Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale

Anno Accademico 2009–2010

Appunti dalle lezioni di

RICERCA OPERATIVA

Stefano Lucidi

Dipartimento di Informatica e Sistemistica "A. Ruberti"

Università di Roma "La Sapienza"

versione preliminare

Indice

1 Introduzione **4**
1.1 Introduzione 4
1.1.1 Problemi di Ottimizzazione Continua 5
1.1.2 Problemi di Ottimizzazione Discreta 8
1.1.3 Problemi di Ottimizzazione Mista 9
1.2 Condizioni di esistenza 10
1.2.1 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Discreta 10
1.2.2 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Continua 11

2 Condizioni di Ottimalità **17**
2.1 Introduzione 17
2.2 Teoremi dell'alternativa 17
2.3 Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolata . 20
2.4 Utilizzazioni delle condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolata. 23
2.5 Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata. . . . 28
2.5.1 Problemi di ottimizzazione vincolata generali. 28
2.5.2 Problemi di ottimizzazione vincolata con funzione obiettivo continuamente differenziabile. 29
2.5.3 Problemi di ottimizzazione con vincoli di disuguaglianza. 29
2.5.4 Problemi di ottimizzazione con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza 36
2.5.5 Condizioni di ottimalità del secondo ordine 38
2.6 Utilizzazione delle condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata. 41

3 Condizioni di Ottimalità per Particolari Problemi di Ottimizzazione **47**
3.1 Introduzione 47
3.2 Problemi di programmazione convessa 47
3.3 Problemi di programmazione concava 52

4 Dualità **54**
4.1 Introduzione 54
4.2 Problema Primale Generale e Punti di Sella 54

4.3 Problema Duale Lagrangiano 58
4.4 Problema Duale di Wolfe 61
4.5 Problemi Quadratici 64
4.6 Problemi Programmazione Lineare 65
4.6.1 Problema Duale di un Problema di Programmazione Lineare . . 66
4.6.2 Risultati della teoria della dualità nella Programmazione Lineare 70
4.6.3 Condizioni di complementarità 71
4.7 Interpretazione della Dualità 75
4.7.1 Interpretazione economica delle variabili duali come prezzi ombra 75
4.7.2 Interpretazione economica del problema duale 78

5 Programmazione Lineare 85
5.1 Elementi di geometria in R^n 85
5.1.1 Insiemi Convessi 85
5.1.2 Vertici 87
5.2 Caratterizzazione dei Problemi di Programmazione Lineare 92
5.2.1 Il Teorema fondamentale della Programmazione Lineare 92
5.2.2 Conseguenze del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare 94
5.3 Problemi di Programmazione Lineare in Forma Standard 95
5.3.1 La forma standard 95
5.3.2 Vertici e Soluzioni di Base Ammissibile 98
5.4 Introduzione al metodo del simplesso 106
5.4.1 Introduzione 106
5.4.2 Criterio di ottimalità 108
5.4.3 Criterio di illimitatezza 112
5.4.4 Determinazione di una nuova base ammissibile 113
5.4.5 Calcolo della nuova matrice. 116
5.4.6 Struttura dell'algoritmo 118
5.4.7 Convergenza del metodo del simplesso 119
5.4.8 Eliminazione delle ipotesi e calcolo delle prima forma canonica . 122

A Richiami di Algebra Lineare 124
A.1 Vettori 124
A.2 Matrici 126

B Richiami di Analisi Matematica 131
B.1 Successioni 131
B.2 Funzioni continue, vettore gradiente, matrice Hessiana 133
B.3 Teoremi della media 136

Notazioni

R^n	spazio dei vettori x a n componenti reali;
$x \in R^n$	è inteso come vettore colonna;
$e_i \in R^n$	è il versore unitario i-esimo, cioè il vettore che ha tutte componenti nulle escluso l'i-esima che è uguale uno;
R_+	insieme dei reali non negativi;
x^T	vettore riga ottenuto come trasposto di x;
$(x)_i$	oppure x_i indicano la i-ma componente di x (quindi $x_i \in R$);
x_k	indica il k-mo vettore di una successione (quindi $x_k \in R^n$);
$\{x_k\}$	successione formata dai vettori x_k;
$\{x_k\}_K$	sottosuccessione definita dall' insieme (infinito) di indici K;
$\|x\|$	norma di x; in assenza di altre indicazioni, $\|x\|$ è la norma euclidea, ossia $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, dove $x_i \in R$ sono le componenti di x;
$B(x^\star;\rho)$	sfera aperta di raggio $\rho > 0$ con centro $x^\star \in R^n$, ossia: $B(x^\star;\rho) = \{x \in R^n : \|x - x^\star\| < \rho\}$;
$C(R^n)$	insieme delle funzioni continue su R^n ;
$C^1(R^n)$	insieme delle funzioni continuamente differenziabili su R^n ;
$C^2(R^n)$	insieme delle funzioni due volte continueamente differenziabili su R^n ;
$\nabla f(x)$	gradiente di una funzione $f : R^n \to R$ calcolato in x; $\nabla f(x)$ è inteso come vettore colonna con componenti $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n$;
$\nabla^2 f(x)$	matrice Hessiana $(n \times n)$ di una funzione $f : R^n \to R$ calcolata in x, con componenti $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, per $i, j = 1, \ldots, n$.
$Int(\mathcal{A})$	interno dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$.
$Cl(\mathcal{A})$	chiusura dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$.
$\partial(\mathcal{A})$	frontiera dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$.
$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$	l'insieme definito da $\{x \in \mathcal{A} : x \notin \mathcal{B}\}$.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione

Un problema di ottimizzazione consiste nel cercare di determinare dei punti appartenenti ad un insieme $\mathcal{F}$ in cui una funzione f assume valori più bassi possibile. Tale problema viene rappresentato nella forma:

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove

- la funzione $f : \mathcal{F} \to R$ è detta *funzione obiettivo*;
- l'insieme $\mathcal{F}$ è detto *insieme ammissibile.*

Riguardo alla possibilità di affrontare il precedente problema di minimizzazione si introducono le seguenti definizioni che caratterizzano le diverse situazioni che si possono incontrare.

Definizione 1.1.1 *Il Problema (1.1) si dice* inammissibile *se $\mathcal{F} = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

Definizione 1.1.2 *Il Problema (1.1) si dice* illimitato (inferiormente) *se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x_M \in \mathcal{F}$ tale che $f(x_M) < -M$*

Definizione 1.1.3 *Si dice che il Problema (1.1)* ammette soluzione ottima (finita) *se esiste un $x^\star \in \mathcal{F}$ tale che risulti $f(x^\star) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{F}$. Il corrispondente valore $f(x^\star)$ di dice* valore ottimo.

Si può notare che, se si ha un problema di massimizzazione cioè se si deve trovare un punto in cui la funzione f assume valore più alto possibile, ci si può sempre ricondurre

a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti un punto di massimo del problema

$$\begin{array}{c} \max \ f(x) \\ x \in \mathcal{F} \end{array}$$

è un punto $x^\star \in \mathcal{F}$ che, per definizione, soddisfa la seguente proprietà:

$$f(x^\star) \geq f(x), \quad \text{per ogni} \ \ x \in \mathcal{F},$$

che è equivalente a:

$$-f(x^\star) \leq -f(x), \quad \text{per ogni} \ \ x \in \mathcal{F},$$

da cui segue che $x^\star$ è anche un punto di minimo del problema

$$\begin{array}{c} \min \ \ -f(x) \\ x \in \mathcal{F} \end{array}$$

e risulta:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\min_{x \in \mathcal{F}} (-f(x)).$$

Perciò non si ha nessuna perdita di generalità a studiare ed affrontare solamente problemi di minimizzazione o, viceversa, solamente problemi di massimizzazione.

All'interno dei problemi di Ottimizzazione, in base alla *struttura dell'insieme ammissibile* S, si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- *Problemi di Ottimizzazione Continua* in cui le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in R^n$) e, quindi, si ha che $\mathcal{F} \subseteq R^n$;
- *Problemi di Ottimizzazione Discreta* in cui le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ($x \in Z^n$)e, quindi, si ha che $\mathcal{F} \subseteq Z^n$;
- *Problemi misti* in cui alcune variebili possono essere continue altre variabili sono vincolate ad essere intere.

1.1.1 Problemi di Ottimizzazione Continua

Nel seguito per indicare un Problema di Ottimizzazione Continua utilizzeremo la precedente notazione

$$\begin{array}{c} \min \ f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{array} \tag{1.2}$$

in cui supporremo, però, che $x \in R^n$ e che $\mathcal{F} \subseteq R^n$.

Per caratterizzare meglio i possibili punti di soluzione del precedente problema di minimizzazione si possono introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 1.1.4 *Un punto $x^\star \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo globale *di f su $\mathcal{F}$ se*

$$f(x^\star) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F}.$$

Definizione 1.1.5 *Un punto $x^\star \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo globale stretto *di f su $\mathcal{F}$ se*

$$f(x^\star) < f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F}, \quad x \neq x^\star.$$

Definizione 1.1.6 *Un punto $x^\star \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo locale *di f su $\mathcal{F}$ se esiste un intorno $B(x^\star; \rho)$, con $\rho > 0$ tale che*

$$f(x^\star) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap B(x^\star; \rho).$$

Definizione 1.1.7 *Un punto $x^\star \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo locale stretto *di f su $\mathcal{F}$ se esiste un intorno $B(x^\star; \rho)$, con $\rho > 0$ tale che*

$$f(x^\star) < f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap B(x^\star; \rho), \quad x \neq x^\star.$$

La natura del Problema (1.1) e, quindi, la sua difficoltà di risoluzione dipendono, ovviamente, dalle caratteristiche della funzione obiettivo e dalla struttura dell'insieme ammissibile. Usualmente un problema di ottimizzazione viene caratterizzato dal fatto che si abbia completa libertà o meno nella scelta del vettore x, infatti:

- è detto *problema di minimizzazione non vincolata* se $\mathcal{F} = R^n$, cioè se l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ coincide con tutto lo spazio R^n, cioè:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in R^n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

- viene detto, invece, *problema di minimizzazione vincolata* un problema in cui $\mathcal{F} \subset R^n$.

Tuttavia, può essere considerato come un problema di minimizzazione non vincolato anche un qualsiasi problema in cui l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ è un insieme aperto. Infatti, come nel caso in cui $\mathcal{F} = R^n$, i punti di minimo del problema possono essere caratterizzati esclusivamente dall'andamento della funzione obiettivo in un intorno del punto e non dal fatto che ci siano dei vincoli sulle variabili del problema. Perciò, per i problemi in cui l'insieme ammissibile è un insieme aperto, si adattano facilmente tutti i risultati e metodi proposti per il caso in cui $\mathcal{F} = R^n$.

Tra i problemi vincolati in cui $\mathcal{F}$ è un insieme chiuso, la classe più comunemente considerata è quella in cui $\mathcal{F}$ è descritto attraverso un *insieme finito di vincoli di eguaglianza e diseguaglianza*:

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\},$$

in cui $g : R^n \to R^m$ e $h : R^n \to R^p$ sono vettori di funzioni continue assegnate. Il problema di ottimo si può indicare, in tal caso, ponendo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

che equivale a scrivere

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & \dots \\ & g_m(x) \leq 0 \\ \\ & h_1(x) = 0 \\ & \dots \\ & h_m(x) = 0. \end{aligned}$$

Nella precedente formulazione nell'insieme $\mathcal{F}$ si sono utilizzati vincoli di disuguaglianza nella forma di minore o uguale a zero, ma è chiaro che questa notazione include il caso in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale a zero; infatti si può sempre trasformare un vincolo di maggiore o uguale del tipo

$$g_i(x) \geq 0$$

in un vincolo di minore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma

$$-g_i(x) \leq 0.$$

Inoltre un vincolo di uguaglianza

$$h_j(x) = 0$$

può essere riscritto nella forma equivalente delle due diseguaglianze

$$\begin{aligned} h_j(x) &\leq 0 \\ -h_j(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

Riguardo i vincoli di disuguaglianza di un problema di ottimizzazione è importante introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 1.1.8 *Si consideri un vincolo di disuguaglianza del tipo $g_i(x) \leq 0$;*

- *si dice* violato *in un punto $\bar{x}$ se $g_i(\bar{x}) > 0$;*
- *si dice* attivo *in un punto $\bar{x}$ se $g_i(\bar{x}) = 0$.*

In un problema di ottimizzazione un vincolo si dice ridondante *se con la sua eliminazione l'insieme ammissibile rimane immutato.*

Nel seguito si considererà una particolare classe di problemi, detti problemi di ottimizzazione *continuamente differenziabili*, che presentano le seguenti caratteristiche:

- la funzione obiettivo f è almeno *continuamente differenziabile*;
- nel caso di problemi vincolati, le funzioni g_i, $i = 1, \ldots, m$, e h_j, $j = 1, \ldots, p$, che descrivono l'insieme ammissibile, sono almeno *continuamente differenziabili*

1.1.2 Problemi di Ottimizzazione Discreta

In questa classe di problemi le variabili sono vincolate ad essere numeri interi. All'interno di questa classe di problemi si possono distinguere due sottoclassi:

- *programmazione a numeri interi* se $x \in Z^n$;
- *ottimizzazione booleana* se $x \in \{0, 1\}^n$.

I Problemi di Ottimizzazione Discreta possono essere rappresentati attraverso la seguente notazione

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &x \in \mathcal{F} \cap Z^n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

in cui $\mathcal{F} \subseteq R^n$.

Per quanto riguarda le definizione di minimi globali si possono ripetere quelle date nel caso dei problemi continui.

Definizione 1.1.9 *Un punto $x^\star \in \mathcal{F} \cap Z^n$ si dice punto di* minimo globale (minimo globale stretto) *di f su $\mathcal{F} \cap Z^n$ se*

$$f(x^\star) \leq f(x) \quad (f(x^\star) < f(x)), \quad \text{per ogni} \ \ x \in \mathcal{F} \cap Z^n.$$

Più delicata è invece la definizione dei minimi locali, infatti il concetto di intorno di un punto non può basarsi sull'esistenza di una sfera $B(x^\star; \rho)$ di raggio ρ arbitrario come fatto nel caso dei problemi di Ottimizzazione Continua. Nei problemi di Ottimizzazione Discreta, si possono introdurre diverse definizioni di intorno discreto $B_z(\bar{x})$ di un punto $\bar{x} \in \mathcal{F} \cap Z^n$, alcuni esempi possono essere:

$$\begin{aligned} B_z(\bar{x}) &= \{x \in Z^n : \|x - \bar{x}\|_2 = 1\}, \\ B_z(\bar{x}) &= \{x \in Z^n : \|x - \bar{x}\|_\infty = 1\}. \end{aligned}$$

Utilizzando la prima scelta si considerano punti dell'intorno tutti i vettori a variabili discrete in cui una componente differisce dalla corrispondente del punto $\bar{x}$ di uno. Con

la seconda scelta si considerano punti dell'intorno tutti i vettori a variabili discrete in cui una o più componenti differiscono dalle corrispondenti del punto $\bar{x}$ di uno.
Per esempio se $\bar{x} = (0,0)^T$ allora:

$$B_z(\bar{x}) = \{x \in Z^2 : \|x - \bar{x}\|_2 = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{aligned} B_z(\bar{x}) &= \{x \in Z^2 : \|x - \bar{x}\|_\infty = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

La scelta della definizione più appropriata dell'intorno $B_z(x)$ può dipendere dal particolare problema di Ottimizzazione Discreta considerato.

Definito un particolare intorno B_z si possono definire i minimi locali di un problema di Ottimizzazione Discreta.

Definizione 1.1.10 *Un punto $x^\star \in \mathcal{F} \cap Z^n$ si dice punto di* minimo locale (minimo locale stretto) *di f su $\mathcal{F} \cap Z^n$ se esiste un intorno $B_z(x^\star)$ tale che*

$$f(x^\star) \leq f(x) \quad (f(x^\star) < f(x)), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap B_z(x^\star).$$

Dopo aver evidenziato le diversità riguardanti la definizione dei minimi locali, tutte le altre considerazioni fatte nel sezione precedente per i Problemi di Ottimizzazione Continua possono essere ripetute con ovvi adattamenti al caso dei Problemi di Ottimizzazione Discreta.

1.1.3 Problemi di Ottimizzazione Mista

In questa classe di problemi il vettore delle variabili presenta alcune componenti che possono variare in maniera continue ed altre solamente in maniera discreta. Senza perdita di generalità questa situazione può essere rappresentata definendo il vettore delle variabili nella seguente maniera:

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ x_z \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad x_c \in R^{n_c}, \quad x_z \in R^{n_z}, \quad n_c + n_z = n.$$

Di conseguenza un problema di Ottimizzaione mista può essere definitito nella seguente maniera

$$\begin{aligned} &\min \ f(x_c, x_z) \\ &\quad x_c \in \mathcal{F}_c, \\ &\quad x_z \in \mathcal{F}_z \cap Z^{n_z}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

dove $\mathcal{F}_c \subseteq R^{n_c}$ e $\mathcal{F}_z \subseteq R^{n_z}$.

Le caratterizzazioni dei punti di minimo globale e locale di questa classe di problemi seguono direttamente unendo le deffinizioni date per i Problemi di Ottimizzazione Continua e per i Problemi di Ottimizzazione Discreta.

I problemi di Ottimizzazione Discreta presentano contemporaneamente sia le difficoltà di quelli continui che di quelli discreti. Sono quindi problemi di ottimizzazione estremamente difficile da affrontare sia dal punto di vista teorico che da quello algoritmico e, per questo motivo, la loro trattazione è tuttora un argomento escusivo dell'attività di ricerca nel campo della Programmazione Matematica.

1.2 Condizioni di esistenza

Come detto nella precedente sezione, nell'affrontare il Problema (1.1) la prima difficoltà da affrontare è quella di capire se è ben posto, nel senso che potrebbe non esistere un punto in $\mathcal{F}$ in cui la funzione $f(x)$ assume valore più piccolo. Infatti, si potrebbe presentare una delle seguenti situazioni:

- l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ potrebbe essere vuoto;
- l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ potrebbe essere non è vuoto ma la funzione obiettivo potrebbe essere illimitata inferiormente su $\mathcal{F}$ ossia $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$;
- l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ potrebbe essere non è vuoto e la funzione obiettivo potrebbe essere limitata inferiormente su $\mathcal{F}$ ma, anche in questo caso, *potrebbero non esistere punti di minimo globale* di f su $\mathcal{F}$;

Fortunatamente si possono stabilire delle semplici condizioni *sufficienti* (ma non necessarie) per l'esistenza di un punto di minimo globale di un problema di ottimizzazione. L'analisi di queste condizioni si differenzia a seconda del tipo di problema di ottimo considerato (continuo o discreto).

1.2.1 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Discreta

Nel caso di Problemi di Ottimizzazione Discreta l'esistenza di un minimo globale si può garantire richiedendo l'intuitivo fatto che l'insieme ammissibile sia contenuto in un insieme limitato. In particolare per problemi con la struttura del tipo 1.5, si può stabilire il seguente risultato.

Proposizione 1.2.1 *Sia $\mathcal{F} \subset R^n$ un insieme limitato. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F} \cap Z^n$.*

Prova. Dalla ipotesi che l'insieme $\mathcal{F}$ è limitato si ha che esiste una costante $\eta \in R$ tale che:

$$\|x\| \leq \eta \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F},$$

dove, come usuale, $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea $\|\cdot\|_2$.
Dai legami tra le varie norme in R^n (si veda la (A.1) nella Appendice A) si ottiene:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \eta \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F}.$$

Ricordando la definizione di $\|\cdot\|_\infty$ si ottiene che per ogni $x \in \mathcal{F}$ si ha che:

$$|x|_i \leq \eta \quad \text{per ogni indice} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se $\eta_z \in Z$ indica il più grande intero tale che $\eta_z \leq \eta$, il fatto che $\mathcal{F} \cap Z^n \subseteq \mathcal{F}$ implica che, per ogni $x \in \mathcal{F} \cap Z^n$, si ha:

$$|x|_i \leq \eta_z \quad \text{per ogni indice} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dalla precedente relazione si può dedurre che ogni $x \in \mathcal{F} \cap Z^n$ ha componenti che può assumere al più i seguente $2\eta_z + 1$ valori

$$x_i \in \{-\eta_z, -(\eta_z - 1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \eta_z - 1, \eta_z\}.$$

Quindi l'intero insieme ammissibile è costituito da un numero finito di punti, al più ci possono essere $(2\eta_z + 1)^n$ vettori di interi distinti. Tra questi vettori di interi quelli in cui i valori della funzione obiettivo sono più bassi costituiscono l'insieme delle soluzioni ottime del problema. □

1.2.2 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Continua

Un risultato fondamentale riguardo all'esistenza di una soluzione di un problema di Ottimizzazione Continua è quello espresso dalla proposizione seguente, che segue dal ben noto Teorema di Weierstrass.

Proposizione 1.2.2 *Sia $\mathcal{F} \subset R^n$ un insieme non vuoto e compatto. Sia f una funzione continua definita su $\mathcal{F}$. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F}$.*

Prova. Sia

$$\ell = \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Dalla definizione di estremo inferiore si ha che:

$$\ell \leq f(x), \qquad \text{per ogni} \qquad x \in \mathcal{F} \tag{1.7}$$

e che, comunque scelto un indice k, esiste un punto $x_k \in \mathcal{F}$ tale che:

$$f(x_k) \leq \ell + \frac{1}{k}. \tag{1.8}$$

Dalla (1.7) e dalla (1.8) segue che esiste una sequenza di punti $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, per cui:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \ell.$$

Per assunzione l'insieme $\mathcal{F}$ è compatto, quindi è chiudo e limitato. Poichè $x_k \in \mathcal{F}$ per ogni k, la sequenza $\{x_k\}$ è anche lei limitata e, quindi, esiste un suo punto di accumulazione $x^* \in R^n$ che, per la chiusura di $\mathcal{F}$, soddisfa anche $x^* \in \mathcal{F}^n$. Perciò esiste una sottosequenza $\{x_k\}_K$ che soddisfa:

$$\lim_{k \in K,\ k \to \infty} x_k = x^*, \tag{1.9}$$

$$\lim_{k \in K,\ k \to \infty} f(x_k) = \ell. \tag{1.10}$$

Dalla continuità della funzione f e dalla (1.9), segue che:

$$\lim_{k \in K,\ k \to \infty} f(x_k) = f(x^*),$$

da cui, ricondando la (1.10), si ottiene:

$$f(x^*) = \ell.$$

La precedente uguaglianza e la (1.7) implicano che

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \text{per ogni} \qquad x \in \mathcal{F}, \tag{1.11}$$

da cui segue che il punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f su $\mathcal{F}$. □

Esempi. Alcuni esempi di problemi che hanno insiemi ammissibili compatti sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ & l \leq x \leq u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ & \|x\|^2 \leq \eta, \end{aligned}$$

dove $l, u \in R^n$ e $\eta \in R_+$.

Il risultato stabilito nella precedente proposizione si applica solamente alla classe dei problemi *vincolati* in cui l'insieme ammissibile è compatto. Per poter stabilire risultati di esistenza per problemi con insiemi ammissibili non compatti (in particolare nel caso in cui $\mathcal{F} = R^n$) è necessario cercare di caratterizzare un qualche sottoinsieme di $\mathcal{F}$ contenente le soluzioni ottime del problema.

A questo fine si introduce la definizione seguente.

Definizione 1.2.3 (Insieme di livello) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ e sia $f : \mathcal{F} \to R$; si definisce insieme di livello di f su $\mathcal{F}$ ogni insieme non vuoto del tipo:*

$$\mathcal{L}(\alpha) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\},$$

in cui $\alpha \in R$.

In particolare, se $x_0 \in \mathcal{F}$, indichiamo con $\mathcal{L}_0$ l'insieme di livello $\mathcal{L}(f(x_0))$, ossia:

$$\mathcal{L}_0 := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(x_0)\}. \tag{1.12}$$

A questo punto, si può enunciare il risultato seguente che stabilisce una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni globali di un problema di ottimizzazione facendo riferimento alla struttura degli insiemi di livello della funzione.

Proposizione 1.2.4 *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ e sia f una funzione continua definita su $\mathcal{F}$. Supponiamo che esista un insieme di livello di f su $\mathcal{F}$ che sia non vuoto e compatto. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F}$.*

Prova. Sia $\mathcal{L}(\alpha)$, con $\alpha \in R$, l'insieme di livello non vuoto e compatto. Dalla Proposizione 1.2.2 esiste un punto di minimo globale $x^* \in \mathcal{L}(\alpha)$ di f su $\mathcal{L}(\alpha)$. Questo implica che per ogni $x \in \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$ si ha

$$\alpha \geq f(x) \geq f(x^*). \tag{1.13}$$

Dalla definizione di $\mathcal{L}(\alpha)$ segue che per ogni $x \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{L}(\alpha)$ si ha

$$f(x) \geq \alpha \geq f(x^*). \tag{1.14}$$

Quindi la (1.13) e la (1.14) dimostrano che $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f sul tutto l'insieme $\mathcal{F}$. □

Nel caso generale, stabilire l'esistenza di un insieme di livello compatto può essere difficile. Tuttavia, in molti casi, si possono ottenere delle semplici condizioni per assicurare che *tutti* gli insiemi di livello siano compatti. In particolare la proposizione successiva fornisce una condizione necessaria e sufficiente (nota come condizione di *coercività*) perchè gli insiemi di livello di f su $\mathcal{F}$ siano compatti.

