ϕ nel ramo.

Se $\mathbf{T}$ è un tableau la cui radice è etichettata da una formula soddisfacibile, allora $\mathbf{T}$ **è soddisfacibile**.

Soddisfacibilità 2

La condizione che un modello soddisfi un ramo di un tableau per tutte le assegnazioni η alle variabili libere significa che le variabili libere sono considerate come variabili quantificate universalmente.

In altri termini, se consideriamo un tableau come la disgiunzione dei suoi rami $\mathbf{B}_1 \vee \ldots \vee \mathbf{B}_m$, dove ciascun $\mathbf{B}_i$ è la congiunzione delle formule che occorrono nel ramo, la condizione che $(\mathcal{S}, \eta) \models \mathbf{B}_i$, per ogni η, $1 \leq i \leq m$, vuol dire che la formula $\phi[x, f(x)]$ in $\mathbf{B}_i$, dove x è una variabile libera e $f(x)$ è un termine di Skolem, è interpretata come $\forall x \phi[x, f(x)]$. Pertanto il termine **variabili libere** è usato per indicare che sono **libere per la sostituzione**.

Espansione di γ e δ formule

Enunciamo qui di seguito il lemma per la soddisfacibilità e il teorema di correttezza mostrato da Hähnle e Schmitt per i tableau liberalizzati:

Se $\mathbf{T}$ è un tableau soddisfacibile e $\mathbf{T}'$ è ottenuto da $\mathbf{T}$ applicando una regola dei tableau, allora $\mathbf{T}'$ è soddisfacibile.

Sia $\mathbf{T}$ è un tableau soddisfacibile e τ una sostituzione che associa a ogni variabile libera in $\mathbf{T}$ un termine nel linguaggio $\mathcal{L}^{sko}$ di $\mathbf{T}$,allora $\mathbf{T}\tau$ è soddisfacibile.

Se un enunciato ϕ ha un **tableau chiuso** allora ϕ è **insoddisfacibile**.

Correttezza e completezza dei tableau

Completezza Se ϕ è un enunciato valido, esiste una dimostrazione di ϕ che fa uso del metodo dei tableau. Inoltre esiste una dimostrazione di ϕ, per mezzo del metodo dei tableau, in cui il tableau $\mathbf{T}$ per $\neg\phi$ è atomico ed è stata applicata un'unica regola di sostituzione all'ultimo passo di espansione di $\mathbf{T}$. La regola ha utilizzato una sostituzione σ che è un mgu.

I **tableau** sono un metodo di calcolo **corretto e fortemente completo**, vale a dire che non solo possiamo stabilire che se $\vdash \alpha$ allora $\models \alpha$, ma anche che se $\Gamma \vdash \alpha$ allora $\Gamma \models \alpha$.

Correttezza e completezza dei tableau (cont))

Correttezza, completezza e compattezza per i tableau possono essere enunciati come segue.

> Se Γ è un insieme di enunciati e ϕ un enunciato: $\Gamma \models \phi$ sse $\Gamma \vdash_T \phi$ sse ϕ ha una prova con il metodo dei tableau da un sottoinsieme finito Γ_0 di Γ.

Riassunto regole

$$\frac{\neg(\forall x P(x) \wedge Q)}{\neg\forall x P(x) | \neg Q} \qquad \frac{\neg(\exists x P(x) \wedge Q)}{\neg\exists x P(x) | \neg Q}$$

$$\frac{\neg(\forall x P(x) \vee Q)}{\neg\forall x P(x), \neg Q} \qquad \frac{\neg(\exists x P(x) \vee Q)}{\neg\exists x P(x), \neg Q}$$

$$\frac{\forall x P(x) \rightarrow Q}{\neg\forall x P(x) | Q} \qquad \frac{\exists x P(x) \rightarrow Q}{\neg\exists x P(x) | Q}$$

$$\frac{\neg(\forall x P(x) \rightarrow Q)}{\forall x P(x), \neg Q} \qquad \frac{\neg(\exists x P(x) \rightarrow Q)}{\exists x P(x), \neg Q}$$

$$\frac{\forall x P(x) \leftrightarrow Q}{\forall x P(x), Q | \neg\forall x P(x), \neg Q} \qquad \frac{\neg(\forall x P(x) \leftrightarrow Q)}{\forall x P(x), \neg Q | \neg\forall x P(x), Q}$$

γ	γ_0
$\forall x \phi(x)$	$\phi[v/x]$
$\neg\exists x \phi(x)$	$\neg\phi[v/x]$

δ	δ_0
$\exists x \phi(x)$	$\phi[f(v_1, \ldots, v_n)/x]$
$\neg\forall x \phi(x)$	$\neg\phi[f(v_1, \ldots, v_n)/x]$

