Ragionamento Automatico
Calcolo dei Sequenti

Lezione 5

Il calcolo dei sequenti

Materiale cartaceo distribuito in aula

◇ Il calcolo dei sequenti nella logica proposizionale

◇ Il calcolo dei sequenti nella logica predicativa

Il calcolo dei sequenti

◇ introdotto da Gentzen nel 1934
poi ripresa da Gallier nel 1986 e da altri dopo di lui

Si basa su:

◇ Regole che si applicano non a formule, ma ad *asserzioni di derivabilità* chiamate sequenti della forma

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

◇ Le regole sono tali che i connettivi possono solo essere introdotti e mai eliminati

Regole di inferenza per i sequenti

Quattro tipi di regole: Assiomi, Taglio, Strutturali, Logiche.

Iniziamo da Ax

$$\frac{}{(Ax) \quad \Gamma \vdash B \quad se \quad B \in \Gamma}$$

Un sequente è vero se B compare nelle ipotesi Γ

Regole di inferenza per i sequenti: Taglio

$$(taglio) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Regole strutturali

- Ordine ipotesi irrilevante

$$(perm) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A} \qquad \text{se } \Gamma' \text{ è una permutazione di } \Gamma$$

- Contrazione

$$(contr) \qquad \frac{\Gamma, B, B \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

- Indebolimento

$$(indeb) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

Regole logiche

Solo introduzione di connettivi, ma distinguiamo tra destra e sinistra.

Regole per l'AND

$$(\wedge l.1) \quad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \qquad (\wedge r) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

$$(\wedge l.2) \quad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

Regole logiche (cont)

Regole per l'OR

$$(\vee l) \quad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \qquad (\vee r.1) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$(\vee r.2) \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Regole logiche (cont)

Regole per l'implicazione

$$(\to l)\ \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C} \qquad (\to r)\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Regole per trattare la negazione

Ammettiamo sequenti con la parte destra vuota: $\Gamma \vdash$
Assenza di conclusione significa inconsistenza nelle premesse

la regola "ex falso quodlibitur" diventa

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$$

cioè una regola di indebolimento a destra, quindi strutturale.

Le regole per introdurre la negazione sono:

$$(\neg l)\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash} \qquad (\neg r)\ \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Commenti

Il calcolo appena introdotto si chiama LJ e per esso vale un importante teorema:
il teorema della eliminazione del taglio.
Per ogni dimostrazione che faccia uso della regola del taglio se ne può trovare una equivalente che non la usa.

Senza usare il taglio, vale la proprietà della sottoformula che permette la meccanizzazione del calcolo. LJ è un calcolo per la logica intuizionista. Per estenderlo alla logica classica bisognerebbe introdurre:

$$(RAA)\ \frac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}$$

ma per essa non vale il principio della sottoformula. Quindi estendiamo il calcolo in un altro modo, più radicale.

Calcolo dei sequenti LK

$$\Gamma \vdash \Delta$$

con $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ e $\Delta = B_1, \ldots, B_m$ sequenze di formule finite, eventualmente vuote.
Le formule di Γ vanno lette in AND, quelle di Δ in OR, cioè:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Regole per LK

(Ax)	$A \vdash A$	$(taglio)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$
$(perm - l)$	$\dfrac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}$	$(perm - r)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma, \vdash \Delta, B, A\Delta'}$
$(contr - l)$	$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$	$(contr - r)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$

Regole per LK (cont)

$(indeb - l)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$	$(indeb - r)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$
$(\wedge l.1)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$(\wedge r)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$
$(\wedge l.2)$	$\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$		

Regole per LK (cont)

$(\vee l)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$(\vee r.1)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
		$(\vee r.2)$	$\dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$

Regole per LK (fine)

$(\rightarrow l)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$	$(\rightarrow r)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$
$(\neg l)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$(\neg r)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$

Esempio di deduzione 1

Dimostriamo che: $\vdash A \vee \neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash \neg A, A}}{\vdash A \vee \neg A, A}}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}}{\vdash A \vee \neg A}$$

Esempio di deduzione 2

Dimostriamo che: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \qquad \dfrac{A \vdash A}{A \wedge B \vdash A}}{(A \wedge B) \vdash (B \wedge A)}}{\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)}$$

Esempio di deduzione 3

Dimostriamo che: $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}}{\vdash A \vee B, \neg A}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{\vdash B, \neg B}}{\vdash A \vee B, \neg B}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}$$

Commenti

Guardare il libro di Asperti Ciabattoni per una idea di come fare la dimostrazione sulla eliminazione del taglio e per una discussione sulle regole strutturali.

Se si levano (alcune del)le regole strutturali si ottengono altre logiche, alcune molto importanti, ad esempio:

- levo indebolimento e ottengo logica della rilevanza usata in AI: premesse devono essere rilevanti per conclusioni
- levo indebolimento e contrazione e ottengo logica lineare di Girard usata per trattare risorse
- levo tutte le regole struturali e ottengo il calcolo di Lambek usato per linguaggio naturale (grammatiche categioriali)

Calcolo dei sequenti per la logica del 1^o ordine

$(\forall l)$	$\dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}$	$(\forall r)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}$
$(\exists l)$	$\dfrac{\Gamma, A[y/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}$	$(\exists r)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}$

Con la condizione per $(\forall r)$ e $(\exists l)$ che la variabile y non compaia nel sequente conclusione.

Esempio predicativo 1

Dimostriamo che: $\exists x\ (A \rightarrow B(x)) \vdash A \rightarrow \exists x B(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A, \exists x B(x) \qquad \dfrac{B(x), A \vdash B(x)}{B(x), A \vdash \exists x B(x)}}{A \rightarrow B(x), A \vdash \exists x B(x)}}{A \rightarrow B(x) \vdash A \rightarrow \exists x B(x)}}{\exists x\ (A \rightarrow B(x)) \vdash A \rightarrow \exists x B(x)}$$

Esempio predicativo 2

Dimostriamo che: $\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A(x), \neg A(x)}{\vdash A(x), \exists x \neg A(x)}}{\vdash \forall x A(x), \exists x \neg A(x)}}{\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)}$$

Commenti

Il calcolo dei sequenti si può implementare. Un algoritmo per il calcolo dei sequenti può essere un argomento di un seminario a fine corso.