Proposizione 1.2.5 . *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ e sia f una funzione continua definita su $\mathcal{F}$. Allora tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ di f su $\mathcal{F}$ sono compatti se e solo se le due seguenti condizioni sono soddisfatte:*

(i) *se $\{x_k\}$ è una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$ allora segue che*
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty;$$

(ii) *se $\{x_k\}$ è una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$, allora segue che*
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty.$$

Prova. *Necessità.* Supponiamo che tutti gli insiemi di livello siano compatti. Ragionando per assurdo, ammettiamo che una della due condizione (i) e (ii) non sia soddisfatta. Se la condizione (i) non è soddisfatta deve esistere una successione $\{x_k\}$ di punti $x_k \in \mathcal{F}$ che soddisfa $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$ e che contiene una sottosequenza (ridefinita $\{x_k\}$) per cui esiste uno scalare $\alpha < \infty$ tale che:

$$f(x_k) \leq \alpha. \tag{1.15}$$

Dalla (1.15) segue che $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ per ogni k. Ma $\mathcal{L}(\alpha)$ è compatto, quindi limitato, e ciò contraddice l'ipotesi che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$.
Se, invece, la condizione (ii) non è soddisfatta deve esistere una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ che soddisfa $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$ e che contiene una sottosequenza (ridefinita

$\{x_k\}$) per cui esiste uno scalare $\alpha < \infty$ tale la (1.15) è soddisfatta. Di nuovo, questo implicha che $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ per ogni k, ma questo, poichè $\mathcal{L}(\alpha)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathcal{F}$, contraddice l'assunzione che $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$.

Sufficienza. Supponiamo ora che le condizioni (i) e (ii) siano soddisfatte. Ragionando di nuovo per contraddizione, supponiamo che esista un insieme di livello $\mathcal{L}(\alpha)$ in $\mathcal{F}$ che non sia compatto. Se $\mathcal{L}(\alpha)$ non fosse limitato allora esisterebbe una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ con $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$ e $f(x_k) \leq \alpha$, ma questo contraddirebbe la condizione (i). Se invece $\mathcal{L}(\alpha)$ fosse limitato ma non chiuso, poichè f è una funzione continua, questo implicherebbe l'esistenza di una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ con $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$ e $f(x_k) \leq \alpha$, che contraddirebbe la condizione (ii). $\square$

Esempio. I precedenti risultati permettono di assicurare che il seguente problema (dove $x \in R$) ha un minimio globale:

$$\begin{aligned} \min \ & x + \frac{5}{x} \\ & x > 0. \end{aligned}$$

Infatti per ogni sequenza $\{x_k\}$ tale che $x_k \in \mathcal{F}$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \notin \mathcal{F}$, si ha che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x + \frac{5}{x} = \infty.$$

Mentre per ogni sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$, si ha che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x + \frac{5}{x} = \infty.$$

Perciò tutti gli insiemi di livello del precedente problema sono compatti e, quindi, esiste un minimo globale. $\square$

Le proposizioni 1.2.4 and 1.2.5 forniscono delle condizioni sufficienti per l'esistenza delle soluzioni di un problema di minimizzazione in cui l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ è un insieme aperto. In particolare si possono considerare due casi particolari che corrispondono alle situazioni di maggiore interesse.

Il primo dei due casi è quello in cui $\mathcal{F}$ è un insieme chiuso.

Proposizione 1.2.6 *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme chiuso e sia f una funzione continua su $\mathcal{F}$ e si assuma che f sia* coerciva *su $\mathcal{F}$, ossia che*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, tale che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Allora si ha:

(i) *tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ sono compatti;*

(ii) *esiste un minimo globale di f su $\mathcal{F}$;*

(iii) *l'insieme dei minimi globali di f su $\mathcal{F}$ è un insieme compatto non vuoto.*

Prova. I punti (i) and (ii) seguono dalle Proposizioni 1.2.4 and 1.2.5; il punto (iii) segue dai punti (i) e (ii), e notando che l'insieme dei minimi globali è l'insieme di livello $\mathcal{L}(f^*)$, dove $f^* = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$. $\square$

Nel caso in cui $\mathcal{F} = R^n$ il precedente risultato si può esprimere nella seguente maniera.

Proposizione 1.2.7 *Sia f una funzione continua su R^n e si assuma che f sia* coerciva *su R^n, ossia che*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in R^n$, tale che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Allora si ha:

(i) *tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in R^n : f(x) \leq \alpha\}$ sono compatti;*

(ii) *esiste un minimo globale di f su R^n;*

(iii) *l'insieme dei minimi globali di f su R^n è un insieme compatto non vuoto.*

La seguente proposizione indentifica un classe importante di funzioni coecitive.

Proposizione 1.2.8 *Sia*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + d$$

con $Q \in R^{n\times n}$, $c \in R^n$ e $q \in R$.
Se la matrice Q è definita positiva le funzione $f(x)$ è coercitiva su R^n.

Prova. Sia $\{x_k\}$ una successione tale che $x_k \in R^n$ e che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Per ogni k, ricondando la definizione $\lambda_{\min}(Q)$, (A.3) e la disuguaglianza di Schwarz (A.2), si può scrivere:

$$f(x_k) = \frac{1}{2}x_k^T Qx_k + c^T x_k + d \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x_k\|^2 - \|c\|\|x_k\| + d,$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty,$$

e che, quindi, la funzione f è coercitiva. $\square$

Il secondo caso di struttura particolare dell'insieme ammissibile è quello in cui $\mathcal{F}$ è un insieme limitato e aperto tale che f tende all'infinito al tendere verso la frontiera di $\mathcal{F}$. Per esempio, questa situazione si presenta nelle minimizzazioni non vincolate di funzioni di barriera. Per questo caso è possibile stabilire la seguente condizione la cui prova è simile a quella della precedente proposizione.

Proposizione 1.2.9 *Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme limitato e aperto di R^n e sia $f : \mathcal{F} \to R$ una funzione continua. Si supponga che*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x} \in \partial\mathcal{F}$. Allora si ha:

(i) *tutti gli insiemi di livello* $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ *sono compatti;*

(ii) *esiste un minimo globale* $x^* \in \mathcal{F}$ *di* f *su* $\mathcal{F}$

(iii) *l'insieme dei minimi globali di* f *su* $\mathcal{F}$ *è un sottoinsieme compatto non vuoto di* $\mathcal{F}$*.*

Capitolo 2

Condizioni di Ottimalità

2.1 Introduzione

L'obiettivo di questo capitolo è quello di studiare delle caratterizzazioni matematiche delle soluzioni dei problemi di ottimizzazione che, oltre ad avere una validità teorica, abbiano un interesse applicativo nel senso che possano essere utilizzate nella definizione di metodi per la soluzione numerica dei problemi di ottimizzazione.

Purtroppo la localizzazione di un minimo globale dipende del comportamento globale della funzione obiettivo e dei vincoli che descrivono il problema di ottimo. Ogni condizione matematica che identifica un minimo globale necessariamente deve riflettere questa complessità. Di conseguenza queste particolari condizioni sono scarsamente utilizzabile dal punto di vista computazionale.

Diversa è la situazione per quanto riguarda i minimi locali. Infatti quest'ultimi dipendono solamente da comportamento locale della funzione obiettivo e dei vincoli del problema. Questo fatto può essere sfruttato nel campo dei Problemi di Ottimizzazione Continua per dare delle importanti caratterizzazioni matematiche dei minimi locali attraverso i Teoremi della Media (si veda Appendice B) che permettono di approssimare la funzione obiettivo e i vincoli con funzioni semplici.

Lo stesso approccio non può essere seguito nel caso di Problemi di Ottimizzazione Discreta in quanto il vincolo di interezza sulle componenti del vettore delle variabili preclude la possibilità di considerare intorni qualsiasi di un dato punto e, quindi, di sfruttare le potenzialià dei Teoremi della media.

2.2 Teoremi dell'alternativa

In questa sezione vengono riportati alcuni teoremi che descrivono delle proprietà riguardanti i sistemi di disequazioni lineari e che svolgono un ruolo fondamentale per poter caratterizzare i minimi locali di un problemi di programmazione matematica.

Tali risultati sono alcuni esempi di quelli che vengono detti *Teoremi dell'alternativa* in quanto evidenziano delle alternative che si incontrano nel considerare sistemi lineari.

Il primo risultato riportato è sicuramente uno dei più importanti e noti teoremi dell'alternativa (noto in letteratura come il *Teorema di Farkas*).

Teorema 2.2.1 *Comunque scelta una matrice $A \in R^{m\times n}$ ed un vettore $b \in R^n$, esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

i) esiste un vettore $x \in R^n$ che è soluzione del seguente sistema:

$$Ax \leq 0, \qquad b^T x > 0; \tag{2.1}$$

ii) esiste un vettore $y \in R^m$ che è soluzione del seguente sistema:

$$A^T y = b, \qquad \text{con} \qquad y \geq 0. \tag{2.2}$$

Un immediato corollario del precedente Teorema di Farkas è dato dal seguente risultato.

Corollario 2.2.2 *Dati $m+1$ vettori $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \in R^n$. Se per ogni vettore $z \in R^n$ che soddisfa il seguente sistema di disequazioni*

$$x_i^T z \geq 0, \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \ldots, m,$$

si ha che

$$x_{m+1}^T z \geq 0,$$

allora esistono m scalari $\alpha_i \in R_+$, con $i = 1, \ldots, m$, tali che

$$x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i.$$

Un secondo teorema dell'alternativa è il seguente *Teorema di Gordan.*

Teorema 2.2.3 *Comunque scelta una matrice $A \in R^{m\times n}$, esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

i) esiste un vettore $x \in R^n$ che è soluzione del seguente sistema:

$$Ax < 0; \tag{2.3}$$

ii) esiste un vettore nonnullo $y \in R^m$ che è soluzione del seguente sistema:

$$A^T y = 0, \qquad \text{con} \qquad y \geq 0. \tag{2.4}$$

Prova. Il sistema (2.3) può essere riscritto nella seguente maniera:

$$Ax + \theta e \leq 0,$$

dove θ è uno scalare strettamente positivo e il vettore e è costituito di tutti uno. Perciò l'affermazione i) è equivalente a dire che esiste un vettore (x, θ) che soddisfa:

$$\begin{pmatrix} A & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \leq 0, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} > 0.$$

Per il Teorema di Farkas 2.2.1, questa affermazione è in alternativa con il fatto che esiste un vettore $y \in R^m$ che soddisfa:

$$\begin{pmatrix} A^T \\ e^T \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad y \geq 0.$$

Quest'ultimo sistema può essere riscritto nella seguente maniera:

$$A^T y = 0, \quad e^T y = 1 \quad \text{con} \quad y \geq 0,$$

che è equivalente alla affermazione ii) del teorema. □

Come ultimo teorema dell'alternativa riportiamo quello che viene denominato *Teorema di Motzkin.*

Teorema 2.2.4 *Comunque scelte due matrici $A \in R^{m \times n}$ e $B \in R^{p \times n}$, esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

i) esiste un vettore $x \in R^n$ che è soluzione del seguente sistema:

$$\begin{aligned} Ax &< 0 \\ Bx &= 0; \end{aligned} \tag{2.5}$$

ii) esistono due vettori $y \in R^m$ e $z \in R^p$, con $y \neq 0$, che sono soluzioni del seguente sistema:

$$A^T y + B^T z = 0, \qquad \textit{con} \qquad y \geq 0. \tag{2.6}$$

Prova. Il sistema (2.5) può essere riscritto nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} Ax + \theta e &\leq 0 \\ Bx &\leq 0 \\ -Bx &\leq 0, \end{aligned}$$

dove θ è uno scalare strettamente positivo e il vettore e è costituito di tutti uno.

Perciò l'affermazione i) è equivalente a dire che esiste un vettore (x, θ) che soddisfa:

$$\begin{pmatrix} A & e \\ B & 0 \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \leq 0, \qquad (0 \ \dots \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} > 0.$$

Per il Teorema di Farkas 2.2.1, questa affermazione è in alternativa con il fatto che esistono un vettore $y \in R^m$ e due vettori $z_1, z_2 \in R^p$ che soddisfano:

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & -B^T \\ e^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad y \geq 0, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0.$$

Quest'ultimo sistema può essere riscritto nella seguente maniera:

$$A^T y + B^T (z_1 - z_2) = 0, \quad e^T y = 1 \quad \text{con} \quad y \geq 0, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0,$$

ponendo $z = z_1 - z_2$ si ottiene

$$A^T y + B^T z = 0, \quad e^T y = 1,$$

da cui segue che la affermazione ii) del teorema è vera. □

2.3 Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolata

In questa sezione vengono riportati alcuni risultati che caratterizzano i punti di minimo di un problema di minimizzazione non vincolata, cioè di un problema del tipo:

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) \\ & x \in R^n, \end{aligned} \tag{2.7}$$

dove $f : R^n \to R$ è una funzione continua.

Riguardo la minimizzazione di una funzione obiettivo, un ruolo particolarmente importante sia dal punto di teorico che da quello computazionale è giocato dall'*insieme delle direzione di discesa*. In particolare questo insieme è caratterizzato dalla seguente definizione.

Definizione 2.3.1 *Si definisce* insieme delle direzioni di discesa *della funzione f nel punto $\bar{x}$ il seguente insieme $D(\bar{x})$:*

$$D(\bar{x}) = \{d \in R^n : \ \exists \delta > 0 \ \textit{per cui} \ \ f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x}), \ \forall \alpha \in (0, \delta) \ \}$$

Utilizzando l'insieme delle direzioni di discesa è possibile dare una prima caratterizzazione teorica dei punti di minimo locale di un problema di minimizzazione non vincolata.

Teorema 2.3.2 *Sia $f \in C(R^n)$. Se il punto $x^* \in R^n$ è un punto di minimo locale (globale) del Problema (2.7) allora*

$$D(x^*) = \emptyset \tag{2.8}$$

Prova. Si supponga che, per assurdo, che non valga la (2.8). Allora esisterebbe un vettore $\bar{d} \in D(x^*)$ per cui, ricordando la Definizione 2.3.1, si avrebbe:

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) < f(x^*)$$

comunque scelto lo scalare $\alpha \in (0, \delta)$, con $\delta > 0$. Quindi il punto x^* non sarebbe un minimo locale della funzione f su R^n. □

Il precedente risultato, sebbene molto semplice ed intuitivo, permette di derivare delle condizioni di ottimalità di estremo interesse dal punto id vista pratico. In particolare, nel caso in cui la funzione obietttivo è continuamente differenziabile, si ha il seguente risultato.

Teorema 2.3.3 *Sia $f \in C^1(R^n)$. Se il punto $x^* \in R^n$ è un punto di minimo locale (globale) del Problema (2.7) allora*

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{2.9}$$

Prova. Si supponga che, per assurdo, che non valga la (2.9). Allora potremmo definire la seguente direzione

$$\bar{d} = -\nabla f(x^*). \tag{2.10}$$

Utilizzando il Teorema B.3.2, si avrebbe

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) = f(x^*) + \alpha\nabla f(x)^T\bar{d} + r_1(\alpha\|\bar{d}\|),$$

con

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{r_1(\alpha\|\bar{d}\|)}{\alpha} = 0.$$

Ricondando la definizione (2.10) di $\bar{d}$, si avrebbe:

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) = f(x^*) - \alpha\|\nabla f(x)\|^2 + r_1(\alpha\|\bar{d}\|) = f(x^*) - \alpha\left(\|\nabla f(x)\|^2 - \frac{r_1(\alpha\|\bar{d}\|)}{\alpha}\right).$$

Da cui seguirebbe l'esistenza di uno scalare $\delta > 0$ tale

$$f(x^* + \alpha d) < f(x^*), \quad \forall\alpha \in (0, \delta),$$

Questo implicherebbe che $\bar{d} \in D(x^*)$. Da cui si avrebbe che $D(x^*) \neq \emptyset$. Per il Teorema 2.3.2 se avrebbe che x^* non sarebbe un punto di minimo locale per il Problema (2.7). □

La maggior parte degli algoritmi che sono stati proposti in letteratura per affrontare problemi di ottimizzaione non vincolata sono in grado di determinare punti che soddisfano la condizione necessaria I punti che soddisfano la condizione necessaria di ottimo (2.9). Per questo motivo è importante caratterizzarli attraverso la seguente definizione.

Definizione 2.3.4 *Un punto $x^* \in R^n$ è detto* punto stazionario *del Problema (2.7) se è tale che*

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{2.11}$$

Ipotizzando che la funzione obiettivo sia due volte continuamente differemziabile si può migliorare la caratterizzazione dei minimi locali del Problema (2.7).

Teorema 2.3.5 *Sia $f \in C^2(R^n)$. Se il punto $x^* \in R^n$ è un punto di minimo locale (globale) del Problema (2.7) allora*

$$\nabla f(x^*) = 0, \tag{2.12}$$

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0, \qquad \forall d \in R^n. \tag{2.13}$$

Prova. Nella dimostrazione del Teorema 2.3.3 si è già dimostrato che se non vale la (2.12) allora il punto x^* non è un minimo locale. Quindi per completare la dimostrazione del presente teorema basta far vedere che, oltre alla (2.12), deve anche necessariamente valere la condizione (2.13). Si supponga che, per assurdo, che valga la (2.12) e non valga la (2.13). In questo caso si potrebbe definire la direzione $\bar{d} \in R^n$ tale che

$$\bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} < 0. \tag{2.14}$$

Dal Teorema B.3.4, seguirebbe:

$$f(x^+ \alpha \bar{d}) = f(x^*) + \alpha \nabla f(x^*)^T \bar{d} + \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} + r_2(\alpha^2 \|\bar{d}\|^2),$$

con

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r_2(\alpha^2 \|\bar{d}\|^2)}{\alpha^2} = 0.$$

Ricondando la (2.12) e la (2.14), si avrebbe:

$$\begin{aligned} f(x^* + \alpha \bar{d}) &= f(x^*) + \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d}) + r_2(\alpha^2 \|\bar{d}\|^2) \\ &= f(x^*) + \alpha^2 \left(\frac{1}{2} \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} + \frac{r_2(\alpha^2 \|\bar{d}\|^2)}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Da cui seguirebbe l'esistenza di uno scalare $\delta > 0$ tale

$$f(x^* + \alpha d) < f(x^*), \quad \forall \alpha \in (0, \delta),$$

Da questo si avrebbe che $\bar{d} \in D(x^*)$. Da cui seguirebbe che $D(x^*) \neq \emptyset$ e, per il Teorema 2.3.2, x^* non sarebbe un punto di minimo locale per il Problema (2.7). □

I precedenti teoremi descrivono delle condizioni necessarie affinchè un punto sia un minimimo locale di un problema di ottimizzazione non vincolato. Il prossimo risultato invece descrive delle condizioni sufficienti affinchè un punto sia un minimio locale del Problema (2.7).

Teorema 2.3.6 *Sia $f \in C^2(R^n)$. Se il punto $x^* \in R^n$ soddisfa le seguente condizioni:*

$$\nabla f(x^*) = 0, \tag{2.15}$$
$$d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0, \qquad \forall d \in R^n, \tag{2.16}$$

allora il punto x^* è un punto di minimo locale per Problema (2.7).

Prova. Per assurdo, si supponga che x^* non sia un minimo locale. Questo implicherebbe che comunque scelto un indice k esisterebbe un punto $x_k \in B(x^\star; 1/k)$ tale che

$$f(x_k) < f(x^\star).$$

Ricondando il Teorema B.3.4, si avrebbe:

$$0 > f(x_k) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T (x_k - x^*) + \frac{1}{2}(x_k - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x_k - x^*) + r_2(x_k, x^*),$$

con

$$\lim_{k \to \infty} \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} = 0.$$

Dalla (2.15) si avrebbe:

$$0 > \frac{(x_k - x^*)^T}{\|x_k - x^*\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + 2 \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2}. \tag{2.17}$$

Poichè le sequenza di vettori $\{(x_k - x^*)/\|x_k - x^*\|\}$ è limitata esiste un sottoinsieme di indici $K \subseteq \{1, 2, \ldots\}$ tale che

$$\lim_{k \to \infty, k \in K} \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} = \bar{d},$$
$$\lim_{k \to \infty, k \in K} \left[\frac{(x_k - x^*)^T}{\|x_k - x^*\|} \nabla^2 f(x^*) \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{2 r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} \right] = \bar{d}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{d} \leq 0. \tag{2.18}$$

La precedente (2.18) contraddirrebbe la (2.16). □

2.4 Utilizzazioni delle condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolata.

Le precedenti condizioni di ottimalità, oltre ad avere un notevole interesse dal punto di vista teorico, sono fondamentali anche dal punto di vista applicativo e metodologico.

Nel caso di problemi semplici e particolarmente strutturati, le condizioni di ottimalità possono permettere di calcolare direttamenta la soluzione del problema, cioè il punto di ottimo del problema. Un esempio di tale applicazione è il seguente.

Esempio. Supponiamo che un bagnante abbia bisogno di aiuto mentre sta nuotando a 100 metri dalla riva e che il centro soccorso stia a 200 metri dalla proiezione sulla riva della posizione del bagnante.

Istintivamente un soccorritore, nel tentativo di sfuttare il più possibile il fatto di poter correre più velocemente sulla sabbia piuttosto che nuotare, potrebbe decidere di fare di corsa i 200 metri di costa per poi buttarsi e percorrere nuotando gli ultimi 100 metri. Nell'ipotesi che possa correre sulla sabbia alla velocità di 4 m/s e che possa nuotare alla velocità di 1.5 m/s, il soccorritore impiegherebbe:

$$\frac{200}{4} + \frac{100}{1.5} = 116.67 \ s.$$

In alternativa si può determinare la distanza migliore x dalla proiezione sulla riva della posizione del bagnante in cui smettere di correre ed incominciare a nuotare. In particolare si può minimizzare il tempo necessario a raggiungere il nuotatore risolvendo il seguente problema:

$$\min \ \frac{200 - x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{1.5}.$$

La derivata prima della funzione obiettivo è data da:

$$\nabla f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100^2}}.$$

Il minimo globale x^* del problema deve soddisfare la seguente condizione di ottimalità:

$$\nabla f(x^*) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} \frac{x^*}{\sqrt{(x^*)^2 + 100^2}} = 0.$$

La precedente uguaglianza ha come unica soluzione il valore:

$$x^* = 40.45,$$

che, quindi, è l'unica soluzione ottima del problema.

Facendo questa scelta il soccorritore raggiunge il nuotatore in un tempo di:

$$\frac{200 - x^*}{4} + \frac{\sqrt{(x^*)^2 + 100^2}}{1.5} = 111,8 \ s.$$

□

L'uso diretto delle condizioni di ottimalità per determinare la soluzione di un problema di ottimizzazione è limitato a casi molto particolari. In generale un problema di ottimizzazione può essere affrontanto utilizzando specifici metodi iterativi e le condizioni di ottimalità costituiscono la base su cui definire tali metodi. Come esempio viene descritta una variazione di un noto metodo per risolvere problemi di ottimizzazione non vincolata (chiamato del Metodo del Gradiente).

Metodo del Gradiente.

Passo 0. Dati $x_0 \in R^n$ e $\gamma \in (0,1)$, si pone $k = 0$.

Passo 1. Se $\nabla f(x_k) = 0$ Stop.

Passo 2. Si pone $d_k = \nabla f(x_k)$.

Passo 3. Si calcola lo scalare $\alpha_k > 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) + \alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T d_k \\ f(x_k + 2\alpha_k d_k) &> f(x_k) + 2\alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T d_k. \end{aligned}$$

Passo 3. Si pone $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, $k = k + 1$ e si ritorna al Passo 1.

Le proprietà asintotiche della sequenza di punti prodotta dal precedente metodo sono descritte da seguente teorema.

Teorema 2.4.1 *Sia $f \in C^1(R^n)$ e sia $\mathcal{L}(x_0) = \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ un insieme compatto. Se $\{x_k\}$ è la sequenza di punti prodotta da Metodo del Gradiente si ha che:*

i) la sequenza $\{x_k\}$ ammette almeno un punto di accumulazione;

ii) $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$*;*

iii) ogni punto di accumazione $\bar{x}$ della sequenza $\{x_k\}$ è un punto stazionario del Problema (2.7) ed, inoltre, $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$.

Prova. Dalla prima della condizioni su α_k del Passo 3 e dal fatto che $d_k = -\nabla f(x_k)$ si ha che:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \alpha_k \gamma \|\nabla f(x_k)\|^2, \tag{2.19}$$

da cui segue che

$$x_k \in \mathcal{L}(x_0), \quad \text{per ogni} \quad k, \tag{2.20}$$

ricordando l'ipotesi di compattezza dell'insieme $\mathcal{L}(x_0)$, si ha che la sequenza $\{x_k\}$ è limitata ed che ammette almeno un punto di accumulazione (punto i)).

Punto ii). Le precedenti (2.19), (2.20) e, di nuovo, l'ipotesi di compattezza di $\mathcal{L}(x_0)$ implicano che la sequenza di scalari $\{f(x_k)\}$ è non crescente e limitata inferiormente. Perciò la sequenza $\{f(x_k)\}$ ammette un limite $\bar{f}$, cioè:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \bar{f}. \tag{2.21}$$

Dal precedente limite e dalla (2.19) si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k \gamma \|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \Big(f(x_k) - f(x_{k+1} \Big) = 0,$$

da cui segue che:

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| = 0. \tag{2.22}$$

Se, per assurdo, il punto ii) del teorema non fosse vero la (2.22) implicherebbe l'esistenza di un insieme infinito di indici K e di sottosequenze $\{x_k\}_K$ e $\{\alpha_k\}_K$ tali che:

$$\begin{aligned} &\|\nabla f(x_k)\| \geq \varepsilon > 0, \quad \text{per ogni} \quad k \in K, \\ &\lim_{k\to\infty, k\in K} \alpha_k = 0. \end{aligned}$$

Poichè $x_k \in \mathcal{L}(x_0)$, per ogni $k \in K$, e che $\mathcal{L}(x_0)$ è un insieme compatto esisterebbero un sottoinsieme infinito di indici $K' \subseteq K$ e due sottosequenze $\{x_k\}_{K'}$ e $\{\alpha_k\}_{K'}$ tali che:

$$\lim_{k\to\infty, k\in K'} x_k = \bar{x}, \tag{2.23}$$

$$\lim_{k\to\infty, k\in K'} \alpha_k = 0, \tag{2.24}$$

$$\lim_{k\to\infty, k\in K'} \|\nabla f(x_k)\| = \|\nabla f(\bar{x})\| > 0. \tag{2.25}$$

Dalla seconda della condizioni su α_k del Passo 3 e, ricordando nuovamente che $d_k = -\nabla f(x_k)$, si ha:

$$\frac{f(x_k + 2\alpha_k d_k) - f(x_k)}{2\alpha_k} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2,$$

da cui, utilizzando il Teorema B.3.2 si otterrebbe che:

$$-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{r_1(x_k, \alpha_k)}{2\alpha_k} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2. \tag{2.26}$$

Utilizzando (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) si arriverebbe all'assurdo che:

$$0 \leq (1-\gamma)\|\nabla f(\bar{x})\| \geq 0.$$

La dimostrazione del punto iii) del teorema segue direttamente dal punto ii) e dalla (2.20). □

Il calcolo di uno scalare α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 del precedente metodo può essere fatto attraverso dei semplici algoritmi (chiamati Algoritmi o Tecniche di Linesearch). Un esempio di un tale algoritmo è riportato qui di seguito.