Esempi

Mostriamo ora alcuni esempi di espansioni di tableau. Verificare che da $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge P(x))$ si può derivare $\forall x Q(x)$. Avremo il seguente tableau:

$$
\begin{array}{c}
\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge P(x)), \neg \forall x Q(x) \\
\hline
(P(v_1) \to Q(v_1)) \wedge P(v_1), \quad \neg \forall x Q(x) \\
\hline
(P(v_1) \to Q(v_1)) \wedge P(v_1), \neg Q(c_1) \\
\hline
P(v_1) \to Q(v_1), P(v_1), \neg Q(c_1) \\
\hline
\neg P(v_1), P(v_1), \neg Q(c_1) \quad | \quad Q(v_1), P(v_1), \neg Q(c_1) \\
\hline
\star \qquad\qquad \star \;\; \sigma = \{c_1/v_1\}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \gamma\text{-regola} \\ \delta\text{-regola} \\ \alpha\text{-regola} \\ \beta\text{-regola} \\ \\
\end{array}
$$

Commenti

◇ L'istanziazione delle variabili libere viene ritardata; si cerca prima di applicare la δ-regola

◇ Le variabili libere sono **rigide**, cioè vanno istanziate tutte allo stesso modo in tutti i rami

Esempi

Vediamo, ora, un esempio di tableau la cui chiusura necessita della **riapplicazione** della γ-*regola*.

Ci sono tre cubi sul tavolo: A, B e C. A è su B, B è su C. A è verde e C non è verde. Vogliamo dedurre che c'è un cubo verde su un cubo non verde. Ovvero vogliamo mostrare che

$$Verde(A) \wedge \neg Verde(C) \wedge Su(A, B) \wedge Su(B, C)$$

$$\vdash_T \exists x \exists y \; (Su(x, y) \wedge Verde(x) \wedge \neg Verde(y))$$

Continua

Avremo il seguente tableau:

$$
\begin{array}{c}
\neg \exists x \exists y \; (Su(x, y) \wedge Ve(x) \wedge \neg Ve(y)) \\
Ve(A) \wedge \neg Ve(C) \wedge Su(A, B) \wedge Su(B, C) \\
\hline
Ve(A), \neg Ve(C), Su(A, B), Su(B, C) \\
\hline
\neg Su(v_1, v_2) \vee \neg Ve(v_1) \vee Ve(v_2) \\
\hline
\neg Su(v_1, v_2) \,| \quad \neg Ve(v_1) \,| \quad Ve(v_2) \\
* \qquad\quad * \qquad\qquad \\
\hline
\neg Su(v_3, v_4) \vee \neg Ve(v_3) \vee Ve(v_4) \\
\hline
\neg Su(v_3, v_4) \,| \quad \neg Ve(v_3) \,| \quad Ve(v_4) \\
* \qquad\qquad * \qquad\qquad *
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \alpha\text{-regola} \\ \gamma\text{-regola} \\ \beta\text{-regola} \\ \\ \gamma\text{-regola} \\ \beta\text{-regola} \\ \\
\end{array}
$$

chiusura con $\sigma = \{A/v_1, B/(v_2, v_3), C/v_4\}$

Esempi

Vediamo ora un esempio di tableau che **non chiude**.
Verificare che $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ non è un teorema.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg(\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x))}{\exists x P(x), \neg\forall x P(x))}}{P(c_1)}}{\neg P(c_2)}$$

Si può osservare che il tableau è completamente espanso e non è chiuso perché c_1 e c_2 sono due costanti di Skolem diverse.

Esempi

Vediamo ora un altro esempio di tableau che non chiude, questa volta a causa della riapplicabilità della regola γ.

Verificare che $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$ non è un teorema.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg(\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y))}{\forall x \exists y P(x,y), \neg\exists x \forall y P(x,y))}}{P(v_1, f_1(v_1))}}{\neg P(v_2, f_2(v_2))}$$

Si può osservare che il tableau non è completamente espanso, in quanto la regola γ è riapplicabile; esso non è chiuso e non può mai chiudere, perché ogni volta chi si riapplica la regola γ si genera una nuova funzione di Skolem, sempre diversa dalle precedenti.

Esempi

Vediamo ora un esempio di tableau che porterebbe a una conclusione errata se non venisse rispettato il vincolo della rigidità delle variabili. Proviamo a dimostrare se:

$$\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x))$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)))}{\neg\neg\forall x\ (P(x) \lor Q(x)), \neg\forall x\ P(x), \neg\forall x\ Q(x)}}{(P(v_1) \lor Q(v_1)), \neg P(c_1), \neg Q(c_2)}}{\neg P(c_1)}}{\neg Q(c_2)}}{P(v_1) \quad | \quad Q(v_1)}$$