Procedura di Linesearch (calcolo del passo α_k).

Passo 0. Dati $x_k, d_k, \nabla f(x_k) \in R^n$, $\gamma \in (0,1)$ e $\alpha_0 > 0$, si pone $i = 0$.

Passo 1. Si calcola $f(x_k + \alpha_i d_k)$.

Passo 2. Se $f(x_k + \alpha_i d_k) > f(x_k) + \alpha_i \gamma \nabla f(x_k)^T d_k$

si pone $\alpha_{i+1} = \alpha_i/2$, $i = i + 1$ e si va al Passo 1.

Passo 3. Si calcola $f(x_k + 2\alpha_i d_k)$.

Passo 4. Se $f(x_k + 2\alpha_i d_k) \leq f(x_k) + 2\alpha_i \gamma \nabla f(x_k)^T d_k$

si pone $\alpha_{i+1} = 2\alpha_i$, $i = i + 1$ e si va al Passo 3.

Passo 2. Si pone $\alpha_k = \alpha_i$ e Stop.

Il precedente algoritmo determina entro un numero finito di iterazioni un valore α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 del Metodo del Gradiente. Questa proprietà è assicurata dal seguente teorema.

Teorema 2.4.2 *Sia $f \in C^1(R^n)$ e sia $\mathcal{L}(x_0) = \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ un insieme compatto. La Procedura di Linesearch termina dopo un numero fimito di iterazioni producendo un α_k che soddisfa le condizioni del Passo 3 del Metodo del Gradiente.*

Prova. La dimostrazione del teorema segue dal fatto che le procedura non può ciclare tra il Passo 1 ed il Passo 2 oppure tra il Passo 3 ed il Passo 4.

Se la procedura ciclasse tra il Passo 1 ed il Passo 2 esisterebbe una sequenza di scalari $\{\alpha_i\}$ tale che

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0,$$
$$\frac{f(x_k + \alpha_i d_k) - f(x_k)}{\alpha_i} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2,$$

da cui, utilizzando il Teorema B.3.2, si otterrebbe:

$$-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{r_1(x_k, \alpha_i)}{2\alpha_i} \geq -\gamma \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

che, facendo tendere $i \to \infty$, porterebbe all'assurdo:

$$0 \leq (1 - \gamma)\|\nabla f(x_k)\| \geq 0.$$

Se la procedura ciclasse tra il Passo 3 ed il Passo 4 esisterebbe una sequenza di scalari $\{\alpha_i\}$ tale che:

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \infty,$$
$$f(x_k + 2\alpha_i d_k) \leq f(x_k) - 2\alpha_i \gamma \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Facendo tendere $i \to \infty$ dalla precedente relazione si avrebbe

$$\lim_{i\to\infty} f(x_k + 2\alpha_i d_k) = -\infty$$

che sarebbe in constrasto con il fatto che $x_k + 2\alpha_i d_k \in \mathcal{L}(x_0)$, per ogni i, e con l'ipotesi che $\mathcal{L}(x_0)$ è un insieme compatto.

□

2.5 Condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata.

L'obiettivo di questa sezione è quello di caratterizare i punti di minimo di un problema di minimizzazione vincolata.

2.5.1 Problemi di ottimizzazione vincolata generali.

Per iniziare viene considerato un problema vincolato in forma generale, cioè di un problema del tipo:

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) \\ & x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

dove $f : R^n \to R$ è una funzione continua.

Una caratterizzazione generale dei minimi locali del Problema 2.27 può essere data utilizzando l'insieme delle direzioni di discesa della funzione obiettivo f, descritto dalla Definizione 2.3.1, ed il seguente insieme delle direzione ammissibili.

Definizione 2.5.1 *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme non vuoto. Si definisce* insieme delle direzioni ammissibili *di $\mathcal{F}$ nel punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ il seguente insieme $F(\bar{x})$:*

$$F(\bar{x}) = \{d \in R^n,\ d \neq 0 :\ \exists \delta > 0 \text{ per cui } \ \bar{x} + \alpha d \in \mathcal{F},\ \forall \alpha \in (0, \delta)\ \}.$$

Utilizzando gli insiemi D e F è possibile dare una caratterizzazione dei punti di minimo locale di un problema di minimizzazione vincolata.

Teorema 2.5.2 *Sia $f \in C(R^n)$. Se il punto $x^* \in R^n$ è un punto di minimo locale (globale) del Problema (2.7) allora*

$$D(x^*) \cap F(x^*) = \emptyset \tag{2.28}$$

Prova. Si supponga che, per assurdo, che non valga la (2.28). Allora esisterebbe un vettore $\bar{d} \in D(x^*) \cap F(x^*)$ per cui, ricordando la Definizione 2.3.1 e la Definizione 2.5.1, si avrebbe:

$$\begin{aligned} & f(x^* + \alpha\bar{d}) < f(x^*) \\ & x^* + \alpha\bar{d} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

comunque scelto lo scalare $\alpha \in (0, \delta)$, con $\delta > 0$. Quindi il punto x^* non sarebbe un minimo locale della funzione f su $\mathcal{F}$. □

2.5.2 Problemi di ottimizzazione vincolata con funzione obiettivo continuamente differenziabile.

Nel caso in cui f è continuamente differenziabile si può definire il seguente insieme di direzioni $D_s(\bar{x})$ nel punto $\bar{x}$

$$D_s(\bar{x}) = \{d \in R^n : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\} \tag{2.29}$$

Per quanto riguarda la relazione tra gli insiemi $D(\bar{x})$ e $S(\bar{x})$, si ha il seguente risultato:

Teorema 2.5.3 *Sia $f \in C^1(R^n)$. Allora per ogni $\bar{x} \in R^n$ si ha:*

$$D_s(\bar{x}) \subseteq D(\bar{x})$$

Prova. Dal Teorema B.3.2 si ha:

$$f(\bar{x} + \alpha d) = f(\bar{x}) + \alpha \left(\nabla f(x)^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) \tag{2.30}$$

in cui

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} = 0$$

Ora se $d \in D_s(\bar{x})$, per valori di α sufficentemente piccoli, il termine tra parentesi in (2.30) diventa negativo. Perciò, la (2.30) implica che, per valori di α sufficentemente piccoli, si ha

$$f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x})$$

da cui otteniamo che $d \in D(\bar{x})$ □

Utilizzando l'insieme D_s è possibile dare delle nuove caratterizzazioni di un minimimo locale di un problema di ottimizzazione vincolato. Il primo risultato è un condizione necessaria di ottimo che segue immediatamente da quella descritta dal Teorema 2.5.2.

Teorema 2.5.4 *Sia $f \in C^1(R^n)$ e sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ non vuoto. Se $\bar{x}$ è un minimo locale (globale) del Problema (2.7) allora*

$$D_s(\bar{x}) \cap F(\bar{x}) = \emptyset$$

2.5.3 Problemi di ottimizzazione con vincoli di disuguaglianza.

In questa sezione si considera il caso particolare in cui l'insieme ammissibile è descritto da m disequazioni, cioè

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : \quad g(x) \leq 0\}$$

dove $g : R^n \to R^m$, e $g_i \in C^1(R^n), \quad i = 1 \ldots m$.

Di conseguenza il problema di ottimizzazione si può scrivere:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e ricordando che l'insieme degli indici dei vincoli attivi $I(\bar{x})$ è dato dal seguente insieme:

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0\}, \tag{2.32}$$

si possono definire i due seguenti insiemi di direzioni

$$F_s(\bar{x}) = \{d \in R^n : \quad \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0 \quad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x})\} \tag{2.33}$$

$$F_w(\bar{x}) = \{d \in R^n : \quad \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x})\} \tag{2.34}$$

Teorema 2.5.5 *Siano $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots m$, allora si ha:*

$$F_s(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x}) \subseteq F_w(\bar{x})$$

Prova. Il Teorema B.3.2 implica che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) = g_i(\bar{x}) + \alpha \left(\nabla g_i(x)^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) \tag{2.35}$$

in cui

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} = 0. \tag{2.36}$$

Per tutti gli indici $i \in I(\bar{x})$ la (2.35) diventa:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) = \alpha \left(\nabla g_i(x)^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) \tag{2.37}$$

Se $d \in F_s(\bar{x})$ segue che $\nabla g_i(x)^T d < 0$. Da questa ultima relazione si ha che, per valori di α sufficientemente piccoli, il termine tra parentesi della (2.37) assume valori strettamente negativi. Quindi, per valori di α sufficentemente piccoli, la (2.37) implica che, per ogni $i \in I(\bar{x})$ si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) < 0 \qquad \text{per ogni} \;\; i \in I(\bar{x}). \tag{2.38}$$

Per tutti gli indici $i \notin I(\bar{x})$ si ha che $g_i(\bar{x}) < 0$. Perciò, per valori di α sufficientemente piccoli, il termine a destra della (2.35) assume valori negativi. Da questo segue che, per valori di α sufficientemente piccoli, si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) < 0 \qquad \text{per ogni} \;\; i \notin I(\bar{x}). \tag{2.39}$$

Dalla (2.38) e dalla (2.39) segue che $d \in F(\bar{x})$.

Se $d \in F(\bar{x})$ allora segue che, per valori sufficientemente piccoli di α, è verificata la disuguaglianza

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0 \qquad \text{per ogni} \;\; i = 1, \ldots, m. \tag{2.40}$$

Per ogni $i \in I(\bar{x})$, la (2.37) e la (2.40) implicano che, per valori sufficientemente piccoli di α, le seguenti relazioni sono vere :

$$\nabla g_i(x)^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \leq 0 \qquad \text{per ogni} \;\; i \in I(\bar{x}). \tag{2.41}$$

Dalla (2.41) e dalla (2.36) segue:

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\nabla g_i(x)^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) = \nabla g_i(x)^T d \leq 0, \qquad \text{per ogni} \;\; i \in I(\bar{x})$$

che completa la dimostrazione mostrando che $d \in F_w(\bar{x})$. □

Teorema 2.5.6 *Siano $f \in C^1(R^n)$ e $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots m$. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora*

$$D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) = \emptyset.$$

Prova. Il Teorema 2.5.5 implica che

$$D_s(\bar{x}) \cap F(\bar{x}) \supseteq D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}).$$

Quindi la prova del teorema segue dal Teorema 2.5.4 il quale afferma che se $\bar{x}$ è un minimo locale allora

$$\emptyset = D_s(\bar{x}) \cap F(\bar{x}) \supseteq D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}).$$

□

Il precedente teorema permette di stabilire il seguente risultato noto come *Teorema di Fritz-John.*

Teorema 2.5.7 *Siano $f \in C^1(R^n)$ e $g_i \in C^1(R^n)$, per $i = 1, \ldots, m$. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora esistono degli scalari λ_0, λ_i, con $i = 1, \ldots, m$, non tutti nulli e tali che:*

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, \\ &\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ &\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Prova. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora il Teorema 2.5.6 implica che non esiste nessun vettore tale che:

$$\begin{aligned} &\nabla f(\bar{x})^T d < 0 \\ &\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0 \qquad i \in I(\bar{x}). \end{aligned}$$

Applicando il Teorema di Gordan 2.2.3 segue che esistono degli scalari non tutti nulli $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, con $i \in I(\bar{x})$ tali che

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

La tesi del teorema segue ponendo $\lambda_i = 0$ per $i \notin I(\bar{x})$ □

Se si introduce la funzione Lagrangiana $\tilde{L} : R^n + R^{m+1} \to R$

$$\tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + g(x)^T \lambda \tag{2.42}$$

le condizioni del Teorema 2.5.7 si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{L}(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) &= \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \lambda = 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\leq 0 \\ \lambda_0 \geq 0,\ \lambda \geq 0, &\quad (\lambda_0, \lambda) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Attraverso le precedenti relazioni viene introdotta la seguente definizione.

Definizione 2.5.8 *Un punto $x^* \in R^n$ è detto* punto di Fritz-John *del Problema (2.31) se esistono degli scalari λ_0, λ_i, con $i = 1, \ldots, m$, (chiamati* moltiplicatori di Fritz-John*) tali che le condizioni (2.43) sono verificate.*

Utilizzando la precedente definizione ed il Teorema 2.5.6 si può stabilire il seguente corollario.

Corollario 2.5.9 *Siano $f \in C^1(R^n)$ e $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1 \ldots m$. Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ è un punto di Fritz-John se è solamente*

$$D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) = \emptyset.$$

I punti di Fritz-John che presentano $\lambda_0 = 0$ sono caratterizzati da relazioni in cui la funzione obiettivo non compare. Perciò difficilmente questi particolari punti di Fritz-John possono caratterizzare dei minimi locali, piuttosto sono rappresentativi di punti in cui si ha un comportamento particolare dei vincoli.

Per caratterizzare i punti di Fritz-John in cui $\lambda_0 \neq 0$ viene introdotta la seguente definizione.

Definizione 2.5.10 *Un punto $x^* \in R^n$ è detto* punto di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) *del Problema (2.31) se esistono degli scalari λ_i, con $i = 1, \ldots, m$, (chiamati* moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker*) per cui sono verificate le seguenti le condizioni:*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \lambda &= 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\leq 0 \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

È facile notare che ogni punto di Fritz-John con $\lambda_0 \neq 0$ è un punto di Karush-Kuhn-Tucker. Infatti se $\bar{x}$ è un punto di Fritz-John con $\lambda_0 \neq 0$, basta dividere la prima, la seconda e la quarta relazione della (2.43) per λ_0 per soddifare tutte relazioni (2.44) (ponendo $\lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$, con $i = 1, \ldots, m$).

In associazione ai punti di Karush-Kuhn-Tucker si introduce la funzione Lagrangiana $L : R^n \times R^m \to R$:

$$L(x, \lambda) = f(x) + g(x)^T \lambda$$

Utilizzando la precedente funzione Lagrangiana L la prima delle condizioni (2.44) si può scrivere:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda) = 0.$$

Il seguente teorema fornisce una completa caratterizzazione dei punti di Karush-Kuhn-Tucker ed è l'analogo del Corollario 2.5.9 per i punti di Fritz-John.

Teorema 2.5.11 *Siano $f \in C^1(R^n)$ e $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1 \ldots n$. Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ è un punto di Karush-Kuhn-Tuck se e solamente se*

$$D_s(\bar{x}) \cap F_w(\bar{x}) = \emptyset$$

Prova. Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ è un punto di Karush-Kuhn-Tucker se esiste un vettore $\lambda \in R^n$ per cui sono soddisfatte le condizioni (2.44). Queste ultime possono essere riscritte nalla forma:

$$\begin{aligned} &\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\lambda = 0 \\ &\quad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ &\quad \lambda_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

da cui segue

$$\textstyle\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x})\lambda_i = -\nabla f(\bar{x}), \qquad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(\bar{x}). \tag{2.45}$$

Utilizzando il Teorema di Farkas (2.2.1) si ottiene che il sistema (2.45) ammette soluzione se e solamente se il seguente sistema non ammette soluzioni

$$\begin{aligned} \nabla g_i(\bar{x})^T d &\leq 0 \\ -\nabla f(\bar{x})^T d &> 0 \end{aligned}$$

che implica $D_s(\bar{x}) \cap F_w(\bar{x}) = \emptyset$. □

Per poter garantisce che le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono condizioni necessarie di ottimo locale si deve richiedere che l'insieme ammissibile è sufficientemente regolare. Nel seguente teorema vengono riportate alcune ipotesi di regolarità dei vincoli del problema in grado di garantire che un minimimo locale vincolato è un punto di Karush-Kuhn-Tucker. In molti casi casi, tale ipotesi sono verificabili osservando la struttura dei vincoli del problema.

Teorema 2.5.12 *Siano $f \in C^1(R^n)$ e $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$. Se $\bar{x}$ è un punto minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora è necessariamente un punto di Karush-Kuhn-Tucker se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:*

a) (ipotesi di linearità) g_i, $i = 1, \ldots, m$ sono funzioni lineari;

b) (ipotesi di Mangasarian-Fromowitz) non esistono $\alpha_i \geq 0$, $i \in I(\bar{x})$, non tutti nulli per cui

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0;$$

c) (ipotesi di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi) i vettori $\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})$ sono linearmente indipendenti, sotto questa ipotesi, il vettore $\lambda \in R^m$ che, insieme a $\bar{x}$, soddisfa le condizioni (2.44) è unico.

Prova. Ipotesi a). La dimostrazione si basa sul far vedere che questa ipotesi è in grado di assicurare che

$$F(\bar{x}) = F_w(\bar{x}). \tag{2.46}$$

Infatti se vale (2.46), la tesi segue direttamente dal Teorema 2.5.4 e dal Teorema 2.5.11. Come primo passo si può ricordate il Teorema 2.5.5 che prova la seguente inclusione

$$F(\bar{x}) \subseteq F_w(\bar{x}), \tag{2.47}$$

Quindi rimane da dimostrare l'inclusione

$$F_w(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x}). \tag{2.48}$$

Se $g_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$, sono lineari allora esistono $a_i \in R^n$ e $b_i \in R$, $i = 1, \ldots, m$, tali che:

$$g_i(\bar{x}) = a_i^T x + b_i, \qquad \text{per ogni } \ i = 1, \ldots, m,$$

da cui si può scrivere:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) = a_i^T(\bar{x} + \alpha d) + b_i = g_i(\bar{x}) + \alpha a_i^T d, \qquad \text{per ogni } \ i = 1, \ldots, m, \tag{2.49}$$

Comunque scelto un vettore $d \in F_w(\bar{x})$ si ha:

- se $i \in I(\bar{x})$, allora $a_i^T d = \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0$ e $g_i(\bar{x}) = 0$ da cui la (2.49) implica che, per ogni valore positivo dello scalare α, si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0; \tag{2.50}$$

- se $i \notin I(\bar{x})$, allora $g_i(\bar{x}) < 0$ da cui segue che, per valori sufficientemente piccoli di α il termine di destra della (2.49) diventa non positivo e, quindi, si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0. \tag{2.51}$$

Dalla (2.50) e dalla (2.51) si ottiene che $d \in F(\bar{x})$. Che prova la (2.48).

Ipotesi b). Dal Teorema 2.5.7 esistono esistono $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, i = 1 \dots m$, non tutti nulli tali che

$$\tilde{\lambda}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i = 0 \tag{2.52}$$

$$\tilde{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \tag{2.53}$$

$$\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_i \geq 0 \tag{2.54}$$

da cui

$$\tilde{\lambda}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i = 0$$

Se fosse $\tilde{\lambda}_0 = 0$ si avrebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i = 0,$$

Questa uguaglianza e l'ipotesi b) implicherebbero che $\tilde{\lambda}_i = 0$ per ogni $i \in I(\bar{x})$. Ricordando che, per definizione, $\tilde{\lambda}_i = 0$ per ogni $i \notin I(\bar{x})$, si avrebbe la contraddizione che tutti i moltiplicatori $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_i, i = 1 \dots m$, sarebbero nulli.
Perciò si ha che $\tilde{\lambda}_0 > 0$. Ponendo

$$\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_0}, \qquad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, m,$$

dividendo la (2.52) per $\tilde{\lambda}_0$ ed utilizzando le (2.53) e (2.54) si ottiene che la coppia $(\bar{x}, \lambda)$ soddisfa il sistema (2.44).

Ipotesi c). Poichè l'ipotesi c) implica l'ipotesi b) segue che il punto di minimo locale $\bar{x}$ è necessariamente un punto di Karush-Kuhn-Tucker.
Se ci fosse un secondo vettore $\hat{\lambda} \in R^n, \hat{\lambda} \neq \lambda$ che soddisfacesse il sistema (2.44) si avrebbe che

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i = 0$$

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \hat{\lambda}_i = 0$$

da cui si avrebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) (\lambda_i - \hat{\lambda}_i) = 0$$

che contraddirebbe l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori $\nabla g_i(\bar{x}) \quad i \in I(\bar{x})$ $\square$

2.5.4 Problemi di ottimizzazione con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza

In questa sezione si considera il caso in cui l'insieme ammissibile è descritto da m disequazioni e da p equazioni, cioè

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : \quad h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\}$$

il corrispondente problema di ottimizzazione diventa:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.55}$$

dove $f : R^n \to R$, $g : R^n \to R^m$, $h : R^n \to R^p$ e $f \in C^1(R^n)$, $h_j \in C^1(R^n)$, $j = 1 \dots p$, $g_i \in C^1(R^n)$, $i = 1 \dots m$.

Caratterizzazioni matematiche dei punti di minimo di problemi che presentano sia vincoli di disuguaglianza che di uguaglinza possono essere ottenute seguendo gli stessi ragionamenti fatti nella sezione precedente e che hanno portato alle condizionidi ottimalità per problemi di ottimizzazione con soli vincoli di disuguaglianza. La presenza degli ulteriori vincoli di uguaglianza si riflette nella necessità di effettuare un analisi un po' più complessa dal punto di vista matematico.

In un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ si introduce un nuovo insieme di direzioni $H(\bar{x})$ definito nelle seguente maniera:

$$H(\bar{x}) = \{d \in R^n : \quad \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, p\}.$$

Utilizzando il precedente insieme di direzioni con gli insiemi $D_s(\bar{x})$ (definizione (2.29)) e $F_s(\bar{x})$ (definizione (2.33)) è possibile dare una prima caratterizzazione dei punti di minimo di un problema con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza. La dimostrazione di questo risultato viene omessa in quando ripete gli stesso ragionamenti del caso di problemi con soli vincoli di disuguaglianza ma richiede un aumento abbastanza significativo del tecnicismo matematico.

Teorema 2.5.13 *Siano $f \in C^1(R^n), g_i \in C^1(\mathcal{R}^n)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, e $h_j \in C^1(R^n)$, per ogni $j = 1, \dots, p$. Siano i vettori $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, p$, linearmente indipendenti. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in F allora*

$$D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) \cap H(\bar{x}) = \emptyset$$

Analogamente al caso di problemi con soli vincoli di disuguaglianza, il teorema precedente implica che ogni punto di minimo del problema con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza è un punto di Fritz e John.

Teorema 2.5.14 *Siano $f \in C^1(R^n)$, $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, $h_j \in C^1(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora esistono degli scalari λ_0, λ_i, $i = 1, \ldots, m$ e μ_j, $j = 1, \ldots, p$ non tutti nulli tali che:*

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i + \sum_{j=1}^{p} \nabla h_j(\bar{x}) \mu_j = 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Prova. Se $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \ldots, p$ sono linearmente dipendenti alloro esistono degli scalari μ_j, $j = 1, \ldots, p$ tali che

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

In questo caso la tesi del teorema segue ponendo $\lambda_0 = 0$, $\lambda_j = 0$, per ogni $j = 1, \ldots, m$.

Se $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \ldots, m$ sono linearmente indipendenti, il Teorema 2.5.13 implica che il sistema

$$\begin{aligned} &\nabla f(\bar{x})^T d < 0, \\ &\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0 \qquad i = 1, \ldots, m, \\ &\nabla h_j(\bar{x}) d = 0 \qquad j = 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{2.57}$$

non ammette soluzione.
Dal Teorema di Motzkin 2.2.4 il precedente sistema non ammette soluzione se esistono degli scalari λ_0, λ_i, $i \in I(\bar{x})$, μ_j, $j = 1, \ldots, p$ tali che

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i + \sum_{j=1}^{p} \nabla h_j(\bar{x}) \mu_j = 0 \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(\bar{x}). \end{aligned}$$

Definendo $\lambda_i = 0$, per ogni $i \notin I(x)$ segue la tesi del teorema. □

Analogamente al caso di insiemi ammissibili costituiti da sole disequazioni possiamo derivare le condizioni di Karush-Kuhn-Tuker dalla condizione di ottimalità di Fritz and John richiedendo delle ipotesi aggiuntive sui vincoli. Ripetendo gli stessi argomenti che hanno permesso di dimostrare il Teorema 2.5.12 è possibile stabilire il seguente risultato.

Teorema 2.5.15 *Siano $f \in C^1(R^n)$, $g_i C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, $h_j \in C^1(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora esistono due vettori $\lambda \in R^m$, $\mu \in R^p$ tali che:*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \lambda + \nabla h(\bar{x}) \mu = 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) = 0 \\ \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{2.58}$$

se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

a) *(ipotesi di linearità)* $g_i,\ i = 1, \dots, m$ *e* $h_j,\ j = 1, \dots, p$ *sono funzioni lineari;*

b) *(ipotesi di Mangasarian-Fromowitz) i vettori* $\nabla h_j(\bar{x}),\ j = 1, \dots, p$ *sono linearmente indipendenti e non esistono* $\alpha_i \geq 0,\ i \in I(\bar{x})$*, non tutti nulli e* β_j*,* $j = 1, \dots, p$*, per cui:*

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0;$$

c) *(ipotesi di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi) i vettori* $\nabla g_i(\bar{x})$*,* $i \in I(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}),\ j = 1, \dots, p$ *sono linearmente indipendenti, sotto questa ipotesi, i due vettori* $\lambda \in R^m$*,* $\mu \in R^p$ *che, insieme a* $\bar{x}$*, soddisfano le condizioni (2.58) sono unici.*

2.5.5 Condizioni di ottimalità del secondo ordine

In questa sezioni vengono brevemente riportate delle condizioni di ottimalità per un problemi di ottimizzazione con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza nel caso in cui le funzioni che descrivono il problema sono due volte continuamente differenziabili.

Per poter descrivere questi risultati è necessario introdurre degli ulteriori insiemi.
Dato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ ed un vettore di moltiplicatori λ, ricordando l'insieme degli indici dei vincoli attivi $I(\bar{x})$ dato dalla (2.32), si introduce il seguente insieme che indentifica gli indici dei vincoli detti strettamente attivi:

$$\bar{I}(\bar{x}, \lambda) = \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i > 0\}. \tag{2.59}$$

Dato il precedente insieme si può definire il seguente insieme di direzioni:

$$\begin{aligned} T(\bar{x}, \lambda) = \{d \in R^n : \quad & \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \in \bar{I}(\bar{x}, \lambda) \\ & \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x}) \backslash \bar{I}(\bar{x}, \lambda) \\ & \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, p\} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Il primo teorema descrive delle condizioni sufficienti di ottimalità per problemi vincolati.

Teorema 2.5.16 *Siano* $f \in C^2(R^n)$*,* $g_i \in C^2(R^n)$*, per ogni* $i = 1, \dots, m$*,* $h_j \in C^2(R^n)$*, per ogni* $j = 1, \dots, p$*. Se in corrispondenza del punto* $x^* \in \mathcal{F}$ *esistono uno scalare* λ_0 *e dei vettori* $\lambda \in R^m$*,* $\mu \in R^p$ *per cui sono soddisfatte le segunenti condizioni:*

$$\begin{aligned} & \nabla_x \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = 0 \\ & \lambda^T g(x^*) = 0 \\ & \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \\ & d^T \nabla_x^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) d > 0, \quad \textit{per ogni} \quad d \in T(x^*, \lambda), \quad d \neq 0, \end{aligned} \tag{2.61}$$

(dove $\tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(\bar{x})$*) allora il punto* x^* *è un punto di minimo locale stretto per Problema (2.55).*

Prova. Per assurdo, si suppone che $x^* \in \mathcal{F}$ non è un minimo locale stretto. Questo implica che comunque scelto un indice k esiste un punto $x_k \in B(x^\star; 1/k) \cap \mathcal{F}$ tale che

$$f(x_k) \leq f(x^\star).$$

Ricondando il Teorema B.3.2, si ha:

$$0 \geq f(x_k) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T (x_k - x^*) + r_1(x_k, x^*), \tag{2.62}$$
$$0 \geq g_i(x_k) - g_i(x^*) = \nabla g_i(x^*)^T (x_k - x^*) + r_i(x_k, x^*), \quad i \in I(x^*), \tag{2.63}$$
$$0 = h_j(x_k) - h_j(x^*) = \nabla h_j(x^*)^T (x_k - x^*) + r_j(x_k, x^*), \; j = 1, \ldots, p, \tag{2.64}$$

con

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_1(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_i(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_j(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} = 0.$$

Poichè le sequenza di vettori $\{(x_k - x^*)/\|x_k - x^*\|\}$ è limitata esiste un sottoinsieme di indici $K \subseteq \{1, 2, \ldots\}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} = \bar{d}. \tag{2.65}$$

Dal precedente limite e dalle (2.62),(2.63) e (2.64) si ottiene:

$$0 \geq \lim_{k\to\infty, k\in K} \left[\nabla f(x^*)^T \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_1(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} \right],$$
$$0 \geq \lim_{k\to\infty, k\in K} \left[\nabla g_i(x^*)^T \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_i(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} \right], \quad i \in I(x^*),$$
$$0 = \lim_{k\to\infty, k\in K} \left[\nabla h_j(x^*)^T \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_j(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|} \right], \; j = 1, \ldots, p,$$

da cui si ha:

$$0 \geq \nabla f(x^*)^T \bar{d}, \tag{2.66}$$
$$0 \geq \nabla g_i(x^*)^T \bar{d}, \quad i \in I(x^*), \tag{2.67}$$
$$0 = \nabla h_j(x^*)^T \bar{d}, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{2.68}$$

Facendo il prodotto scalare $\nabla \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)^T \bar{d}$, ricordando la prima della (2.61) e la definizione dell'insieme $\bar{I}(x^*, \lambda)$ si ottiene:

$$-\lambda_0 \nabla f(x^*)^T \bar{d} = \sum_{i\in\bar{I}(x^*,\lambda)} \lambda_i \nabla g_i(x^*)^T \bar{d} + \sum_{j=i,\ldots,p} \mu_j \nabla h_j(x^*)^T \bar{d},$$

Dalla precedente uguaglianza, dalla (2.61) e dalle (2.66)-(2.68) si ha:

$$0 \leq \sum_{i\in\bar{I}(x^*,\lambda)} \lambda_i \nabla g_i(x^*)^T \bar{d} \leq 0,$$

che, insieme alla definizione dell'insieme $\bar{I}(x^*, \lambda)$ (2.59), prova che

$$0 = \nabla g_i(x^*)^T \bar{d}, \quad i \in \bar{I}(x^*, \lambda). \tag{2.69}$$

Le (2.66), (2.67), (2.69), (2.68) mostrano che

$$\bar{d} \in T(x^*, \lambda). \tag{2.70}$$

Applicando il Teorema B.3.4 al Lagrangiano $\tilde{L}(x_k, \lambda_0, \lambda, \mu)$ e ricordando nuovamante la prima delle (2.61), si ottiene:

$$\tilde{L}(x_k, \lambda_0, \lambda, \mu) - \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}(x_k - x^*)^T \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + r_2(x_k, x^*),$$

con

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} = 0.$$

Poichè i punti x_k e x^* sono ammissibili e le condizioni (2.61) sono verificate si ha:

$$\tilde{L}(x_k, \lambda_0, \lambda, \mu) - \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 \left(f(x_k) - f(x^*)\right) + \lambda^T g(x_k) \leq 0,$$

da cui segue:

$$0 \geq \frac{1}{2}(x_k - x^*)^T \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + r_2(x_k, x^*).$$

Dividendo entrambi la precedente disuguaglianzz per $\|x_k - x^*\|^2$ ed utilizzando il limite (2.65)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{k\to\infty, k\in K} \left[\frac{(x_k - x^*)^T}{\|x_k - x^*\|} \nabla^2 \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) \frac{x_k - x^*}{\|x_k - x^*\|} + \frac{r_2(x_k, x^*)}{\|x_k - x^*\|^2} \right] \\ 0 &\geq \qquad \bar{d}^T \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu)\bar{d} \end{aligned} \tag{2.71}$$

La precedente (2.71) e la (2.70) contraddicono l'ultima delle (2.61). □

Dal precedente teorema si può derivare il seguente corollario.

Corollario 2.5.17 *Siano $f \in C^2(R^n)$, $g_i \in C^2(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, $h_j \in C^2(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Se in corrispondenza del punto $x^* \in \mathcal{F}$ esistono uno scalare λ_0 e dei vettori $\lambda \in R^m$, $\mu \in R^p$ per cui sono soddisfatte le segunenti condizioni:*

$$\begin{aligned} &\nabla_x \tilde{L}(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = 0 \\ &\lambda^T g(x^*) = 0 \\ &\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{2.72}$$

e se l'insieme dei vettori $\nabla g_i(x^*)$, $i \in \bar{I}(x^*, \lambda)$, $\nabla h_j(x^*)$, $j = 1, \ldots, p$ contengono n vettori linearmete indipendenti allora il punto x^* è un punto di minimo locale stretto per Problema (2.55).

Prova. La dimostrazione segue da Teorema 2.5.16 notando che l'ultima condizione delle (2.61) è banalmente soddisfatta per il fatto che $T(x^*, \lambda) = \{0_n\}$. □

Varie condizioni necessarie di ottimalitá del secondo ordine sono state proposte in letteratura. Una dei risultati più rappresentativi è il seguente teorema che descrive una versione delle condizioni di Karush-Kuhn-tucker del secondo ordine.

Teorema 2.5.18 *Siano $f \in C^2(R^n)$, $g_i \in C^2(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, $h_j \in C^2(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Siano i vettori $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in I(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \ldots, p$, linearmente indipendenti. Se $\bar{x}$ è un minimo locale di f in $\mathcal{F}$ allora esistono e sono unici due vettori $\lambda \in R^m$, $\mu \in R^p$ tali che:*

$$\begin{aligned} &\nabla_x L(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) = 0 \\ &\lambda^T g(x^*) = 0 \\ &\lambda \geq 0 \\ &d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda_0, \lambda, \mu) d \geq 0, \quad \textit{per ogni} \quad d \in T(x^*, \lambda), \end{aligned} \tag{2.73}$$

dove $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(\bar{x})$.

2.6 Utilizzazione delle condizione di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata.

Analogamente al caso dell'ottimizzazione non vincolata, le condizioni di ottimalità per problemi vincolati possono essere utilizzate per determinare direttamente le soluziomi di problemi vincolati con strutture particolarmente semplici oppure possono essere la base per definire dei metodi iterativi in grado di cercare di risolvere problemi vincolati generali.

Un esempio di applicazione diretta delle condizioni di ottimalità è il seguente.

Esempio. Si supponga di dover risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \ & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 x_2 \geq 25 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Osservando i vincoli si può notare che l'ultimo vincolo è inutile in quanto è implicato dai primi due. Quindi il precedente problema può essere riscritto togliendo l'ultimo vincolo e cambiando il segno degli altri (in modo che il problema abbia la stessa struttura di quella utilizzata nella teoria).

$$\begin{aligned} \min \ & x_1^2 + x_2^2 \\ & 25 - x_1 x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

I gradienti dei vincoli sono:

$$\nabla g_1(x) = -\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè nell'insieme ammissibile si ha necessariamente che $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ segue che i gradienti dei vincoli sono linearmente indipendenti in tutti i punti ammissibili. Utilizzando questa proprietà e il Teorema 2.5.12 si ottiene che ogni soluzione del precedente problema è un punto di Karush-Kuhn-Tucker.

Il Lagrangiano del problema è dato da:

$$L(x.\lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(25 - x_1x_2) - \lambda_2 x_1.$$

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono date da:

$$\frac{\partial L(x.\lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial L(x.\lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 x_1 = 0 \tag{2.75}$$

$$\lambda_1(25 - x_1x_2) = 0 \tag{2.76}$$

$$\lambda_2 x_1 = 0 \tag{2.77}$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$25 - x_1x_2 \leq 0 \tag{2.78}$$

$$-x_1 \leq 0. \tag{2.79}$$

Dalle (2.78) e (2.79) si ha che

$$x_1 > 0 \qquad x_2 > 0.$$

Dalle (2.77) e (2.75) segue che

$$\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1 > 0.$$

La condizione (2.76) implica

$$x_1x_2 = 25,$$

mentre le (2.74) e (2.75) implicano

$$x_1^2 = x_2^2.$$

Dalle ultime due uguaglianze si ottiene che la soluzione ottima del problema è l'unico punto di Karush-Kuhn-Tucker del problema, cioè:

$$x_1^* = 5, \qquad x_2^* = 5.$$

□

Riguardo la definizione di metodi iterativi per problemi generali di ottimizzazione vincolata un possibile approccio è quello di cercare di utilizzare anche per questa classe

di problemi i metodi e gli algoritmi proposti per problemi di ottimizzazione non vincolata. In questa sezione viene riportato uno dei primi metodi proposti in letteratura (chiamato Metodo delle Penalità Sequenziali). Il metodo consiste trasformare il problema di partenza in una sequenza di minimizzazioni (approssimate) non vincolate della seguente funzione di penalità:

$$P(x;\varepsilon) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{p} h_j(x)^2, \tag{2.80}$$

in cui, alla funzione obiettivo del problema originale, vengono aggiunti dei termini che penalizzano la violazione dei vincoli. Il peso di questi termini aumenta al diminuire del parametro ε (detto parametro di penalità).

Metodo delle Penalità Sequenziali.

Passo 0. Dati $x_0 \in R^n$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0,1)$, $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$, si pone $k = 0$.

Passo 1. Si pone

$$\begin{aligned}(\lambda_k)_i &= \frac{2}{\varepsilon_{k-1}} \max\{0, g_i(x_k)\}, \quad i = 1, \dots, m,\\ (\mu_k)_j &= \frac{2}{\varepsilon_{k-1}} h_j(x_k), \qquad j = 1, \dots, p,\end{aligned}$$

se (x_k, λ_k, μ_k) soddisfa le condizioni di KKT Stop.

Passo 2. A partire da punto x_k, si calcola il punto $x_{k+1} \in R^n$ tale tale che

$$\|\nabla P((x_{k+1}; \varepsilon_k)\| \le \delta_k.$$

Passo 3. Se

$$\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x_{k+1})\}^2 + \sum_{j=1}^{p} h_j(x_{k+1})^2 \le \theta_1 \Big(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x_k)\}^2 + \sum_{j=1}^{p} h_j(x_k)^2 \Big),$$

si pone $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ altrimenti si pone $\varepsilon_{k+1} = \theta_2 \varepsilon_k$.

Passo 4. Si pone $\delta_{k+1} = \theta_3 \delta_k$, $k = k + 1$ e si ritorna al Passo 1.

È da notare che, per calcolare il nuovo punto x_{k+1} al Passo 2, si può utilizzare qualsiasi metodo di ottimizzazione non vincolata, tra cui il Metodo del Gradiente descritto precedentemente.

Il seguente teorema descrive le propietà asintotiche dei punti prodotti dal precedente metodo.

Teorema 2.6.1 *Siano $f \in C^1(R^n)$ e $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C^1(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Sia $\{x_k\}$ la sequenza di punti prodotta dal Metodo delle Penalità Sequenziali. Sia $\bar{x}$ un punto di accumulazione della sequenza $\{x_k\}$ che soddisfa la seguente ipotesi:*

- *i vettori $\nabla h_j(\bar{x})$, $j = 1, \ldots, p$ sono linearmente indipendenti e non esistono $\alpha_i \geq 0$, $i \in I(\bar{x})$, non tutti nulli e β_j, $j = 1, \ldots, p$, per cui:*

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

Allora $\bar{x}$è un punto di Karush-Kuhn-Tucker.

Prova. Sia $\{x_k\}_K$ la sottosequenza tale che

$$\lim_{k \to \infty, k \in K} x_k = \bar{x}. \tag{2.81}$$

La tesi del teorema segue dalla dimostrazione dei seguenti tre punti:

i) il punto $\bar{x}$ appartiene all'insieme ammissibile del problema, cioè $\bar{x} \in \mathcal{F}$;

ii) le sequenze di vettori $\{\lambda_k\}_K$ e $\{\mu_k\}_K$ generate dall'algorimo al Passo 1 sono limitate;

iii) il punto $\bar{x}$ soddisfa le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker del problema.

Punto i). Se esiste un $\bar{k}$ tale che, per ogni $k \geq \bar{k}$, si ha $\varepsilon_k = \varepsilon > 0$ significa che per ogni $k \geq \bar{k}$ il test al Passo 3 è soddisfatto. Da questo segue che:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x_k)\}^2 + \sum_{i=1}^{p} h_j(x_k)^2 = 0,$$

da cui segue che:

$$\lim_{k \to \infty, k \in K} \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x_k)\} = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(\bar{x})\} = 0,$$
$$\lim_{k \to \infty, k \in K} \sum_{j=1}^{p} h_j(x_k) = \sum_{j=1}^{p} h_j(\bar{x}) = 0.$$

Le precedenti relazioni provano che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.
Si consideri ora il caso in cui la sequenza di scalari $\{\varepsilon_k\}$ è tale che

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0.$$

Dal Passo 2 si ha:

$$\left\| \varepsilon_{k-1} \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x_k)\} \nabla g_i(x_k) + \sum_{j=1}^{p} h_j(x_k) \nabla h_j(x_k) \right\| \leq \varepsilon_{k-1} \delta_{k-1}.$$

Facendo i limiti per $k \to \infty$ e $k \in K$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(\bar{x})\} \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} h_j(\bar{x}) \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

La precedente uguaglianza e l'ipotesi fatta di regolarità dei vincoli nel punto $\bar{x}$ implicano che:

$$\max\{0, g_i(\bar{x})\} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad h_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p,$$

che assicurano nuovamente che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Punto ii). Sia

$$V_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\lambda_k)_i^2 + \sum_{j=1}^{p} (\mu_k)_j^2}. \tag{2.82}$$

Se, per assurdo, le sequenze di vettori $\{\lambda_k\}_K$ e $\{\mu_k\}_K$ fossero illimitate, esisterebbero delle sottosequenze $\{\lambda_k\}_{\tilde{K}}$ e $\{\mu_k\}_{\tilde{K}}$, con $\tilde{K} \subseteq K$ tali che:

$$\lim_{k \to \infty, k \in \tilde{K}} V_k = \infty. \tag{2.83}$$

Dalla definizione di V_k si avrebbe che le sottosequenze $\{\lambda_k / V_k\}_{\tilde{K}}$ e $\{\mu_k / V_k\}_{\tilde{K}}$ sarebbero limitate quindi esisterebbe un sottoinsieme di indici $\hat{K} \subseteq \tilde{K}$ tale che:

$$\lim_{k \to \infty, k \in \hat{K}} \frac{(\lambda_k)_i}{V_k} = \tilde{\lambda}_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.84}$$

$$\lim_{k \to \infty, k \in \hat{K}} \frac{(\mu_k)_j}{V_k} = \tilde{\mu}_j, \qquad j = 1, \ldots, p. \tag{2.85}$$

Inoltre dalla (2.82) si avrebbe anche:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i^2 + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j^2} = 1. \tag{2.86}$$

Dal Passo 2 si avrebbe:

$$\left\| \frac{1}{V_k} P(x_k; \varepsilon_{k-1}) \right\| = \left\| \frac{\nabla f(x_k)}{V_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\lambda_k)_i}{V_k} \nabla g_i(x_k) + \sum_{j=1}^{p} \frac{(\mu_k)_j}{V_k} \nabla h_j(x_k) \right\| \leq \frac{\delta_{k-1}}{V_k}.$$

Facendo i limiti per $k \to \infty$ e $k \in \hat{K}$ si avrebbe:

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0. \tag{2.87}$$

La (2.84), la (2.86), la (2.85) e la (2.87) negherebbero l'ipotesi di regolarità dei vincoli nel punto $\bar{x}$.

Punto iii). Dal Passo 2 e dalla definizione del vettore λ_k si ha:

$$\left\| \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_k)_i \nabla g_i(x_k) + \sum_{j=1}^{p} (\mu_k)_j \nabla h_j(x_k) \right\| \leq \delta_{k-1}, \tag{2.88}$$

$$\lambda_k^T g(x_k) \geq 0, \tag{2.89}$$

$$\lambda_k \geq 0. \tag{2.90}$$

Poichè le le sottosequenze $\{\lambda_k\}_K$ e $\{\mu_k\}_K$ sono limitate esiste un sottoinsieme di indici $\bar{K} \subseteq K$ tale che:

$$\lim_{k \to \infty, k \in \bar{K}} x_k = \bar{x} \in \mathcal{F}, \tag{2.91}$$

$$\lim_{k \to \infty, k \in \bar{K}} \lambda_k = \tilde{\lambda} \geq 0, \tag{2.92}$$

$$\lim_{k \to \infty, k \in \bar{K}} \mu_k = \bar{\mu}, \tag{2.93}$$

$$\lim_{k \to \infty, k \in \bar{K}} \delta_{k-1} = 0. \tag{2.94}$$

Dalle (2.88)-(2.94) si ottiene:

$$\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \bar{\lambda} + \nabla h(\bar{x}) \bar{\mu} = 0, \tag{2.95}$$

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0, \tag{2.96}$$

$$\bar{\lambda} \geq 0, \tag{2.97}$$

$$g(\bar{x}) \leq 0, \tag{2.98}$$

$$h(\bar{x}) = 0. \tag{2.99}$$

La (2.97) e la (2.98) implicano che $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq 0$ che, insieme alla (2.96), da

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0. \tag{2.100}$$

In conclusione si ottiene che le (2.95),(2.97), (2.98), (2.99), (2.100) mostrano che il punto $\bar{x}$ è un punto di Karush-Kuhn-Tucker del problema. □

Capitolo 3

Condizioni di Ottimalità per Particolari Problemi di Ottimizzazione

3.1 Introduzione

In questo capitolo vengono descritti alcuni esempi di classi di problemi di ottimizzazione le cui strutture particolari permettono di caratterizzare meglio, dal punto di vista matematico, i loro punti di minimo rispetto alle condizioni di ottimalità descritte nell'ultima sezione del capitolo precedente.

3.2 Problemi di programmazione convessa

Una classe importante dal punto di vista applicativo è quella dei problemi di progammazione convessa. Prima di descrivere questa particolare classe di problemi di minimizzazione, è necessario richiamare le seguenti defizioni.

Definizione 3.2.1 *Dato un insieme $C \subseteq R^n$, si dice che C è* un insieme convesso *se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

Definizione 3.2.2 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso e sia $f : C \to R$. Si dice che f è* convessa *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che f è stettamente convessa *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$, con $x \neq y$, e comunque scelto un scalare $\alpha \in (0, 1)$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Definizione 3.2.3 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso e sia $f : C \to R$. Si dice che f è* concava *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che f è stettamente concava *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$, con $x \neq y$, e comunque scelto un scalare $\alpha \in (0, 1)$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

La seguente proposizione richiama alcune delle proprietà delle funzioni convesse.

Proposizione 3.2.4 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso aperto. Se f è continuamente differenziabile su C allora:*

(i) f è convessa su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$ si ha:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x);$$

(ii) f è strettamente convessa su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$, con $x \neq y$, si ha:

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^T (y - x).$$

Se f è due volte continuamente differenziabile su C allora:

(iii) f è convessa su C se e solamente se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n;$$

(iv) f è strettamente convessa su C se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d > 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n, d \neq 0.$$

Le Proprietà (i) e (ii) sono particolarmente significative, come si vedrà in seguito, per lo studio dei punti di minimo di questa classe particolare di funzioni. Le Proprietà (iii) e (iv) sono delle utili condizioni per identificare la convessità di una funzione.

Analogamente al caso di funzioni convesse si può stabilire la seguente proposizione che fornisce un aiuto a riconoscere le funzioni concave.

Proposizione 3.2.5 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso aperto. Se f continuamente differenziabile su C allora:*

(i) f è concava su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$ si ha:

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(x)^T (y - x);$$

(ii) *f è strettamente concava su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$, con $x \neq y$, si ha:*

$$f(y) - f(x) < \nabla f(x)^T (y - x).$$

Se f è due volte continuamente differenziabile su C allora:

(iii) *f è concava su C se e solamente se per ogni $x \in C$ si ha:*

$$d^T \nabla^2 f(x) d \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n;$$

(iv) *f è strettamente concava su C se per ogni $x \in C$ si ha:*

$$d^T \nabla^2 f(x) d < 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n, d \neq 0.$$

A questo punto si può introdurre la classe dei problema di programmazion convessa.

Definizione 3.2.6 *Si definisce* problema di programmazione convessa *un problema* di minimizzazione *del tipo:*

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un insieme convesso *e f è una* funzione convessa *su $\mathcal{F}$ o, equivalentemente, un problema di* massimizzazione *del tipo:*

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un insieme convesso *e f è una* funzione concava *su $\mathcal{F}$.*

I problemi di programmazione convessa godono di importanti proprietà descritte nei teoremi seguenti.

Proposizione 3.2.7 (Coincidenza tra minimi locali e minimi globali) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme convesso e f una funzione convessa (strettamente convessa) su $\mathcal{F}$. Allora ogni punto (un punto) di minimo locale di f su $\mathcal{F}$ è anche (l'unico) punto di minimo globale.*

Prova. Sia x^* un punto di minimo locale di f su $\mathcal{F}$. Dalla definizione (Definizione 1.1.6) di minimo locale deve esistere una sfera aperta $B(x^*; \rho)$ con $\rho > 0$ tale che

$$f(x^\star) \leq f(y), \quad \text{per ogni} \quad y \in B(x^\star; \rho) \cap \mathcal{F}. \tag{3.1}$$

Sia x un qualsiasi altro punto di $\mathcal{F}$. Dalla convessità di $\mathcal{F}$ si ha che

$$z(\alpha) = (1 - \alpha) x^\star + \alpha x \in \mathcal{F}, \qquad \text{per ogni} \qquad \alpha \in [0, 1].$$

Poichè per $\alpha = 0$ si ha $z(0) = x^\star$, è possibile trovare un valore $\bar{\alpha} \in (0, 1]$ tale che

$$z(\bar{\alpha}) = (1 - \bar{\alpha})x^\star + \bar{\alpha}x \in B(x^\star; \rho) \cap \mathcal{F}.$$

Da cui, sfrutttando la relazione (3.1), si ottiene:

$$f(x^\star) \leq f(z(\bar{\alpha})).$$

Utilizzando la convessità della funzione obiettivo si ha:

$$f(x^\star) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1 - \bar{\alpha})x^\star + \bar{\alpha}x) \leq (1 - \bar{\alpha})f(x^\star) + \bar{\alpha}f(x),$$

che, ricordando che $\bar{\alpha} > 0$, implica:

$$f(x^\star) \leq f(x). \tag{3.2}$$

Poichè il punto x è stato scelto arbitrariamente in $\mathcal{F}$, la relazione (3.2) dimostra che il punto $x^\star$ è un minimo globale.
Se la funzione è strettamente convessa si ha, invece:

$$f(x^\star) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1 - \bar{\alpha})x^\star + \bar{\alpha}x) < (1 - \bar{\alpha})f(x^\star) + \bar{\alpha}f(x),$$

da cui:

$$f(x^\star) < f(x),$$

che implica che $x^\star$ è l'unico minimo globale. □

Proposizione 3.2.8 (Coincidenza tra punti stazionari e minimi globali) *Sia f una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su R^n. Allora un punto stazionario di f su R^n è un minimo globale (l'unico minimo globale) di f su R^n.*

Prova. Sia x^* un punto stazionario di f su R^n, cioè un punto tale che:

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Comunque scelto $x \in R^n$, se la funzione f è convessa, il punto (i) della Proposizione 3.2.4 assicura che:

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0,$$

mentre se la funzione f è strettamente convessa il punto (ii) della stessa proposizione implica che:

$$f(x) - f(x^*) > \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0.$$

Le due precedenti relazioni dimostrano l'enunciato del teorema. □

Proposizione 3.2.9 (Coincidenza tra punti di Kerush-Kuhn-Tucker e minimi globali) *Sia dato il seguente problema vincolato*

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &\quad a_j^T x - b_j = 0 \quad j = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{3.3}$$

e sia f una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su R^n, siano g_i, $i = 1, \ldots, m$, delle funzioni convesse e continuamente differenziabili su R^n. Allora un punto di Kuhn-Tucker del Problema 3.3 è un minimo globale (l'unico minimo globale) del Problema 3.3.

Prova. Prima di tutto si può dimostrare che l'insieme ammissibile del Problema 3.3è un insieme convesso. Infatti comunque presi due punti $\hat{x}$ e $\tilde{x}$ tali che:

$$\begin{aligned} &g_i(\hat{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad a_j^T \hat{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, q, \\ &g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad a_j^T \tilde{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, q, \end{aligned}$$

si ha che il punto $\bar{x} = \alpha\hat{x} + (1-\alpha)\tilde{x}$, per ogni $\alpha \in [0, 1]$, soddisfa:

$$\begin{aligned} &g_i(\bar{x}) = g_i(\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\tilde{x}) \leq \alpha g_i(\hat{x}) + (1-\alpha) g_i(\tilde{x}) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ &a_j^T \bar{x} - b_j = a_j^T(\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\tilde{x}) - b_j = \alpha b_j + (1-\alpha) b_j - b_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, q. \end{aligned}$$

Sia, ora, $x \in R^n$ un qualsiasi punto ammissibile per il Problema 3.3, cioè un punto che soddisfa

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad a_j^T x - b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{3.4}$$

Se si indicano con λ^* e μ^* i moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker (Teorema 2.5.15), si ha che $\lambda^* \geq 0$ ed utilizzando la (3.4) si ha

$$\lambda_i^* g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.5}$$

da cui, utilizzando di nuovo la (3.4), si ha:

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \left(a_j^T x - b_j \right). \tag{3.6}$$

Dalla convessità di f e di g_i, $i = 1, \ldots, m$ e dalla linearità dei vincoli di uguaglianza si ha:

$$\begin{aligned} &f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*), \\ &g_i(x) \geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*), \qquad i = 1, \ldots, m \\ &a_j^T x - b_j = a_j^T (x - x^*), \qquad j = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Utilizzando le relazioni (3.7) nella (3.6) si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \left(g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \right) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \left(a_j^T (x - x^*) \right). \tag{3.8}$$

che può essere riscritta mettendo in evidenza il vettore $(x - x^*)$:

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) + \left(\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* a_j \right)^T (x - x^*). \tag{3.9}$$

da cui, tenendo conto che $\nabla h_j = a_j$, $j = 1, \ldots, q$, si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T (x - x^*). \tag{3.10}$$

Poichè, x^* è un punto di Kuhn-Tucker si ha che:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \qquad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.11}$$

In conclusione la (3.10) e la (3.11) implicano che, comunque scelto un punto ammissibile x per il Problema 3.3, si ha

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Che dimostra che il punto di Kuhn-Tucker x^* è un minimo globale del Problema 3.3. Se la funzione f fosse strettamente convessa allora la prima delle relazioni (3.7) potrebbe essere sostituita da

$$f(x) > f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*)$$

Ripetendo gli stessi passaggi fatti in precedenza, si arriverebbe alla conclusione che, comunque scelto un punto ammissibile x per il Problema 3.3, si avrebbe

$$f(x) > f(x^*),$$

dimostrando che il punto x^* è l'unico minimo globale del Problema 3.3. □

3.3 Problemi di programmazione concava

Un'altra classe di problemi di minimizzazione particolarmente importante è quella dei problemi di programmazione concava. Infatti questi particolari problemi di ottimizzazione sono in grado di modellizzare numerosi problemi che nascono nel campo dell'economia. Inoltre è possibile dimostrare che, sotto opportune ipotesi, molti problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere trasformati in problemi (continui) di programmazione concava.

Si definisce *problema di programmazione concava* un problema *di minimizzazione* del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un *insieme convesso* e f è una *funzione concava* su $\mathcal{F}$ o, equivalentemente, un problema di *massimizzazione* del tipo:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un *insieme convesso* e f è una *funzione convessa* su $\mathcal{F}$.

I problemi di programmazione concava sono molto più "difficili" di quelli convessi. La difficoltà principale risiede nel fatto che i problemi concavi presentano normalmente molti punti di minimo locale che non sono punti di minimo globale.

Tuttavia, la particolare struttura della funzione obiettivo di questi problemi fornisce comunque informazioni importanti circa i suoi punti di minimo globale. Infatti la seguente proposizione dimostra che le soluzioni ottime dei problemi di programmazione concava, ove esistano, appartengono alla frontiera dell'insieme ammissibile.

Teorema 3.3.1 (Assenza di soluzioni ottime interne) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme convesso e sia f una funzione concava e non costante su $\mathcal{F}$. Allora, se esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$, questo appartiene alla frontiera di $\mathcal{F}$.*

Prova. Supponiamo che il problema ammetta soluzione e che x^* sia una soluzione ottima. Poichè, per ipotesi, f non è costante su $\mathcal{F}$ deve esistere un punto $\hat{x} \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(\hat{x}) > f(x^\star).$$

Supponiamo ora che $x \in \mathcal{F}$ sia un punto interno all'insieme ammissibile. Deve allora esistere una sfera aperta $B(x;\rho)$ con centro in x e raggio $\rho > 0$ tutta contenuta in $\mathcal{F}$. Sulla retta congiungente $\hat{x}$ con x possiamo allora determinare un $y \in B(x;\rho) \subset \mathcal{F}$ tale che x appartenga al segmento $[\hat{x}, y]$ e risulti $y \neq x$, ossia possiamo trovare un α con $0 \leq \alpha < 1$ tale che

$$x = (1-\alpha)\hat{x} + \alpha y.$$

Per la concavità di f e l'ipotesi che sia $f(\hat{x}) > f(x^\star)$, tenendo conto del fatto che $f(y) \geq f(x^\star)$ e che $1-\alpha > 0$ (perchè $y \neq x$), si ottiene:

$$f(x) \geq (1-\alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(y) > (1-\alpha)f(x^\star) + \alpha f(x^\star) = f(x^\star).$$

Ciò dimostra che $f(x) > f(x^\star)$ e quindi che non può esistere una soluzione ottima in un punto interno. □

Nel caso di minimizzazione di funzioni concave con vincoli lineari, vale un risultato simile al Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare (si veda Cap. 5). Infatti ripetendo argomenti simili a quelli utilizzati nel Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare si ha il seguente teorema.

Teorema 3.3.2 (Soluzione ottima su un vertice) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un poliedro che ha almeno un vertice e sia f una funzione concava su $\mathcal{F}$ che ammetta minimi globali su $\mathcal{F}$. Allora, esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$ che coincide con un vertice del poliedro $\mathcal{F}$.*

Questo risultato mostra che la ricerca di un minimo globale di una funzione concava su un simplesso si può ridurre al problema di minimizzare la funzione sull'insieme dei vertici del poliedro $\mathcal{F}$.

Capitolo 4

Dualità

4.1 Introduzione

In questo capitolo viene introdotta la teoria della dualità nel campo della programmazione matematica. Tale teoria fornisce risultati particolarmente importanti sia dal punto di vista teorico che da quello algoritmico.

In particolare la teoria della dualità permette di associare ad un dato problema di ottimizzazione un suo *problema duale*. Sotto determinate ipotesi il problema duale può presentare stretti legami con il problema di partenza (detto *problema primale*) e, allo stesso tempo, avere un struttura più favorevole per eventuali analisi teoriche oppure più adatta ad essere sfruttata dal punto di vista computazionale.

4.2 Problema Primale Generale e Punti di Sella

Come punto di partenza della trattazione fatta in questo capitolo si considera il seguente problema di minimizzazione:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{4.1}$$

dove $f : R^n \to R$, $g : R^n \to R^m$, $h : R^n \to R^p$ e $X \subseteq R^n$.

Quindi, in questo caso, l'insieme ammissibile è dato da:

$$\mathcal{F} = \{x \in X : \quad h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\}. \tag{4.2}$$

In connessione al precedente problema di minimo (4.1) si può richiamare la funzione Lagrangiana $L : R^n \times R^m \times R^p \to R$ data da:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x), \tag{4.3}$$

e si può introdurre la seguente definizione di punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3).

Definizione 4.2.1 *Una tripla* $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ *con* $\bar{x} \in X$, $\bar{\lambda} \in R^m$, $\bar{\lambda} \geq 0$ *e* $\bar{\mu} \in R^p$ *è detta* punto di sella *della funzione Lagrangiana (4.3) se per ogni* $x \in X$, *per ogni* $\lambda \in R^m$, $\lambda \geq 0$ *e per ogni* $\mu \in R^p$

$$L(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}). \tag{4.4}$$

Nel seguito, dato un punto di sella $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, i corrispondenti vettori $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ vengono indicati come *moltiplicatori di Lagrange* per distinguerli da quelli di Fritz-John o quelli di Karush-Kuhn-Tucker precedentemente introdotti.

Attraverso l'esistenza di punti di sella è possibile dare una importante condizione sufficiente di ottimalità per il Problema 4.1.

Teorema 4.2.2 *Siano* $f \in C(R^n)$ *e* $g_i \in C(R^n)$, *per ogni* $i = 1, \ldots, m$, *e* $h_j \in C(R^n)$, *per ogni* $j = 1, \ldots, p$. *Se* (x^*, λ^*, μ^*) *è un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3) allora il punto* x^* *è un minimo globale del Problema 4.1 e valgono le seguenti relazioni:*

$$x^* \in X, \quad g(x^*) \leq 0, \quad h(x^*) = 0 \quad \textit{ammissibilità primale} \tag{4.5}$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \textit{ammissibilità duale} \tag{4.6}$$

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in X} L(x, \lambda^*, \mu^*), \quad \textit{ottimalità Lagrangiana} \tag{4.7}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \textit{complementarità.} \tag{4.8}$$

Prova. Sia (x^*, λ^*, μ^*) un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3).
Dalla disuguaglianza di sinistra della (4.4) segue che, per ogni $\lambda \in R^m$, $\lambda \geq 0$ e per ogni $\mu \in R^p$, si ha:

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x^*),$$

da cui segue:

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} (\mu_j - \mu_j^*) h_j(x^*) \leq 0. \tag{4.9}$$

Se, per ogni $l = 1, \ldots, m$, si pone $\lambda_l = \lambda_l^* + 1$, $\lambda_i = \lambda_i^*$, per $i = 1, \ldots, m$ e $i \neq l$, e si pone $\mu_j = \mu_j^*$, per $j = 1, \ldots, p$, la (4.9) implica:

$$g_l(x^*) \leq 0, \qquad l = 1, \ldots, m. \tag{4.10}$$

Se, per ogni $\hat{l} = 1, \ldots, p$, si pone $\mu_{\hat{l}} = \mu_{\hat{l}}^* + 1$, $\mu_j = \mu_j^*$, per $j = 1, \ldots, p$ e $j \neq \hat{l}$, e si pone $\lambda_i = \lambda_i^*$, per $i = 1, \ldots, m$, la (4.9) implica:

$$h_{\hat{l}}(x^*) \leq 0, \qquad \hat{l} = 1, \ldots, p. \tag{4.11}$$

Se, per ogni $\hat{l} = 1, \ldots, p$, si pone $\mu_{\hat{l}} = \mu^*_{\hat{l}} - 1$, $\mu_j = \mu^*_j$, per $j = 1, \ldots, p$ e $j \neq \hat{l}$, e si pone $\lambda_i = \lambda^*_i$, per $i = 1, \ldots, m$, la (4.9) implica:

$$-h_{\hat{l}}(x^*) \leq 0, \qquad \hat{l} = 1, \ldots, p. \tag{4.12}$$

Ricordando che, per la definizione (4.2.1) di punto di sella, si ha che $x^* \in X$, le relazioni (4.10), (4.11), (4.12) dimostrano che il punto x^* è ammissibile per il Problema 4.1 e che le relazioni (4.5) sono verificate.

La relazione (4.6) segue nuovamente dalla definizione (4.2.1) di punto di sella.

La relazione (4.7) deriva invece dalla disuguaglianza di destra della (4.4).

Utilizzando di nuovo la disuguaglianza di sinistra della (4.4), ponendo $\lambda = 0$ e $\mu = 0$, e ricordando che $h(x^*) = 0$ si ottiene che:

$$(\lambda^*)^T g(x^*) \geq 0. \tag{4.13}$$

Poichè $\lambda^* \geq 0$ e $g(x^*) \leq 0$ si ha che:

$$(\lambda^*)^T g(x^*) \leq 0. \tag{4.14}$$

Le (4.13) e (4.14) dimostrano la relazione (4.8).

Per finire, la disuguaglinaza destra della (4.4) e le relazioni (4.5) e (4.8) danno luogo a:

$$f(x^*) \leq f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x), \tag{4.15}$$

da cui, ricordando che $\lambda^* \geq 0$, segue che

$$f(x^*) \leq f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x) \leq f(x), \tag{4.16}$$

per ogni x ammissibile (cioè ogni $x \in X$, tale che $g(x) \leq 0$ e $h(x) = 0$. Quindi, la (4.16) dimostra che x^* è un minimo globale del Problema 4.1. □

Il precedente risultato stabilisce una condizione sufficiente di ottimalità in termini di esistenza di moltiplicatori di Lagrange. Infatti il teorema afferma che se in un punto $x^* \in X$ esistono dei moltiplicatori di Lagrange (λ^*, μ^*) (cioè tali che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella) allora x^* è un minimo globale del Problema 4.1.

In generale non si può stabilire una condizione necessaria analoga. Infatti se x^* è un minimo globale del Problema 4.1 non esistono necessariamente dei moltiplicatori di Lagrange (λ^*, μ^*) cioè dei moltiplicatori tali che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella. Per poter garantire l'esistenza di tali moltiplicatori è necessario richiere della ipotesi sulle funzione obbiettivo e i vincoli. Il seguente teorema è un esempio di tali risultati.

Teorema 4.2.3 *Siano $f \in C(R^n)$ e $g_i \in C(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Si assuma che la funzione f sia convessa su R^n e che una delle seguenti condizioni sia soddisfatta:*

a) (ipotesi di linearità) le funzioni g_i, $i = 1, \ldots, m$ e h_j, $j = 1, \ldots, p$ sono lineari;

b) (ipotesi di Slater) le funzioni g_i, $i = 1, \ldots, m$ sono convesse su R^n, le funzioni h_j, $j = 1, \ldots, p$ sono lineari ed esiste un punto $\tilde{x} \in R^n$ tale che:

$$g(\tilde{x}) < 0 \qquad h(\tilde{x}) = 0.$$

Se x^* è un minimo globale del Problema 4.1 con $X = R^n$ allora esistono due vettori $\lambda^* \in R^m$, $\mu^* \in R^p$ tali che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3).

Nel caso di problemi di problemi convessi e differenziabili si può stabilire l'equivalenza tra i punti di sella e i punti di Karush-Kuhn-Tucker e, quindi, l'equivalenza tra i moltiplicatori di Lagrange e quelli di Karush-Kuhn-Tucker. Tale equivalenza è mostrata dal seguente teorema in cui per semplicità si pone $X = R^n$.

Teorema 4.2.4 *Siano $f \in C^1(R^n)$, $g_i \in C^1(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C^1(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Si assuma che le funzione f e g_i, per ogni $i = 1, \ldots, m$, siano convessa su R^n e che le funzioni h_j, $j = 1, \ldots, p$ siano lineari.*
Sia, inoltre, $X = R^n$ nel Problema 4.1.
Allora (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3) se e solamente se x^* è un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema 4.1 e due vettori $\lambda^* \in R^m$, $\mu^* \in R^p$ sono i corrispondenti multiplicatori.

Prova. Sia x^* un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema 4.1 e siano i due vettori $\lambda^* \in R^m$, $\mu^* \in R^p$ i corrispondenti multiplicatori. Quindi la tripla (x^*, λ^*, μ^*) soddisfa le condizioni (2.58). Dalla convessità di f e di g_i, $i = 1, \ldots, m$ e dalla linearità dei vincoli di uguaglianza h_j, $j = 1, \ldots, p$, si ha:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*), \tag{4.17}$$

$$g_i(x) \geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{4.18}$$

$$h_j(x) = h_j(x^*) + \nabla h_j(x^*)^T (x - x^*), \qquad j = 1, \ldots, q, \tag{4.19}$$

per ogni $x \in R^n$. Moltiplicando ognuna delle (4.18) per λ_i^*, $i = 1, \ldots, m$, moltiplicando ognuna delle (4.19) per μ_j^*, $j = 1, \ldots, m$, sommandole, poi, con la (4.17) si ottiene per ogni $x \in R^n$:

$$L(x, \lambda^*, \mu^*) \geq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T (x - x^*). \tag{4.20}$$

Ricordando che in un punto di KKT si ha $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, dalla (4.20) segue che:

$$L(x, \lambda^*, \mu^*) \geq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in R^n. \tag{4.21}$$

Dalla definizione di punto di KKT si ha anche che $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$ e $\lambda^* g(x^*) = 0$ da cui segue

$$L(x^*, \lambda, \mu) \leq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \quad \text{per ogni} \quad (\lambda, \mu) \in R^m \times R^p \quad \lambda \geq 0. \tag{4.22}$$

Le (4.21) e (4.22) dimostrano che (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3).

Sia ora (x^*, λ^*, μ^*) un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3) dalle (4.5)-(4.8) del Teorema 4.2.2 si ha:

$$g(x^*) \leq 0, \quad h(x^*) = 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad (\lambda^*)^T g(x^*) = 0, \tag{4.23}$$

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in X} L(x, \lambda^*, \mu^*). \tag{4.24}$$

Dalla (4.24) segue che il punto x^* è il minimimo globale della funzione $L(x, \lambda^*, \mu^*)$ quindi dal Teorema 2.9 segue che:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0. \tag{4.25}$$

La (4.23) e la (4.25) garantiscono che x^* è un punto di Karush Kuhn Tucker del Problema 4.1 e due vettori λ^*, μ^* sono i corrispondenti multiplicatori. □

4.3 Problema Duale Lagrangiano

Il Problema 4.1 definito nella sezione precedente può essere considerato come un *Problema Primale* a cui può essere associato il seguente *problema duale lagrangiano*:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi(\lambda, \mu) \\ s.t. \quad & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{4.26}$$

dove la funzione $\varphi : R^m \times R^p \to R$ è data da:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \right\} = \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu). \tag{4.27}$$

Si può osservare la per qualche coppia (λ, μ) la funzione $\varphi(\lambda, \mu)$ può essere illimitata inferiormente. Per questo motivo viene definito *dominio* $\Delta \subseteq R^n$ di il seguente insieme:

$$\Delta = \{(\lambda, \mu) \in R^m \times R^p : \varphi(\lambda, \mu) > -\infty\}. \tag{4.28}$$

Il particolare il problema duale 4.26 alcune particolari proprietà che son descritte dal seguente risultato.

Teorema 4.3.1 *Siano $f \in C(R^n)$ e $g_i \in C(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Il dominio Δ della funzione φ è un insieme convesso e la funzione φ è concava nell'insieme Δ.*

Prova. Per ogni x, (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) e $\alpha \in [0, 1]$ si ha:

$$L(x, \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) = \alpha L(x, \lambda_1, \mu_1) + (1-\alpha) L(x, \lambda_2, \mu_2)$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} &\inf_{x \in X} L(x, \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) \geq \\ &\qquad \alpha \inf_{x \in X} L(x, \lambda_1, \mu_1) + (1-\alpha) \inf_{x \in X} L(x, \lambda_2, \mu_2) \end{aligned}$$

cioè

$$\varphi(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) \geq \alpha\varphi(\lambda_1, \mu_1) + (1-\alpha)\phi(\lambda_2, \mu_2). \tag{4.29}$$

La precedente relazione mostra che se (λ_1, μ_1) e (λ_2, μ_2) appartengono a Δ anche in vettore $(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2)$ appartiene a Δ per ogni $\alpha \in [0, 1]$. Da questo segue che D è convesso. Inoltre la (4.29) dimostra che la funzione φ è concava nell'insieme Δ. □

Riguardo i legami tra il Problema Primale 4.1 e il Problema Duale 4.26 un risultato importante è il seguente.

Teorema 4.3.2 (Dualità Debole) *Siano $f \in C(R^n)$ e $g_i \in C(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Comunque preso un punto $x \in R^n$ ammissibile per il Problema Primale 4.1, cioè $x \in X$, $g(x) \leq 0$ e $h(x) = 0$, e comunque preso un punto ammissibile per il Problema Duale 4.26, cioè $(\lambda, \mu) \in R^m \times R^p$ e $\lambda \geq 0$ si ha:*

$$\varphi(\lambda, \mu) \leq f(x). \tag{4.30}$$

Prova. Dalla definzione di φ e poichè $x \in X$, $g(x) \leq 0$ e $h(x) = 0$, $\lambda \geq 0$, si ha che

$$\varphi(\lambda, \mu) = \inf_{\tilde{x} \in X} \left\{ f(\tilde{x}) + \lambda^T g(\tilde{x}) + \mu^T h(\tilde{x}) \right\} \leq f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \leq f(x),$$

che dimostra il teorema. □

Dal precedente teorema seguono immediatamente alcune proprietà descritte nel prossimo corollario.

Corollario 4.3.3 *Siano $f \in C(R^n)$ e $g_i \in C(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Le seguenti proprietà valgono:*

i)
$$\sup_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda, \mu) \leq \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x),$$
dove $\mathcal{F}$ è l'insieme ammissibile del Problema Primale 4.1 dato dalla (4.2).

ii) Se un punto $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in R^m \times R^p$ con $\bar{\lambda} \geq 0$ ed un punto $\bar{x} \in X$ con $g(\bar{x}) \leq 0$ e $h(\bar{x}) = 0$, sono tali che
$$\varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}).$$
Allora $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è soluzione del Problema Duale 4.26 e $\bar{x}$ è soluzione del Problema Primale 4.1.

iii) Se
$$\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty,$$
allora
$$\varphi(\lambda, \mu) = -\infty,$$
per ogni $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in R^m \times R^p$ con $\bar{\lambda} \geq 0$.

iv) Se

$$\sup_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda, \mu) = \infty,$$

allora

$$\mathcal{F} = \emptyset.$$

In base ai risultati precedenti (in particolare il punto i) del corollario) si ha che, se x^* è un punto soluzione del Problema Primale 4.1 e (λ^*, μ^*) è un punto soluzione del Problema Duale 4.26, in generale è vera la seguente disuguaglia:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) \leq f(x^*).$$

Quanto è vera la disuguaglianza stretta, cioè:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) < f(x^*)$$

si dice che c'è un *gap di dualità*.
Quanto si ha l'uguaglianza, cioè:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$$

si dice che non c'è un gap di dualità oppure che *gap di dualità è zero*.

Il prossimo teorema mostra una condizione sufficiente ad assicurare che non c'è un gap di dualità.

Teorema 4.3.4 (Dualità Forte) *Siano $f \in C(R^n)$ e $g_i \in C(R^n)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e $h_j \in C(R^n)$, per ogni $j = 1, \ldots, p$. Se in corrispondenza ad un punto $x^* \in R^n$ esistono dei moltiplicatori di Lagrange $(\lambda^*, \mu^*) \in R^m \times R^p$, cioè tali che la tripla (x^*, λ^*, μ^*) è un punto di sella della funzione Lagrangiana (4.3). Allora (λ^*, μ^*) è soluzione del Problema Duale 4.26 e x^* è soluzione del Problema Primale 4.1 ed inoltre si ha:*

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*).$$

Prova. Dalla definzione di φ si ha:

$$\varphi(\lambda^*, \mu*) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x) \right\}. \tag{4.31}$$

Ricordando le (4.5)-(4.8) del Teorema 4.2.2 si ottiene:

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + (\lambda^*)^T g(x) + (\mu^*)^T h(x) \right\} = f(x^*). \tag{4.32}$$

Questa uguaglianza e il punto ii) del Corollario 4.3.3 dimostrano il teorema. □

Una conseguenza del precedente teorema è il fatto che, se in una coppia primale-duale c'è un gap di dualità, allora l'insieme dei moltiplicatori di Lagrange è vuoto.

Il precedente teorema descrive una condizione solamente sufficiente. Infatti ci possono essere coppie di problemi primali-duali che non presentano un gap di dualità ma non avere moltiplicatori di Lagrange.

Il Teorema 4.2.3 e il Teorema 4.2.4 descriviono delle condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza dei moltilplicatori di Lagrange e, quindi per il Teorema 4.3.4, questi condizioni garantiscono l'assenza del gap di dualità.

4.4 Problema Duale di Wolfe

In questa sezione viene considerata una classe più ristretta di problemi primale rispetto a quella di Sezione 4.2. In particolare, si fa riferimento alla classe considerata nel Teorema 4.2.4 dove $X = R^n$ ed il problema è descritto da

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &\quad a_j^T x - b_j = 0 \quad j = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{4.33}$$

dove f è una funzione convessa e continuamente differenziabile su R^n e g_i, $i = 1, \ldots, m$, sono funzioni convesse e continuamente differenziabili su R^n.

Al precedente problema primale si può associare il seguente *problema duale di Wolfe*:

$$\begin{aligned} &\max L(x, \lambda, \mu) \\ &\quad \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0 \\ &\quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Per questa coppia di problemi primale-duale si può stabilire un primo risultato analogo alla dualità debole del duale Lagrangiano.

Teorema 4.4.1 (Dualità di Wolfe Debole) *Sia $f \in C^1(R^n)$ e convessa su R^n e siano $g_i \in C^1(R^n)$ e convesse su R^n per ogni $i = 1, \ldots, m$. Comunque scelto un punto $\bar{x} \in R^n$ ammissibile per il Problema Primale 4.33 e comunque scelto un punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ ammissibile per il Problema Duale 4.34 si ha:*

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \leq f(\bar{x}). \tag{4.35}$$

Prova. Dalla convessità e differenziabilità di f si ha:

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) + \nabla f(\tilde{x})^T (\bar{x} - \tilde{x}). \tag{4.36}$$

Poichè il punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ è ammissibile per il Problema Duale 4.34 si ha:

$$\nabla f(\tilde{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\tilde{x}) - \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j a_j. \tag{4.37}$$

Sostituendo la (4.37) nella (4.36) si ottiene:

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(\tilde{x})^T (\bar{x} - \tilde{x}) - \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j a_j^T (\bar{x} - \tilde{x}). \tag{4.38}$$

Utilizzando la convessità delle g_i, $i = 1, \ldots, m$, il fatto che $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ e che $a_j^T \hat{x} = b_j$ si ha dalla (4.38)

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i (g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j (a_j^T \tilde{x} - b_j). \tag{4.39}$$

da cui, ricordando che $g_i(\bar{x}) \leq 0$ e $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, si ottiene:

$$f(\bar{x}) \geq f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i g_i(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j (a_j^T \tilde{x} - b_j) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}). \tag{4.40}$$

che dimostra il teorema. □

Dal precedente teorema e dalla struttura dei Problemi 4.33 e 4.34 segue il seguente corollario.

Corollario 4.4.2 *Sia $f \in C^1(R^n)$ e convessa su R^n e siano $g_i \in C^1(R^n)$ e convesse su R^n per ogni $i = 1, \ldots, m$. Le seguenti proprietà valgono*

i) Se esistono un punto $\bar{x}$ ammissibile per il Problema Primale 4.33 ed un punto $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ ammissibile per il Problema Duale 4.34 tali che:

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f(\bar{x}), \tag{4.41}$$

allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima per il Problema Primale 4.33 e $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ è una soluzione ottima per il Problema Duale 4.34.

ii) Se il Problema Primale 4.33 è illimitato inferiormente allora il Problema Duale 4.34 è non ammissibile.

iii) Se il Problema Duale 4.34 è illimitato superiormente allora il Problema Primale 4.33 è non ammissibile.

Prova. Punto i). Dalla (4.41) e dalla (4.30 segue che, per ogni punto (x, λ, μ) ammissibile per il Problema Duale 4.34 si ha:

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f(\bar{x}) \geq L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \tag{4.42}$$

mentre per ogni punto ammissibile x per il Problema Primale 4.33 si ha:

$$f(\bar{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \leq f(x). \tag{4.43}$$

Le due precedenti relazioni provano che $\bar{x}$ è una soluzione ottima per il Problema Primale 4.33 e $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ è una soluzione ottima per il Problema Duale 4.34.

Punti ii) e iii). Se esistesse un punto ammissibile per il Problema Duale 4.34, la (4.35) implicherebbe che il Problema Primale 4.33 sarebbe limitato inferiormente. Analogamente se esistesse un punto ammissibile per il Problema Primale 4.33, la (4.35) implicherebbe che il Problema Duale 4.34 sarebbe limitato superiormente. □

Nella precedente sezione si è dimostrato che, per i problemi di programmazione convessa del tipo 4.33, i punti di sella della funzione Lagrangiana L coincidono con i punti di Karush-Kuhn-Tucker. Inoltre il Teorema 3.2.9 o il Teorema 4.2.2 mostrano che questi punti identificano dei minimi globali del Problema 4.33.

Il prossimo teorema mostra che ogni tripla di Karush-Kuhn-Tucker (punto di sella) è una soluzione ottima del Problema Duale di Wolfe 4.34.

Teorema 4.4.3 (Dualità di Wolfe Forte) *Sia $f \in C^1(R^n)$ e convessa su R^n e siano $g_i \in C^1(R^n)$ e convesse su R^n per ogni $i = 1, \ldots, m$. Sia x^* un punto di Karush-Kuhn-Tucker del Problema Primale 4.33 e siano (λ^*, μ^*) i relativi moltiplicatori. Allora il punto (x^*, λ^*, μ^*) è una soluzione ottima del Problema Duale 4.34 e si ha:*

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*). \tag{4.44}$$

Prova. Se (x^*, λ^*, μ^*) è una tripla di Karush-Kuhn-Tucker soddisfa le condizioni (2.58) e, in particolare, soddisfa tutti i vincoli del Problema Duale 4.34. Inoltre dalla complemtarià $(\lambda^*)^T g(x^*) = 0$ e dall'ammissibilità si ha:

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*) + (\lambda^*)^T g(x^*) + (\mu^*)^T h(x^*) = f(x^*). \tag{4.45}$$

La prova del teorema segue dalla (4.45) e dal punto i) del Corollario 4.4.2 □

Il precedente risultato ed il punto i) del Corollario 4.4.2assicurano che, risolvendo il Problema Duale, si può ottenere il valore ottimo della funzione obiettivo del Problema Primale. Richiedendo ulteriori ipotesi sul problema di partenza 4.33 è possibile assicurare che la soluzione ottima del Problema Duale fornisce anche la soluzione ottima del Problema Primale. Un esempio di tali risultati è il seguente teorema.

Teorema 4.4.4 *Sia $f \in C^1(R^n)$ e convessa su R^n e siano $g_i \in C^1(R^n)$ e convesse su R^n per ogni $i = 1, \ldots, m$. Si assuma che il Problema Primale 4.33 abbia un punto di Karush-Kuhn-Tucker x^*. Se il punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è una soluzione ottima del Problema Duale 4.34 e la funzione Lagrangiana $L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è strettamente convessa in $\hat{x}$ allora $\hat{x} = x^*$ è una soluzione del Problema Primale 4.33 e si ha:*

$$f(x^*) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}). \tag{4.46}$$

Prova. Si assuma per assurdo che $\hat{x} \neq x^*$.

Siano (λ^*, μ^*) i relativi moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker del punto x^*. Dal Teorema 4.4.3 si ha che la tripla (x^*, λ^*, μ^*) è una soluzione ottima del Problema Duale 4.34 e, quindi si ha:

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}). \tag{4.47}$$

Dalla ipotesi che la funzione Lagrangiana $L(x, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è strettamente convessa in $\hat{x}$ e dal punto ii) della Proposizione 3.2.4 si ottiene

$$L(x^*, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) > L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) + \nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})^T (x^* - \hat{x}). \tag{4.48}$$

poichè il punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è ammissibile per il Problema Duale 4.34 si ha che $\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = 0$ quindi la (4.48) diventa:

$$L(x^*, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) > L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*), \tag{4.49}$$

da cui segue che:

$$\hat{\lambda}^T g(x^*) > (\lambda^*)^T g(x^*). \tag{4.50}$$

Ricordando che (x^*, λ^*, μ^*) è una tripla di Karush-Kuhn e, perciò, soddisfa la complemtarià $(\lambda^*)^T g(x^*) = 0$, si ha:

$$\hat{\lambda}^T g(x^*) > 0, \tag{4.51}$$

che contraddice il fatto che il punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ è ammissibile per il Problema Duale ed ill punto x^* è ammissibile per il Problema Primale, quindi, $\bar{\lambda} \geq 0$ e $g(x^*) \leq 0$.
Tenendo conto che (x^*, λ^*, μ^*) è una tripla di Karush-Kuhn si ha anche

$$L(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*). \tag{4.52}$$

□

Riguardo l'assunzione che la funzione Lagrangiana $L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sia strettamente convessa in $\hat{x}$ è da notare che è soddisfatta se la la funzione obiettivo è strettamente convessa oppure se è strettamente convesso un vincolo di disuguaglianza $g_i(\hat{x})$ a cui corrisponde un moltiplicatore $\hat{\lambda}_i > 0$.

4.5 Problemi Quadratici

In questa sezione vengono descrtti alcuni risultati riguardanti la teoria della Dualità di Wolfe applicata alla seguente classe di problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ Ax \leq b, \end{aligned} \tag{4.53}$$

con $x \in R^n$, $Q \in R^{n \times n}$, $c \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$ e $b \in R^m$.

Il primo risultato descrive la particolare forma che assume il Problema Duale di Wolfe quando il Problema Primale è della forma (4.53).

Proposizione 4.5.1 *Considerato il Problema Primale (4.53), il suo Problema Duale di Wolfe è dato da:*

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} x^T Q x + b^T \lambda \\ Qx + A^T \lambda + c = 0 \\ \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{4.54}$$

con $\lambda \in R^m$.

Prova. Applicando la definizione di Duale di Wolfe 4.34 si ottiene:

$$\begin{aligned} \max \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \lambda^T (Ax - b) \\ Qx + A^T \lambda + c = 0 \\ \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Riscrivendo la funzione obiettivo si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\max -\frac{1}{2}x^T Qx + x^T(Qx + c + A^T\lambda) - \lambda^T b \\
&Qx + A^T\lambda + c = 0 \\
&\lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Tenendo conto del vincolo di uguagianza nella funzione obiettivo dell'ultima fomulazione si ottiene la prova della proposizione. □

Dal Teorema 4.4.4 si ha invece il seguente risultato.

Proposizione 4.5.2 *Si consideri il Problema 4.53, si assuma che il suo insieme ammissibile non sia vuoto e che la matrice $Q \in R^{n\times n}$ sia definita positiva. La soluzione ottima del Problema (4.53) è data da:*

$$x^* = Q^{-1}(A^T\lambda^* + c),$$

dove λ^* è una soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\lambda^T AQ^{-1}A^T\lambda + (AQ^{-1}c + b)^T\lambda \\
&\lambda \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

con $\lambda \in R^m$.

Prova. Dalla Proposizione 1.2.8 e dal punto iv) della Proposizione 3.2.4 si ha che la funzione obiettivo del Problema 4.53 è coercitiva e strettamente convessa.

Il Teorema 1.2.6, il Teorema 2.5.12 ed il Teorema 3.2.8 assicurano che il Problema 4.53 ha una unica soluzione x^*.

Il Teorema 4.4.4 indica che il punto ottimo x^* può essere ottenuto risolvendo il Problema Duale di Wolfe 4.54, nel senso che una soluzione ottima del Problema 4.54 è data da (x^*, λ^*).

Tuttavia il fatto che la matrice Q, essendo definita positiva, è invertibile può essere sfruttato utilizzando il vincolo di uguaglianza del Problema 4.54 per calcolare la variabile x in funzione della variabile λ, cioè:

$$x = Q^{-1}(A^T\lambda + c),$$

questa relazione può essere utilizzata nella funzione obiettivo del Problema 4.54 per eliminare la variabile x e far diventare il problema solamente dipendente dalla variabile λ. In questa maniera si arriva al Problema 4.55 e si dimostra la proposizione. □

4.6 Problemi Programmazione Lineare

In questa sezione si analizza la teoria della dualità per problemi di programmazione lineare e si accenna ad alcune della sue possibili interpretazioni.

4.6.1 Problema Duale di un Problema di Programmazione Lineare

In particolare come punto di partenza viene considerato il seguente Problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\quad Ax \geq b, \end{aligned} \tag{4.56}$$

dove $c \in R^n$, $x \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$ e $b \in R^m$.
Il precedente problema può essere ricondotto alla struttura dei problemi di ottimizzazione considerati nei paragrafi precedenti, cioè

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\quad -Ax \leq -b. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Se per questo problema si costruisce il suo Problema Duale di Wolfe (4.34) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\max c^T x - u^T(Ax - b) \\ &\quad -A^T u + c = 0 \\ &\quad u \geq 0, \end{aligned}$$

tenendo conto del vincolo di uguaglianza nella funzione obiettivo, si ottiene:

$$\begin{aligned} &\max b^T u \\ &\quad A^T u = c \\ &\quad u \geq 0. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Volendo determinare il Problema Duale Lagrangiano 4.26 del Problema 4.56, la funzione φ è data da

$$\varphi(u) = \inf_{x \in R^n} \left\{ c^T x - u^T(Ax - b) \right\} = \inf_{x \in R^n} \left\{ b^T u + (c - A^T u)^T x \right\} = \begin{cases} b^T u & \text{if } A^T u = c \\ -\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Perciò il Problema Duale Lagrangiano del Problema 4.56 coincide con quello di Wolfe 4.58.

Se si costruisce il problema duale del Problema 4.58 si ritrova il Problema 4.56. Si può quindi concludere che il Problema Duale del Duale è il Problema Primale.

Si consideri, ora, un problema Programmazione Lineare scritto nella forma più generale possibile cioè il seguente problema.

$$\begin{aligned} &\min c^T x + d^T y \\ &\quad Cx + Dy = h \\ &\quad Ex + Fy \geq g \\ &\quad x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

con $x \in R^p$, $c \in R^p$, $y \in R^{n-p}$, $d \in R^{n-p}$; C matrice $q \times p$, D matrice $q \times (n-p)$ e $h \in R^q$; E matrice $(m-q) \times p$, F matrice $(m-q) \times (n-p)$ e $g \in R^{m-q}$.

La notazione in cui è scritto questo generico problema di Programmazione Lineare 4.59 è tale da evidenziare che

- che alcune delle variabili (il sottovettore x) sono vincolate in segno e mentre altre variabili (il sottovettore y) non sono vincolate in segno,
- alcuni vincoli sono di uguaglianza ed altri di disuguaglianza.

Invece di utilizzare la definizione di Problema Duale Lagrangiano 4.26 oppure quella di Problema Duale di Wolfe Prob-duale-wolfe, il problema duale del Problema 4.59 può essere costruito sulla base della coppia di problemi dati dal Problema Primale (4.56) e dal Problema Puale 4.58.

Prima di tutto si trasforma il problema 4.59 in un problema equivalente con soli vincoli di disuguaglianza cioè con la forma del problema (4.56).

$$\begin{aligned} &\min c^T x + d^T y \\ &\quad Cx + Dy \geq h \\ &\quad -Cx - Dy \geq -h \\ &\quad Ex + Fy \geq g \\ &\quad I_p x \geq 0. \end{aligned}$$

dove I_p è la matrice identità di ordine p. I vincoli di questo problema possono essere scritti in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi il Problema 4.59 è stato ricondotto nella forma 4.56. Siamo quindi in grado di scrivere il duale di questo problema nella forma 4.58 cioè:

$$\begin{aligned} &\max h^T t - h^T w + g^T v \\ &\quad C^T t - C^T w + E^T v + I_p z = c \\ &\quad D^T t - D^T w + F^T v = d \\ &\quad t \geq 0, w \geq 0, v \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Eliminando la variabile z ed effettuando il cambio di variabili $t - w = u$ si ottiene il seguente problema nelle variabili (u, v), con u non vincolata in segno e $v \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\max h^T u + g^T v \\ &\quad C^T u + E^T v \leq c \\ &\quad D^T u + F^T v = d \\ &\quad v \geq 0. \end{aligned} \tag{4.60}$$

con $u \in R^q$ e $v \in R^{m-q}$.

Dall'osservazione dei due problemi 4.59 e 4.60 si deducono facilmente le proprietà fondamentali di una coppia primale–duale; innanzitutto un problema è di minimizzazione mentre l'altro è di massimizzazione. Inoltre poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli di un problema si ottiene trasponendo quella dell'altro, si ha che ad ogni variabile di un problema corrisponde un vincolo nell'altro. Si osserva inoltre uno scambio tra i termini noti di un problema e i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Queste proprietà possono essere così schematicamente riassunte:

- il problema duale di un problema di minimizzazione è un problema di massimizzazione e simmetricamente, il problema duale di un problema di massimizzazione è un problema di minimizzazione;
- ad ogni vincolo di uguaglianza del problema primale è associata una variabile nel problema duale non vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni vincolo di disuguaglianza (di maggiore o uguale) del problema primale è associata una variabile nel problema duale vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni variabile vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di disuguaglianza (di minore o uguale) del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale;
- ad ogni variabile non vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di uguaglianza del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale.

Queste corrispondenze possono essere riassunte nella tabella che segue dove gli insieme I, J, M e N sono insiemi di indici:

	PRIMALE	**DUALE**	
	$\min c^T x$	$\max b^T u$	
VINCOLI	$= b_i, \quad i \in I$ $\geq b_i, \quad i \in J$	$u_i, \quad i \in I$, libere $u_i, \quad i \in J$, $u_i \geq 0$	VARIABILI
VARIABILI	$x_j \geq 0, \quad j \in M$ $x_j, \quad j \in N$ libere	$\leq c_j, \quad j \in M$ $= c_j, \quad j \in N$	VINCOLI

Esempio 4.6.1 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 - 5x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9. \end{cases}$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 7u_1 + 9u_2 \\ u_1 + 2u_2 = 2 \\ 4u_2 = 3 \\ -5u_1 - 6u_2 = 4 \\ 2u_1 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 4.6.2 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente problema di minimizzazione

$$\begin{cases} \min 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\ 2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\ 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 4.6.3 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dopo aver riscritto il secondo vincolo come $-x_1 - x_2 + 6x_3 \geq -9$ *si può formulare facilmente il problema duale associato*

$$\begin{cases} \max 7u_1 - 9u_2 + 8u_3 \\ 3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_1 - u_2 - u_3 \leq -3 \\ 5u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

4.6.2 Risultati della teoria della dualità nella Programmazione Lineare

Per la coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare 4.59 e 4.60 si può particolareggiare i risultati visti precedentemente.

Teorema 4.6.4 *Le seguenti proprietà valgono:*

i) Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto ammissibile per il Problema Primale 4.59 e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ è un punto ammissibile per il Problema Duale 4.60 si ha che:

$$c^T \bar{x} + d^T \bar{y} \geq h^T \tilde{u} + g^T \tilde{v}. \tag{4.61}$$

ii) Se esistono un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ ammissibile per il Problema Primale 4.59 ed un punto $(\tilde{u}, \tilde{v})$ ammissibile per il Problema Duale 4.60 tali che:

$$c^T \bar{x} + d^T \bar{y} = h^T \tilde{u} + g^T \tilde{v},$$

allora $(\bar{x}, \bar{y})$ è una soluzione ottima per il Problema Primale 4.59 e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ è una soluzione ottima per il Problema Duale 4.60.

iii) Se il Problema Primale 4.59 è illimitato inferiormente allora il Problema Duale 4.60 è non ammissibile.

iv) Se il Problema Duale 4.60 è illimitato superiormente allora il Problema Primale 4.59 è non ammissibile.

Oltre alle proprietà fino ad ora esaminate, nel caso di problemi di Programmazione Lineare si può rafforzare leggermente il risultatoto che descrive la *dualità forte*. In particolare si ha il seguente risultato.

Teorema 4.6.5 – Teorema della Dualità Forte
Se il Problema Primale 4.59 ammette una soluzione ottima (x^*, y^*) allora anche il Problema Duale 4.60 ammette una soluzione ottima (u^*, v^*). Simmetricamente, se il Problema Duale 4.60 ammette una soluzione ottima (u^*, v^*) allora anche il Problema Primale 4.59 ammette una soluzione ottima (x^*, y^*). Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè risulta

$$c^T x^* + d^T y^* = b^T u^* + g^T v^*. \tag{4.62}$$

Prova. Se il Problema Primale 4.59 ha soluzione, il Teorema 2.5.15 assicura che esistono dei moltiplicatori (u^*, v^*) di Karush-Kuhn-Tucker ed il Teorema 4.4.3 mostra che la coppia i moltiplicatori (u^*, v^*) di Karush-Kuhn-Tucker è una soluzione ottima del Problema Duale 4.60 e che vale (4.62).

Se, invece, il Problema Duale 4.60 ha soluzione (u^*, v^*), nuovamente il Teorema 2.5.15 ed il Teorema 4.4.3 assicurano che esiste una coppia di moltiplicatori (x^*, y^*) di Karush-Kuhn-Tucker che è soluzione del suo problema duale. La dimostrazione del teorema segue ricordando che il duale del Problema Duale è il Problema Primale. □

Sulla base dei risultati fino ad ora esaminati si evince che data un coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare possono verificarsi le seguenti situazioni: o entrambi ammettono soluzione ottima, oppure se uno è illimitato l'altro è inammissibile, oppure sono entrambi inammissibili. Queste possibilità sono riportate schematicamente nella tabella che segue.

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

4.6.3 Condizioni di complementarità

Un'ulteriore proprietà della coppia primale–duale è la cosidetta *complementarietà*. Tale proprietà è di fondamentale importanza anche negli sviluppi algoritmici in quanto è alla base dei cosiddetti *metodi primali duali* per soluzione dei problemi di Programmazione Lineare. In particolare, riportiamo di seguito un teorema fondamentale che caratterizza ulteriormente le soluzioni ottime di una coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 4.6.6 *Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto ammissibile del Problema Primale 4.59 e sia $(\bar{u}, \bar{v})$ un punto ammissibile del Problema Duale 4.60. Allora $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{u}, \bar{v})$ sono soluzioni ottime rispettivamente del Problema Primale 4.59 e del Problema Duale 4.60 se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:*

$$\bar{v}^T (E\bar{x} + F\bar{y} - g) = 0 \tag{4.63}$$

$$\bar{x}^T \left(c - C^T\bar{u} + E^T\bar{v}\right) = 0. \tag{4.64}$$

Prova. Iniziamo supponendo che $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{u}, \bar{v})$ sono soluzioni ammissibili rispettivamente per il Problema Primale 4.59 e per il Problema Duale 4.60 e che valgano le (4.63) e (4.64).

Dalla (4.63) e dal vincolo di uguaglianza del Problema Primale si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{v}^T (E\bar{x} + F\bar{y} - g) &= 0 \\ \bar{u}^T (C\bar{x} + E\bar{y} - h) &= 0. \end{aligned}$$

Sommando le due precedenti uguaglianze si ottiene:

$$h^T\bar{u} + g^T\bar{v} = \bar{v}^T E\bar{x} + \bar{v}^T F\bar{y} + \bar{u}^T C\bar{x} + u^T E\bar{y}. \tag{4.65}$$

Dalla (4.64) e dal vincolo di uguaglianza del Problema Duale si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{x}^T \left(c - C^T\bar{u} + E^T\bar{v}\right) &= 0 \\ \bar{y}^T \left(d - D^T\bar{u} + F^T\bar{v}\right) &= 0 \end{aligned}$$

e sommando nuovamente le due precedenti uguaglianze segue:

$$c^T\bar{x} + d^T\bar{y} = \bar{x}^T C^T\bar{u} + \bar{x}^T E^T\bar{v} + \bar{y}^T D^T\bar{u} + \bar{y}^T F^T\bar{v}. \tag{4.66}$$

Notando che i termini di destra della (4.65) e della (4.66) sono uguali si ha:

$$c^T\bar{x} + d^T\bar{y} = h^T\tilde{u} + g^T\tilde{v}.$$

Da cui per il punto ii) del Teorema 4.6.4 segue che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una soluzione ottima per il Problema Primale 4.59 e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ è una soluzione ottima per il Problema Duale 4.60.

Si assuma che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia una soluzione ottima per il Problema Primale 4.59 e che $(\tilde{u}, \tilde{v})$ sia una soluzione ottima per il Problema Duale 4.60. Poichè $(\bar{x}, \bar{y})$ è ammissibile per il Problema Primale e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ è ammissibile per il Problema Duale, si ha:

$$c^T\bar{x} + d^T\bar{y} \geq \bar{x}^T(C^T\bar{u} + E^T\bar{v}) + \bar{y}^T(D^T\bar{u} + F^T\bar{v}) \tag{4.67}$$

$$= \bar{u}^T(C\bar{x} + D\bar{y}) + \bar{v}^T(E\bar{x} + F\bar{y}) \geq h^T\tilde{u} + g^T\tilde{v}. \tag{4.68}$$

Poichè $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi si ha che il primo e l'ultimo della (4.67) sono uguali.
L'uguaglianza dei primi due termini della (4.67) implica:

$$\bar{x}^T \left(c - C^T\bar{u} + E^T\bar{v}\right) + \bar{y}^T \left(d - D^T\bar{u} + F^T\bar{v}\right) = 0,$$

da cui, ricordando che $(\tilde{u}, \tilde{v})$ soddisfa il vincolo di uguaglianza del Problema Duale, segue la dimostrazione della 4.64.
Dalla uguaglianza degli ultimi due termini della (4.67) si ottiene:

$$\bar{v}^T (E\bar{x} + F\bar{y} - g) + \bar{u}^T (C\bar{x} + D\bar{y} - h) = 0,$$

che, tenendo conto che $(\tilde{x}, \tilde{y})$ soddisfa il vincolo di uguaglianza del Problema Primale, implica la 4.63. □

Le condizioni (4.63) e (4.64) vengono chiamate *condizioni di complementarità* e costituiscono, di fatto, delle condizioni di ottimalità per i problemi della coppia primale–duale.

Nel seguito vengono riportati alcuni esempi di applicazione della complementarità.

Esempio 4.6.7 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases}.$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 5u_1 + 3u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + 7u_3 = 3 \\ u_2 - 4u_3 = 2 \\ -3u_1 - u_2 + 6u_3 = 1 \\ 2u_1 + 9u_3 = 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Visti i vincoli di uguaglianza presenti nei due problemi, le condizioni di complementarità si riducono a

$$\begin{aligned} &u_1(x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 5) = 0 \\ &u_2(2x_1 + x_2 - x_3 - 3) = 0. \end{aligned}$$

Esempio 4.6.8 *Dato il problema di programmazione lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{4.69}$$

si consideri il punto $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)$ *soluzione ammissibile per il problema (4.69) e il punto* $\bar{u} = (1, 1/3)$ *soluzione ammissibile per il problema duale associato a (4.69). Attraverso le condizioni di complementarità si vuole verificare se* $\bar{x}$ *è una soluzione ottima del problema del problema (4.69). Innanzitutto scriviamo il problema duale del problema dato; esso è*

$$\begin{cases} \max 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1. \end{cases}$$

Poiché il problema (4.69) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ *che in questo caso sono*

$$\begin{aligned} &x_1(2 - u_1 - 2y_2) = 0 \\ &x_2(3 - u_1) = 0 \\ &x_3(1 - u_1) = 0 \\ &x_4(1 - 3u_2) = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili $\bar{x}$, $\bar{u}$ *rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione* $\bar{x}$ *è effettivamente ottima per il primale e* $\bar{u}$ *è ottima per il duale.*

Esempio 4.6.9 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

con $c_1 \in R$, $c_2 \in R$, $c_3 \in R$. *Utilizzando la teoria della dualità, si vuole stabilire se esistono valori (non tutti nulli) di* c_1, c_2, c_3 *tali che il punto* $\bar{x} = (0,\ 0,\ 1/2)^T$ *sia una soluzione ottima del problema.*
Innanzitutto scriviamo il problema duale associato che è

$$\begin{cases} \max -2u_1 - 3u_2 \\ -u_1 - u_2 \leq c_1 \\ -2u_1 - 4u_2 \leq c_2 \\ -2u_1 - 2u_2 \leq c_3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

e le condizioni di complementarità

$$\begin{array}{l} u_1(-2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3) = 0 \\ u_2(-3 + x_1 + 4x_2 + 2x_3) = 0 \\ x_1(c_1 + u_1 + u_2) = 0 \\ x_2(c_2 + 2u_1 + 4u_2) = 0 \\ x_3(c_3 + 2u_1 + 2u_2) = 0 \end{array}$$

Sostituendo il punto $\bar{x}$ *affinché siano soddisfatte tutte le equazioni deve essere*

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \frac{1}{2}(c_3 + 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2) = 0$$

e quindi $c_3 = 0$ *(dove* $\bar{u}$ *è soluzione ottima del problema duale). Quindi le condizioni di complementarità sono soddisfatte per qualuque* c_1 *e* c_2 *e* $c_3 = 0$. *Quindi il punto dato* $\bar{x}$ *è soluzione ottima del problema per qualsiasi valore di* c_1 *e* c_2 *e* $c_3 = 0$.

4.7 Interpretazione della Dualità

La teoria della dualità ha importanti utilizzazioni pratiche per via delle sue possibili interpretazioni economiche. In questa sezioni si accennerà ad alcune di queste possibili applicazioni.

4.7.1 Interpretazione economica delle variabili duali come prezzi ombra

Un aspetto interessante della dualità è il fatto di poter dare, in certe situazioni, delle indicazioni sull'effetto dei cambiamenti dei termini noti dei vincoli sul valore della funzione obiettivo.
Si consideri, per esempio, il seguente problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{4.70}$$

dove $x \in R^n$, $c \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^M$. Sia $x^\star$ una soluzione ottima del problema (4.70) e sia $u^\star$ una soluzione ottima del suo duale. Dal teorema della dualità forte si ha:

$$c^T x^\star = b^T u^\star. \tag{4.71}$$

Se si varia il termine b dei vincoli del vettore $\Delta \in R^m$ e si risolve il nuovo problema:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b + \Delta \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{4.72}$$

si ottiene una soluzione $x^\star(\Delta)$ che, in generale, è diversa da quella del problema (4.70). Applicando di nuovo il teorema della dualità forte si ha:

$$c^T x^\star(\Delta) = (b + \Delta)^T u^\star(\Delta), \tag{4.73}$$

dove $u^\star(\Delta)$ è una soluzione del problema duale di (4.72).
Se la soluzione ottima $x^\star$ soddisfa un'opportuna ipotesi (cioè che in $x^\star$ non ci siano più di n vincoli attivi) e se il vettore Δ ha componenti sufficientemente piccole allora si puó dimostrare che:

$$u^\star(\Delta) = u^\star. \tag{4.74}$$

Utilizzando la (4.73), la (4.74) e la (4.71) si ha:

$$c^T x^\star(\Delta) = b^T u^\star + \Delta^T u^\star = c^T x^\star + \Delta^T u^\star, \tag{4.75}$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$c^T x^\star(\Delta) - c^T x^\star = \Delta_1 u_1^\star + \Delta_2 u_2^\star + \ldots + \Delta_m u_m^\star. \tag{4.76}$$

Dalla precedente relazione segue che una possibile interpretazione della variabile duale $u_i^\star$ è quella di essere un prezzo associato ad un incremento unitario del termine noto

b_i. Per questa ragione le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, vengono indicate come *prezzi ombra* o *costi marginali*.
Sebbene la (4.74) vale solamente sotto opportune ipotesi, in molte situazioni pratiche, le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, forniscono delle utili indicazioni su quale componente b_i variare per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo. Per esempio, in un modello per la pianficazione della produzione, le variabili sono i livelli di produzione e la maggior parte dei vincoli normalmente rappresentano limitazioni dovute alla limitata disponibilità delle risorse; un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato. Da quanto visto precedentemente, la dualità può aiutare a prevedere l'effetto dei cambiamenti nei vincoli di disponibilità di risorse sul valore della funzione obiettivo come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.7.1 *Un'industria produce due tipi di prodotti: un tipo* de luxe *e un tipo* standard*. Per avere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi sono necessari due ingredienti grezzi* $\mathbf{I_1}$ *e* $\mathbf{I_2}$ *e la lavorazione su una macchina. La tabella che segue riporta le quantità in Kg di ciascuno degli ingredienti e le ore di lavorazione sulla macchina necessarie per ottenere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi.*

	de luxe	standard
$\mathbf{I_1}$	*3*	*2*
$\mathbf{I_2}$	*4*	*1*
ore lavoraz.	*2*	*1*

Settimanalmente si hanno a disposizione al piú 1200 Kg dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ *al piú 1000 Kg dell'ingrediente* $\mathbf{I_2}$ *mentre la disponibilità massima settimanale di ore lavorative della macchina è pari a 700. Un prodotto* de luxe *è venduto a 24 Euro e un prodotto* standard *è venduto a 14 Euro. Si vuole pianificare la produzione settimanale in modo da massimizzare il profitto complessivo assumendo che i prodotti siano frazionabili.*

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse limitate che può essere formulato come problema di Programmazione Lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \max 24x_1 + 14x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ 4x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 700 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dove le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di prodotti ripettivamente del tipo *de luxe* e del tipo *standard* da fabbricare settimanalmente.

Consideriamo, ora, il problema duale del problema ora formulato; esso è

$$\begin{cases} \min 1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 24 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \geq 14 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione ottima del primale è

$$x_1^\star = 160, \qquad x_2^\star = 360$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo primale è pari a 8880.

La soluzione ottima del duale è

$$u_1^\star = 6.4, \qquad u_2^\star = 1.2, \qquad u_3^\star = 0.$$

Volendo incrementare i guadagni ed avendo disponibilità economica, l'industria potrebbe decidere di acquistare altre quantità di ingredienti grezzi e quindi aumentare la disponibilità settimanale di questi ingredienti oppure comprare una nuova macchina per aumentare il numero di ore lavorative settimanali.
Si può verificare che l'aumentare delle ore lavorative non produce nessuna variazione del valore ottimo della funzione obiettivo. Questa invarianza poteva essere prevista dal fatto che $u_3^\star = 0$ oppure osservando che nella soluzione ottima il terzo vincolo non è attivo (si hanno ancora 20 ore disponibili).
Poichè le prime due variabili duali sono diverse da zero segue, dalla complementarità, che il primo e il secondo vincolo del problema primale sono attivi nella soluzione ottima. Questo indica che aumentare la disponibilità degli ingredienti sicuramente fa aumentare il valore ottimo della funzione obiettivo, cioè il guadagno della fabbrica.
Per quanto detto precedentemente sull'interpretazione delle variabili duali come prezzi ombra, il fatto che il valore della prima variabile duale è maggiore della seconda indica che la scelta migliore è quella di aumentare le disponibilità del primo ingrediente.
Questo fatto può essere verificato in pratica. Infatti l'aumento di 50 Kg della disponibilità di ingrediente $\mathbf{I_1}$ (da 1200 a 1250 Kg) porta ad un incremento di 320 Euro nel profitto complessivo. Mentre un incremento di 50 Kg (da 1000 a 1050 Kg) della disponibilità dell'ingrediente $\mathbf{I_2}$ porta ad un incremento del profitto complessivo di 60 Euro.
Si ricordi che la teoria indica che un incremento pari a Δ nel termine noto del primo (oppure del secondo vincolo) produce un incremento pari a $\Delta u_1^\star$ (oppure $\Delta u_2^\star$) del valore ottimo della funzione obiettivo, può essere valido fin tanto che Δ non ha componenti troppo grosse. Infatti, per esempio, un aumento di 200 Kg della disponibilità di ingrediente $\mathbf{I_1}$ (da 1200 a 1400 Kg) porta ad un incremento di 920 Euro nel profitto complessivo che è inferiore al valore $\Delta u_2^\star = 1280$ Euro. $\square$

4.7.2 Interpretazione economica del problema duale

Il problema duale associato ad un problema di programmazione lineare può fornire importanti informazioni su scelte alternative alla pianificazione indicata dal problema primale oppure dare delle indicazioni strategiche su decisioni da prendere per avviare un'attività in concorrenza con quella descritta dal problema primale.

Il duale del problema di allocazione ottima di risorse (non fa parte del programma di esame)

Si consideri nuovamente il semplice problema di allocazione ottima dell'Esempio 2.4.1 a pag. 22 degli Appunti dell'Introduzione ai Modelli di Programmazione Matematica che è rappresentato dal seguente problema di Programazione Lineare:

$$\begin{cases} \max(7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4.77}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 sono associate rispettivamente ai quantitativi di colorante **C1** e **C2** da produrre e che la produzione avviene utilizzando tre preparati base **P1**, **P2** e **P3** dei quali si ha una disponibilità massima rispettivamente pari a 750, 1000 e 400 ettogrammi. Supponiamo, ora di voler sottrarre preparati base dalla produzione dei coloranti per venderli direttamente. Indichiamo con u_1, u_2 e u_3 i prezzi associati rispettivamente alla vendita diretta di un ettogrammo di preparato base **P1**, **P2** e **P3**. Supponendo di destinare tutti i preparati alla vendita diretta, il profitto che si otterrebbe sarebbe

$$750u_1 + 1000u_2 + 400u_3. \tag{4.78}$$

Naturalmente si vorrà fare in modo che questa operazione di sottrazione dei preparati base dalla produzione dei coloranti e vendita diretta risulti economicamente conveniente e quindi mentre si vuole minimizzare l'espressione (4.78) affinché i prezzi di vendita risultino competitivi sul mercato, si imporrà che il profitto ottenuto vendendo direttamente i quantitativi di preparato base necessario per ottenere un litro di colorante sia maggiore o uguale del profitto associato alla vendita di un litro di colorante stesso; quindi, utilizzando i dati del problema riportati nella tabella dell'Esempio dell'Esempio 2.4.1, si deve imporre che risulti

$$u_1 + u_2 \geq 7$$

per quanto riguarda il colorante **C1** e

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10$$

per quanto riguarda il colorante **C2** e naturalmente deve essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ e $u_3 \geq 0$. Quindi il modello lineare che rappresenta l'operazione sopra descritta è il seguente:

$$\begin{cases} \min\,(750u_1 + 1000u_2 + 400u_3) \\ u_1 + u_2 \geq 7 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

Esaminando questo problema si vede immediatamente che esso rappresenta il *problema duale* del problema dato (4.77).

In generale, se si considera un generico problema di allocazione ottima di m risorse $\mathbf{R_i}$, $i = 1, \ldots, m$ con la possibilità di fabbricare n prodotti $\mathbf{P_j}$, $j = 1, \ldots, n$, come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente si può formulare questo problema come

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{4.79}$$

dove ricordiamo $x \in R^n$ è il vettore avente per componenti i livelli di produzione di ciascuno dei prodotti, $c \in R^n$ il vettore dei profitti netti e $b \in R^m$ il vettore delle disponibilità massima di ciascuna delle risorse.
Supponiamo ora di voler sottrarre risorse alla produzione per venderle direttamente e siano u_i, $i = 1, \ldots, m$ i prezzi unitari associati alla vendita dell'i-esima risorsa. Supponendo che per ciascuna risorsa si voglia destinare alla vendita una quantità pari alla disponibilità massima di quella risorsa, si ottiene un profitto pari a

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m.$$

Per rendere competitivi sul mercato i prezzi unitari u_i da assegnare alle risorse vendute direttamente, si vogliono scegliere i valori piú bassi possibile per le u_i, ma naturalmente, affinché questa operazione di vendita diretta in luogo della fabbricazione dei prodotti risulti conveniente si deve imporre che il profitto ottenuto vendendo direttamente le risorse necessarie per fabbricare un prodotto sia maggiore o uguale al profitto che si ricaverebbe dalla vendita del prodotto finito. Quindi per ogni prodotto, si deve imporre che valga

$$\begin{array}{cccc} a_{11}u_1 + & \ldots & +a_{m1}u_m & \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + & \ldots & +a_{m2}u_m & \geq c_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}u_1 + & \ldots & +a_{mn}u_m & \geq c_n \end{array}$$

con $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e dove le quantità a_{ij} rappresentano la quantità di risorsa $\mathbf{R_i}$ necessaria per fabbricare una unità di prodotto $\mathbf{P_j}$.

Quindi il problema da risolvere può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema (4.79).

Il duale del problema di miscelazione

Si consideri il problema di miscelazione dell'Esempio 2.4.11 a pag. 35 degli Appunti dell'Introduzione ai Modelli di Programmazione Matematica che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta che deve avere come requisito un contenuto minimo di 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 grammi di zucchero. Supponiamo ora che un'industria farmaceutica venda compresse di nutrimenti puri, cioè compresse di vitamina C, di sali minerali e di zucchero e che vuole immettere queste compresse su un ipotetico mercato come offerta sostitutiva al succo di frutta per l'acquisizione di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. Naturalmente questa industria farmaceutica vuole massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle compresse, ma al tempo stesso deve dare un prezzo alle compresse tale da essere competitiva. Siano allora u_1, u_2 e u_3 i prezzi di vendita rispettivamente di 1 mg di vitamina C, di 1 mg di sali minerali e di 1 grammo di zucchero; supponendo che la vendita di questi nutrimenti puri sia pari ai fabbisogni minimi (cioè di almeno 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 grammi di zucchero), l'espressione del profitto dell'industria farmaceutica che dovrà essere massimizzata è

$$70u_1 + 30u_2 + 75u_3.$$

Affinché i prezzi di vendita dei componenti puri in compresse fissati dall'industria sia concorrenziali, si deve imporre che il costo unitario dei nutrimenti puri sia minore o uguale al presso che si dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente attraverso gli ingredienti del succo di frutta, cioè dalla polpa di frutta e dal dolcificante. Quindi si devono imporre i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 &\leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 &\leq 600. \end{aligned}$$

Inoltre dovrà essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$.

Quindi il problema complessivo formulato dall'industria farmaceutica è

$$\begin{cases} \max(70u_1 + 30u_2 + 75u_3) \\ 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 \leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 \leq 600 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema di miscelazione considerato.

In generale, consideriamo un generico problema di miscelazione in cui si hanno n sostanze $\mathbf{S_j}$, $j = i, \ldots, n$ ciascuna delle quali contiene una quantità a_{ij} di componente utile $\mathbf{C_i}$, $i = 1, \ldots, m$.

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{4.80}$$

dove ricordiamo che $x \in R^n$ è il vettore avente per componenti le quantità di ciascuna sostanza da introdurre nella miscela, $c \in R^n$ il vettore dei costi unitari delle sostanze, $b \in R^m$ il vettore dei requisiti minimi di componenti utili da introdurre nella miscela, e $A \in R^{m \times n}$ la matrice i cui elementi sono le a_{ij}.

Supponiamo ora che un'industria sia in grado di fornire componenti utili allo stato puro e che voglia immettere sul mercato questi componenti utili e siano u_i, $i = 1, \ldots, m$ i prezzi unitari da assegnare a ciascuno dei componenti utili. Supponendo che la richiesta del mercato sia pari ai fabbisogni minimi della miscela cioè per ciascun componente pari a b_i, il profitto totale dell'industria che vende i componenti utili allo stato puro è

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m.$$

Inoltre, affinché i prezzi u_i assegnati dall'industria ai componenti puri siano concorrenziali, si deve imporre che il costo dei componenti puri sia minore o uguale al prezzo che dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente ottenuto attraverso le sostanze e quindi deve valere

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Inoltre si deve imporre $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Quindi il problema formulato si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è immediato verificare essere il problema duale del problema di miscelazione assegnato (4.80).

Il duale del problema dei trasporti (non fa parte del programma di esame)

Si consideri il problema di trasporto dell'Esempio 2.4.14 a pag. 42 degli Appunti dell'Introduzione ai Modelli di Programmazione Matematica che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(250x_1 + 100x_2 + 85x_3 \ + \ 120y_1 + 80y_2 \ + \ 150y_3) \\ \\ \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 50 \\ & & & & & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 55 \\ x_1 & + & & & & & y_1 & & & & & = & 30 \\ & & x_2 & + & & & & & y_2 & & & = & 40 \\ & & & & x_3 & + & & & & & y_3 & = & 35 \end{array} \\ \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ \ y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ \ y_3 \geq 0. \end{cases}$$

dove x_1, x_2, x_3 rappresentano rispettivamente la quantità di acqua da trasportare dal primo stabilimento ai tre impianti e y_1, y_2, y_3 rappresentano rispettivamente la quantità di acqua da trasportare dal secondo stabilimento ai tre impianti. Ricordiamo inoltre che la disponibilità giornaliera di acqua presso i due stabilimenti è rispettivamente di 50 e 55 ettolitri di acqua, mentre le richieste giornaliere di acqua presso i tre impianti sono rispettivamente di 30, 40 e 35 ettolitri.

Supponiamo ora che una compagnia specializzata in trasporto di acqua (esterna all'industria) voglia proporsi all'industria di acque minerali per effettuare il trasporto dell'acqua dagli stabilimenti agli impianti. Naturalmente la compagnia di trasporti, per convincere l'industria di acque minerali ad avvalersi del servizio di trasporto esterno, dovrà proporre dei prezzi di trasporto vantaggiosi. A tale scopo la compagnia dei trasporti propone all'industria di prelevare un ettolitro di acqua da ciascuno dei due stabilimenti per un prezzo unitario (in migliaia di lire) rispettivamente pari a u_1 e u_2 e di consegnare un ettolitro di acqua a ciascuno dei tre impianti per un prezzo unitario (in migliaia di lire) rispettivamente pari a v_1, v_2 e v_3. Quindi la compagnia dei trasporti vorrà massimizzare la funzione che fornisce il suo profitto complessivo che è data da

$$50u_1 + 55u_2 + 30v_1 + 40v_2 + 35v_3.$$

Tuttavia affinché l'offerta della compagnia dei trasporti risulti vantaggiosa per l'industria delle acque minerali i prezzi del traporto proposti dovranno risultare non superiori a quelli che l'industria avrebbe effettuando in proprio i trasporti stessi. Quindi dovrà risultare

$$\begin{array}{rcl} u_1 + v_1 & \leq & 250 \\ u_1 + v_2 & \leq & 100 \\ u_1 + v_3 & \leq & 85 \\ u_2 + v_1 & \leq & 120 \\ u_2 + v_2 & \leq & 80 \\ u_2 + v_3 & \leq & 150. \end{array}$$

Quindi, la compagnia dei trasporti dovrà risolvere il problema

$$\begin{cases} \max & (50u_1 & + & 55u_2 & + & 30v_1 & + & 40v_2 & + & 35v_3) & \\ & u_1 & + & & & v_1 & & & & & \leq & 250 \\ & u_1 & + & & & & & v_2 & & & \leq & 100 \\ & u_1 & + & & & & & & & v_3 & \leq & 85 \\ & & & u_2 & + & v_1 & & & & & \leq & 120 \\ & & & u_2 & + & & & v_2 & & & \leq & 80 \\ & & & u_2 & + & & & & & v_3 & \leq & 150 \end{cases}$$

che si verifica immediatamente essere il problema duale del problema dei trasporti assegnato.

In generale, consideriamo ora un generico problema dei trasporti. Supponiamo che un'azienda voglia provvedere in proprio ad effettuare il trasporto di materiali e che quindi cerchi di risolvere il seguente problema dei trasporti, cioè

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{4.81}$$

dove, ricordiamo, che le c_{ij} rappresentano il costo del trasporto dall'origine i alla destinazione j, le a_i le disponibilità all'i-esima origine e le b_j le richieste alla j-esima destinazione.

Supponiamo, ora che una compagnia che esegue trasporti voglia proporsi a questa azienda, come alternativa vantaggiosa all'effettuazione dei trasporti in proprio; a tale scopo questa compagnia propone all'azienda di prelevare un'unità di prodotto dall'origine i per un prezzo unitario u_i e di spedire una unità di prodotto alla destinazione j per un prezzo unitario v_j. Per assicurare che i suoi prezzi siano competitivi rispetto a quelli che l'azienda avrebbe effettuando i trasporti in proprio, la compagnia di trasporti deve fare sì che risulti

$$u_i + v_j \leq c_{ij}.$$

D'altra parte la compagnia di trasporti vuole scegliere i prezzi da proporre $u_1, \ldots, u_m$ e $v_1, \ldots, v_n$ in modo da massimizzare il suo profitto complessivo. Poiché le quantità a_i e b_j di prodotto rispettivamente disponibile all'origine i e richiesta alla destinazione j sono note alla compagnia di trasporti, questa cercherà di massimizzare la funzione

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right).$$

Quindi il problema che la compagnia di trasporti formula per determinare quali prezzi u_i e v_j proporre all'azienda è il seguente

$$\begin{cases} \max \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right) \\ u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m; \qquad j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{4.82}$$

che è il problema duale del problema dei trasporti (4.81).

Capitolo 5

Programmazione Lineare

In questo capitolo vengono considerati i problemi di Programmazione Lineare. In particolare per questa classe particolare di problemi è possibile dimostrare un risultato particolarmente importante (detto, appunto, *Teorema fondamentale della Programmazione Lineare*) che evidenzia il fatto che la struttura particolare di tali probleni può essere sfruttata per poterli risolvere attraverso metodi estremanate efficienti.

5.1 Elementi di geometria in R^n

5.1.1 Insiemi Convessi

Definizione 5.1.1 *Siano x e y due punti in R^n. L'insieme dei punti di R^n ottenuti come*

$$z = (1 - \beta)x + \beta y,$$

al variare di β nell'intervallo $[0, 1]$ viene definito come segmento (chiuso) di estremi x e y *e viene sinteticamente indicato con $[x, y]$.*

Utilizzando la precedente definizione è possibile definire gli insiemi convessi.

Definizione 5.1.2 *Un insieme $X \in R^n$ è* convesso *se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme, appartiene all'insieme anche tutto il segmento che li congiunge.*

Utilizzando il concetto di segmento chiuso, la definizione di insieme convesso può essere riformulata nel modo seguente:

Un insieme X è convesso se per ogni coppia di vettori $x, y \in X$ si ha $[x, y] \subseteq X$.

Dalla definizione segue che l'insieme vuoto e l'insieme costituito da un solo vettore sono insiemi convessi (banali). Il più semplice insieme convesso non banale è il *segmento* di estremi $x, y \in R^n$.

Una importante proprietà degli insiemi convessi è espressa dal seguente teorema.

Teorema 5.1.3 *L'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.*

Prova. Siano $X_1, X_2 \subseteq R^n$ due insiemi convessi e sia $X = X_1 \cap X_2$ la loro intersezione. Siano x ed y due vettori in X, allora $x, y \in X_1$ ed $x, y \in X_2$. Poiché X_1 ed X_2 sono insiemi convessi abbiamo che $[x, y] \subseteq X_1$ e che $[x, y] \subseteq X_2$. Ma allora $[x, y] \subseteq X$ e l'insieme X è convesso $\square$

Dal Teorema 5.1.3 si può derivare, con un semplice ragionamento induttivo, il seguente corollario.

Corollario 5.1.4 *L'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è un insieme convesso.*

Passiamo ora a considerare dei particolari insiemi convessi che rivestono un ruolo importante nella teoria della programmazione lineare.

Definizione 5.1.5 *Sia a un vettore di R^n e b un numero reale. L'insieme*

$$H = \{x \in R^n : a^T x = b\}$$

è detto iperpiano definito dall'equazione $a^T x = b$. Gli insiemi

$$\begin{aligned} S^{\leq} &= \{x \in R^n : a^T x \leq b\} \\ S^{\geq} &= \{x \in R^n : a^T x \geq b\} \end{aligned}$$

sono detti semispazi chiusi definiti dalle disequazioni $a^T x \leq b$ e $a^T x \geq b$.

Nel caso dello spazio R^2 il concetto di iperpiano coincide con quello di retta, mentre nel caso dello spazio R^3 il concetto di iperpiano coincide con quello di piano. In maniera intuitiva, i semispazi possono essere pensati come l' insieme dei punti che "giacciono" da una stessa parte rispetto all'iperpiano.

Notiamo che l'iperpiano H fa parte di tutti e due i semispazi e che l'intersezione dei due semispazi coincide con l'iperpiano. In termini insiemistici abbiamo che

$$H \subset S^{\geq}, \qquad H \subset S^{\leq}, \qquad S^{\geq} \cap S^{\leq} = H.$$

I semispazi e gli iperpiani sono insiemi convessi.

Teorema 5.1.6 *Un semispazio chiuso è un insieme convesso.*

Prova. Dimostreremo il teorema per un semispazio $S^{\leq} = \{x \in R^n : a^T x \leq b\}$, la dimostrazione per il semispazio $S^{\geq}$ ottenuto invertendo il verso della disequazione è analoga. Consideriamo due generici vettori x ed y appartenenti ad $S^{\leq}$, vogliamo dimostrare che ogni vettore $z \in [x, y]$ appartiene ad $S^{\leq}$, ovvero soddisfa la relazione $a^T z \leq b$.
Sia $z = \beta x + (1 - \beta) y$ con $0 \leq \beta \leq 1$. Poiché x ed y appartengono ad $S^{\leq}$ abbiamo che $a^T x \leq b$ e $a^T y \leq b$. Inoltre, poiché β ed $1 - \beta$ sono reali non negativi abbiamo che

$$a^T(\beta x + (1 - \beta) y) = \beta a^T x + (1 - \beta) a^T y \leq \beta b + (1 - \beta) b = b$$

e quindi che $a^T z \leq b$ $\square$

Utilizzando il Teorema 5.1.6 e il Teorema 5.1.3 e ora facile dimostrare che anche un iperpiano è un insieme convesso.

Corollario 5.1.7 *Un iperpiano è un insieme convesso.*

Prova. Un iperpiano è l'intersezione di due semispazi chiusi ($S^{\leq}$ e $S^{\geq}$). Per il Teorema 5.1.6 un semispazio chiuso è un insieme convesso mentre, per il Teorema 5.1.3, l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso. □

Notiamo ora che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è definito come l'insieme di punti che soddisfa i vincoli, cioè un insieme di equazioni e disequazioni lineari. Usando la terminologia appena introdotta, possiamo anche dire che l' insieme di punti ammissibili di un problema di PL è dato dall' intersezione di un numero finito di semispazi (disequazioni lineari) e iperpiani (equazioni lineari). Quindi, applicando il Teorema 5.1.6, il Corollario 5.1.7 e il Teorema 5.1.3 abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5.1.8 *L'insieme ammissibile di un problema di programmazione lineare è un insieme convesso.*

In particolare è usuale introdurre la seguente definizione:

Definizione 5.1.9 *Un insieme $P \subseteq R^n$ è un* poliedro *se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani. Un poliedro limitato*[1] *viene detto* polìtopo.

Usando un punto di vista più algebrico possiamo parafrasare la precedente definizione e dire che un poliedro è l'insieme di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni e disequazioni lineari. In particolare, notiamo che l'insieme vuoto è un poliedro (è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni inconsistente) e che anche R^n è un poliedro (R^n è, per esempio, l'insieme di soluzioni dell'equazione lineare $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n = 0$). Notiamo anche che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è un poliedro.

5.1.2 Vertici

In questa sezione formalizziamo il concetto intuitivo di *vertice*. Questo concetto riveste un ruolo fondamentale nella teoria della programmazione lineare.

Definizione 5.1.10 *Un vettore x appartenente ad un insieme convesso C è detto* vertice[2] *di C se non esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in C$ tali che $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ ed $x \in [x_1, x_2]$.*

[1] Un insieme $P \subset R^n$ si dice *limitato* se esiste una costante $M > 0$ tale che, per ogni punto x appartenente a P risulti $|x_i| \leq M$ per ogni $i = 1, \ldots, n$

[2] Per precisione notiamo che nella letteratura quella appena data è la definizione di *punto estremo*, mentre viene normalmente indicato con vertice un punto che soddisfa una proprietà più complessa, che qui non riportiamo. Nel caso però di poliedri, che saranno gli unici insiemi convessi che prenderemo in considerazione in questo corso, le due definizioni coincidono, cioé un punto appartenente a un poliedro è un vertice del poliedro stesso se e solo se è un suo punto estremo.

Un aspetto importante è la possibilità di *caratterizzare* i vertici dell'insieme dei punti ammissibili di un problema di PL. Infatti è possibile mettere in relazione l'esistenza di un vertice con l'esistenza di n vincoli attivi linearmente indipendenti. Si consideri quindi un generico problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$$

dove $c \in R^n$, $x \in R^n$, $b \in R^m$ e $A \in R^{m \times n}$. Denotando con a_i^T, $i = 1, \ldots, m$ le righe della matrice A possiamo introdurre nuovamenete la seguente definizione:

Definizione 5.1.11 (Vincoli attivi)
Se un vettore $\bar{x} \in R^n$ soddisfa $a_i^T \bar{x} = b_i$ per qualche $i \in \{1, \ldots, m\}$ si dice che il corrispondente vincolo è attivo *in $\bar{x}$. Inoltre, dato $\bar{x} \in R^n$ si indica con $I(\bar{x})$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi, cioè:*

$$I(\bar{x}) = \left\{ i \in \{1, \ldots, m\} : a_i^T \bar{x} = b_i \right\}.$$

Per brevità, nel seguito, chiameremo spesso *vincoli linearmente indipendenti* quei vincoli per i quali risultano linearmente indipendenti i vettori a_i^T corrispondenti.

Teorema 5.1.12 *Siano dati un poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$ e un punto $\bar{x} \in P$. Il punto $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se esistono n righe a_i^T della matrice A con $i \in I(\bar{x})$ che sono linearmente indipendenti.*

Seguono tre corollari che discendono in maniera immediata dal teorema appena dimostrato.

Corollario 5.1.13 *Sia dato un poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$. Se la matrice $A \in R^{m \times n}$ ha un numero di righe linearmente indipendenti minore di n, allora P non ha vertici. In particolare se $m < n$ allora P non ha vertici.*

Corollario 5.1.14 *Siano dati un poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$ e un punto $\bar{x} \in P$. Il punto $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se è soluzione unica del sistema*

$$a_i^T x = b_i \qquad i \in I(\bar{x}).$$

Corollario 5.1.15 *Un poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$ ha al piú un numero finito di vertici.*

Prova. Se $m < n$ il poliedro ovviamente non ha vertici. Se $m \geq n$, per il Corollario 5.1.14 ogni vertice del poliedro corrisponde ad un sottoinsieme di n righe linearmente indipendenti della matrice A. Ora poiché la matrice A ha al piú $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ sottoinsiemi distinti di n righe, allora il poliedro ha al piú $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ vertici. $\square$

Esempio 5.1.16 *Determinare i vertici del poliedro descritto dalle disuguaglianze*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi innanzitutto che in questo esempio la dimensione n è pari a 2 e il numero dei vincoli m pari a 4. Si devono determinare tutte le possibili intersezioni delle rette $3x_1 - 2x_2 = -30$, $2x_1 - x_2 = -12$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ che costituiscono il poliedro; si osservi che tali intersezioni sono $\binom{4}{2} = 6$. Per ogni punto così ottenuto si deve verificare innanzitutto l'appartenenza del punto al poliedro, e poi, affinché sia un vertice, l'indipendenza lineare dei vincoli attivi in quel punto.

1. Il sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ 2x_1 - x_2 = -12 \end{cases}$ corrispondente al primo e al secondo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_1 = (6, 24)$ che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il primo e il secondo vincolo e quindi $I(P_1) = \{1, 2\}$ e poiché i vettori $a_1^T = (3,\ -2)$ e $a_2^T = (2,\ -1)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_1 è un vertice del poliedro.

2. Il sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ corrispondente al primo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_2 = (0, 15)$ che non appartiene al poliedro.

3. Il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al primo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_3 = (-10, 0)$ che non appartiene al poliedro.

4. Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ corrispondente al secondo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_4 = (0, 12)$ che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il secondo e il terzo vincolo e quindi $I(P_4) = \{2, 3\}$ e poiché i vettori $a_2^T = (2,\ -1)$ e $a_3^T = (1,\ 0)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_4 è un vertice del poliedro.

5. Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al secondo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_5 = (-6, 0)$ che non appartiene al poliedro.

6. Il sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al terzo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_6 = (0, 0)$ che si verifica immediatamente essere appartenente al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il terzo e il quarto vincolo e quindi $I(P_6) = \{3, 4\}$ e poiché i vettori $a_3^T = (1,\ 0)$ e $a_4^T = (0,\ 1)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_6 è un vertice del poliedro.

□

Esempio 5.1.17 *Dato il poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

verificare se i punti $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1/2)$ *e* $P_3 = (0, 0, 1)$ *sono vertici del poliedro.*

In questo esempio la dimensione n è pari a 3 e il numero dei vincoli m è pari a 5. Riscrivendo i primi due vincoli nella forma di disuguaglianza di maggiore o uguale, la matrice A dei coefficienti delle disuguaglianze che descrivono il poliedro è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni punto dato, dopo aver verificato l'appartenenza del punto al poliedro, si deve verificare se esistono tre vincoli attivi in quel punto linearmente indipendenti.
Nel punto $P_1 = (0, 0, 0)$ (che appartiene al poliedro) sono attivi il terzo, il quarto e il quinto vincolo e quindi $I(P_1) = \{3, 4, 5\}$ e poiché le righe a_3^T, a_4^T e a_5^T della matrice A sono linearmente indipendenti, il punto P_1 è vertice del poliedro.
Nel punto $P_2 = (0, 0, 1/2)$ (che appartiene al poliedro) sono attivi solamente due vincoli (il terzo e il quarto) e quindi il punto P_2 non può essere un vertice del poliedro.
Nel punto $P_3 = (0, 0, 1)$ (che appartiene al poliedro) si hanno tre vincoli attivi; in particolare risulta $I(P_3) = \{1, 3, 4\}$ e le corrispondenti righe a_1^T, a_3^T e a_4^T della matrice A sono linearmente indipendenti e quindi il punto P_3 è un vertice del poliedro. □

Esempio 5.1.18 *Determinare i vertici del poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4. \end{cases}$$

In questo caso si ha $n = 3$ e $m = 4$ e quindi si devono determinare punti del poliedro in cui sono attivi tre vincoli linearmente indipendenti. Si devono quindi considerare $\binom{4}{3} = 4$ sistemi di equazioni in tre variabili:

1. il sistema ottenuto dai primi tre vincoli ha come unica soluzione il punto $P_1(1, 1, 0)$ che non è ammissibile;

2. si consideri ora il sistema ottenuto dal primo, dal secondo e dal quarto vincolo; la matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 2 in quanto i tre vincoli considerati (il primo, il secondo e il quarto) non sono linearmente indipendenti (il vettore corrispondente al quarto vincolo si può ottenere come somma dei vettori corrispondenti al primo e al secondo vincolo). Quindi non si può avere un vertice.

3. il sistema ottenuto dal primo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_2 = (2, 2, -3)$ che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in P_3 sono linearmente indipendenti, P_2 è un vertice del poliedro.

4. il sistema ottenuto dal secondo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_3 = (3, 2, -5)$ che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in P_3 sono linearmente indipendenti, P_3 è un vertice del poliedro.

□

Se tra vincoli che descrivono un poliedro è presente un vincolo di uguaglianza, nella determinazione dei vertici ci si può limitare a considerare solo i sistemi che contengono questo vincolo di uguaglianza, facendo diminuire considerevolmente il numero dei sistemi da prendere in considerazione. L'esempio che segue mostra una situazione di questo tipo.

Esempio 5.1.19 *Calcolare tutti i vertici del seguente poliedro:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ x & \geq & 0. & & & & \end{array}$$

Bisogna analizzare tutti i possibili sistemi di tre equazioni "estraibili dal sistema dato, che ha cinque vincoli. Riportiamo il sistema per esteso:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Per ogni sistema bisogna preliminarmente verificare che il rango sia pari a n, cioè a 3. Se il rango è 3 si calcola l'unica soluzione del sistema. Se questa appartiene al poliedro (cioè se soddisfa tutti i vincoli che definiscono il poliedro) si ha un vertice del poliedro. Siccome è presente un vincolo di uguaglianza, ci si può limitare ad analizzare solo i sistemi che contengono il vincolo di uguaglianza.
I vertici sono 2:

$$v_1 = (5/3, 0, 2/3)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal primo, secondo e quarto vincolo e

$$v_2 = (1, 0, 0)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal secondo, quarto e quinto vincolo.

Per quanto riguarda gli altri sistemi "estraibili risulta che per il sistema formato dai vincoli

- primo, secondo e terzo: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- primo, secondo e quinto: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quarto: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quinto: il rango è minore di tre.

□

Come è facile osservare, non tutti i poliedri hanno almeno un vertice. Un controesempio banale di poliedro che non ha vertici è un semispazio in R^n con $n > 1$. Se la matrice A ha un numero di righe strettamente minore di n, allora il poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$ non ha vertici perché è ovvio che in questo caso non è possibile trovare n vincoli attivi né, tantomeno, n vincoli attivi linearmente indipendenti (vedi il Corollario 5.1.13).

Il fatto che un poliedro abbia o non abbia vertici è basato sulla possibilità di un poliedro di contenere o meno rette. Questo concetto verrà ora formalizzato introducendo innanzitutto la seguente definizione.

Definizione 5.1.20 *Si dice che un poliedro P* contiene una retta[3] *se esiste un punto $\tilde{x} \in P$ e un vettore non nullo $d \in R^n$ tale che $\tilde{x} + \lambda d \in P$ per ogni $\lambda \in R$*

Riportiamo quindi, senza dimostrazione, il seguente risultato, che non verrà utilizzato nel seguito, ma che aiuta a capire la relazione tra vertici e poliedri che non contengono rette.

Teorema 5.1.21 *Sia P un poliedro non vuoto. P possiede almeno un vertice se e solo se P non contiene rette.*

5.2 Caratterizzazione dei Problemi di Programmazione Lineare

5.2.1 Il Teorema fondamentale della Programmazione Lineare

Quanto fino ad ora esaminato permette di enunciare e dimostrare un risultato di fondamentale importanza che caratterizza i problemi di Programmazione Lineare.

[3] L'insieme di punti $\{x \in R^n : \tilde{x} + \lambda d, \lambda \in R\}$ è una retta che viene spesso indicata come retta che passa per $\tilde{x}$ e ha direzione d Analogamente, l'insieme di punti $\{x \in R^n : \tilde{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\}$ è una semiretta che viene indicata come semiretta che ha origine in $\tilde{x}$ e direzione d.

Teorema 5.2.1 – **(Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare)** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \tag{PL}$$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$ *non contenga rette. Allora una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:*

1. *Il problema è inammissibile, ovvero il poliedro* P *è vuoto;*
2. *Il problema* (PL) *è illimitato inferiormente;*
3. *Il problema* (PL) *ammette soluzioni ottime e almeno una di queste soluzioni è un vertice del poliedro* P.

Un'immediata conseguenza del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare è che se il poliedro è un politopo, allora il problema ammette soluzione ottima in un vertice del politopo. Questo risultato è formalizzato nel seguente corollario.

Corollario 5.2.2 *Se un poliedro* $P = \{x \in R^n \mid Ax \geq b, \}$ *è un politopo non vuoto, allora il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima (finita) in un vertice del poliedro* P.

Osservazione La struttura lineare di un problema di Programmazione Lineare è l'elemento chiave che permette di ottenere un risultato così forte circa la possibile soluzione di un problema di ottimizzazione. Infatti, come controesempio si consideri il problema in una variabile reale

$$\begin{cases} \min \dfrac{1}{x} \\ \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Questo problema non ammette soluzione ottima pur non essendo illimitato inferiormente. L'alternativa espressa dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare in questo caso non vale proprio perché viene meno l'ipotesi fondamentale di linearità della funzione obiettivo.

Osservazione Se un problema di Programmazione Lineare, come accade spesso nei problemi provenienti da modelli reali, presenta limitazioni inferiori e superiori sulle variabili cioè è del tipo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

dove $l \in R^n$ e $u \in R^n$ sono rispettivamente una limitazione inferiore e superiore delle variabili, allora il poliedro che descrive l'insieme ammissibile è un politopo e quindi vale la caratterizzazione delle soluzioni data dal Corollario 5.2.2.

5.2.2 Conseguenze del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare

Il Teorema Fondamentale fornisce la base teorica al *Metodo del Simplesso*. Tale metodo è stato il primo algoritmo pratico per la risoluzione di problemi di PL ed è tuttora il più usato e uno dei più efficienti in pratica.

Per introdurre il modo di operare del Metodo del Simplesso iniziamo con il ricordare che *un poliedro ha sempre un numero finito di vertici* (eventualmente il numero dei vertici, come abbiamo già avuto modo di osservare, può essere zero; in questa analisi introduttiva, supponiamo per semplicità che ciò non si verifichi). Comunque, benchè finito, il numero di vertici di un poliedro può essere arbitrariamente alto. Basta pensare all'area racchiusa da un poligono nel piano. All'aumentare del numero dei lati cresce il numero di vertici. Per fare un altro esempio, consideriamo il poliedro

$$I = \{x \in R^n : 0 \leq x_i \leq 1, \ \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Se $n = 1$ abbiamo ovviamente un segmento, con 2 vertici ($2 = 2^1$). Se $n = 2$ abbiamo un quadrato, con 4 vertici ($4 = 2^2$). Se $n = 3$ abbiamo un cubo con 8 vertici ($8 = 2^3$). In generale, per $n > 3$ l'insieme I è noto come ipercubo di dimensione n è ha un numero di vertici pari a 2^n, che quindi cresce *esponenzialmente* con la dimensione dello spazio.

Supponiamo di avere un problema di PL

$$\begin{aligned} \min \ \ & c^T x \\ & x \in P, \end{aligned}$$

dove P è un poliedro che non contiene rette, e di sapere che il problema ammette (almeno) una soluzione ottima. Allora, il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare ci autorizza a limitare la ricerca di una soluzione ottima ai vertici del poliedro P. Una procedura teorica per la ricerca dell'ottimo, potrebbe essere quindi:

1. Calcola tutti i vertici $v_1, v_2, \ldots, v_q$ del poliedro P.
2. Valuta la funzione obiettivo in tutti i vertici e denota con v^* il vertice per cui si raggiunge il valore minimo:

$$c^T v^* \leq c^T v_i \qquad i = 1, 2, \ldots, q.$$

3. v^* è una soluzione ottima del problema.

Ovviamente questa strategia deve essere completata da procedure in grado di determinare se P è vuoto o se il problema è illimitato. Inoltre bisogna essere in grado di calcolare i vertici.Il problema principale di questo modo di procedere è che siccome il numero di vertici può essere altissimo, essa può diventare computazionalmente così oneroso da risultare impraticabile. Il Metodo del Simplesso, nella sostanza, è un modo raffinato di realizzare lo schema precedente e può essere schematizzato come segue:

1. Determina un vertice iniziale v di P;
2. Decidi se v è una soluzione ottima;
3. Se v non è una soluzione ottima allora determina "in modo intelligente un nuovo vertice v di P e torna al passo 2.

Il Metodo del Simplesso si applica a problemi di Programmazione Lineare *"in forma standard"*, ovvero a problemi che presentano una particolare struttura adatta ad essere sfruttata da un punto di vista algoritmico.

5.3 Problemi di Programmazione Lineare in Forma Standard

5.3.1 La forma standard

Fino ad ora abbiamo scritto un generico problema di Programmazione Lineare nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \tag{5.1}$$

Un problema di Programmazione Lineare in questa forma viene detto problema in *forma generale*. Il Metodo del Simplesso assume che il problema di Programmazione Lineare sia nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

che viene chiamata *forma standard*. Come vedremo un problema scritto in forma standard presenta importanti proprietà che possono essere sfruttate nella risoluzione di un problema di PL. Osserviamo innanzitutto che il poliedro di un problema di Programmazione Lineare in forma standard (che d'ora in poi chiameremo "poliedro in forma standard"), è contenuto nell'ortante positivo e quindi non può contenere rette. Di conseguenza, ad un problema in forma standard si applica sempre il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Inoltre, la struttura dell'insieme ammissibile di un problema in forma standard permette di caratterizzare i vertici dell'insieme ammissibile stesso.

Preliminarmente dimostriamo che assumere che un problema di Programmazione Lineare sia in forma standard non fa perdere di generalità in quanto qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma standard. Infatti se si ha un problema di Programmazione Lineare nella forma (5.1) si può passare ad un problema equivalente con soli vincoli di uguaglianza introducendo un vettore $u \in R^m$, $u \geq 0$, e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax - u = b \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili u vengono chiamate *variabili di surplus* e rappresentano la differenza non negativa tra il primo e il secondo membro dei vincoli di disuguaglianza. È immediato ricondurre ad un problema con soli vincoli di uguaglianza anche un problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b. \end{cases} \tag{5.3}$$

Infatti sarà sufficiente introdurre un vettore $w \in R^m$, $w \geq 0$, e riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax + w = b \\ w \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili w vengono chiamate *variabili di slack*.

È inoltre sempre possibile ricondurre un qualsiasi problema di Programmazione Lineare ad un problema equivalente che presenti tutte le variabili vincolate ad essere non negative. Questo può essere facilmente ottenuto attraverso la trasformazione di variabili

$$x = x^+ - x^- \tag{5.4}$$

dove $x^+ \geq 0$ e $x^- \geq 0$. Se infatti consideriamo un problema di Programmazione Lineare nella forma (5.1), la trasformazione (5.4) permette di riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T (x^+ - x^-) \\ A(x^+ - x^-) \geq b \\ x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

in cui tutte le variabili sono non negative. Si osservi che l'insieme ammissibile di un tale problema con tutte le variabili non negative, è un poliedro che non contiene rette.

Osservazione Ovviamente il problema (5.5) può essere posto nella seguente forma vettoriale

$$\begin{cases} \min \widetilde{c}^T \widetilde{x} \\ \widetilde{A}\widetilde{x} \geq b \\ \widetilde{x} \geq 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

dove $\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$, $\widetilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$ e $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix}$. Da questa rappresentazione dell'insieme ammissibile, riscrivendo i vincoli in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ I_n \end{pmatrix} \widetilde{x} \geq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

si vede immediatamente che i coefficienti delle ultime n righe della matrice del vincoli formano un insieme di vettori linearmente indipendenti (sono i versori degli assi coordinati).

Da queste considerazioni si deduce immediatamente che si può passare da un problema di Programmazione Lineare in forma generale (5.1) ad uno in forma standard

(5.2) semplicemente introducendo i vettori $y \in R^n$, $z \in R^n$ e $u \in R^m$, $y, z, u \geq 0$ e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T(y-z) \\ A(y-z) - u = b \\ y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0. \end{cases}$$

Viceversa, avendo un problema di PL in forma standard,

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

si può passare facilmente trasformarlo in uno in forma generale riscrivendolo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \min c^T x \\ \bar{A}x \geq \bar{b} \end{cases}$$

dove

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_{n\times n} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0_n \end{pmatrix}$$

Esempio 5.3.1 Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 \geq 7 \\ 2x_1 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere trasformato in un problema equivalente con vincoli di sola uguaglianza mediante l'introduzione di una variabile di surplus x_4 e una variabile di slack x_5 e scrivendo il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere ulteriormente trasformato in un problema equivalente con tutte le variabili vincolate in segno. È sufficiente rappresentare la variabile x_2 che

non è vincolata in segno nella forma $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ e scrivere il problema nella forma equivalente

$$\begin{cases} \min\left(12x_1 + x_2^+ - x_2^- + 5x_3\right) \\ x_2^+ - x_2^- - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2^+ + x_2^- - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0,\ x_2^- \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

□

5.3.2 Vertici e Soluzioni di Base Ammissibile

Come abbiamo visto nell'introduzione di questo capitolo, un punto centrale del metodo del simplesso è la visita dei vertici del poliedro ammissibile. È quindi molto importante disporre di metodi efficaci per l'individuazione e l'analisi dei vertici di un poliedro. Uno dei vantaggi di considerare i problemi di programmazione lineare in forma standard è la particolare caratterizzazione che si puó dare per i vertici dei loro insiemi ammissibili.

Per descrivere tale caratterizzazione, consideriamo un generico poliedro in forma standard

$$P = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{5.8}$$

dove A è una matrice $m \times n$ e dove supponiamo che valga la seguente assunzione.

Assunzione: *il poliedo P è non vuoto e* $\text{rango}(A) = m$.

Notiamo che l'assunzione fatta implica $m \leq n$ e garantisce l'esistenza di almeno una sottomatrice $B \in R^{m \times m}$ non singolare. Notiamo inoltre che, come vedremo successivamente, tale assunzione non è limitativa.

Teorema 5.3.2 *Sia $\bar{x}$ un punto appartenente al poliedro P definito come in (5.8). Allora $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se le colonne di A relative alle componenti positive di $\bar{x}$ sono linearmente indipendenti.*

Un conseguenza immediata del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 5.3.3 *Sia $\bar{x}$ un punto appartenente al poliedro P definito come in (5.8). Se $\bar{x}$ è un vertice di P allora almeno $n - m$ componenti di $\bar{x}$ sono nulle.*

Esempio 5.3.4 Consideriamo il sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & 4x_6 & = & 6 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 5 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & = & 7 \\ & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array} \tag{5.9}$$

e il punto $x = (2, 1, 1, 1, 0, 0)^T$. Si verifica facilmente per sostituzione che il punto x è una soluzione ammissibile del sistema considerato, ma non è un suo vertice. Infatti le colonne di A relative alle componenti di x positive

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

non sono linearmente indipendenti (cfr. Corollario 5.3.3) □

Esempio 5.3.5 Consideriamo il poliedro P definito dal seguente sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ & & & & & & x & \geq & 0, \end{array}$$

e i due punti $(1, 1, 0, 0)^T$ e $(0, 0, 0, 1)^T$. Si verifica immediatamente che i due punti sono ammissibili o, in altri termini, appartengono al poliedro P. Inoltre, applicando il Teorema 5.3.2, si può constatare che i due punti sono vertici di P. Nel primo caso infatti

$$\det(a_1\, a_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e quindi l'insieme costituito dalla prima e seconda colonna, corrispondenti alle componenti del punto maggiori di 0, è linearmente indipendente. Nel secondo caso il risultato è ancora più ovvio perché l'insieme costituito dalla sola quarta colonna (diversa da zero) è banalmente linearmente indipendente. Notiamo che per tutti e due i punti il numero di componenti maggiore di zero è minore o uguale a $m = 2$. □

Introduciamo ora alcune definizioni che permetteranno di dare una importante caratterizzazione dei vertici di un poliedro in forma standard. Il punto di partenza è la definizione di sottomatrice di matrice base della matrice A.

Definizione 5.3.6 *Sia $A \in R^{m\times n}$ la matrice dei coefficienti di un poliedro in forma standard (5.8), e siano $\{a_1, \ldots, a_n\}$ l'insieme delle sue colonne. Una sottomatrice $B = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}) \in R^{m\times m}$ di A non singolare è detta matrice di base di A.*

Scelta una particolare matrice di base B di A, si possono introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 5.3.7 *Data una matrice di base $B = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$ di A:*

- *la sottomatrice $N = (a_{j_{m+1}}, \ldots, a_{j_n}) \in R^{m\times(n-m)}$ di A è detta matrice delle colonne fuori base di A;*

- *l'insieme* $I_B = \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *viene detto insieme degli indici di base;*
- *l'insieme* $I_N = \{j_{m+1}, \ldots, j_n\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *viene detto insieme degli indici fuori base;*
- *le componenti* x_i, $i \in I_B$ *vengono dette variabili di base;*
- *le componenti* x_i, $i \in I_N$ *vengono dette variabili fuori base;*
- *ogni vettore* $x \in R^n$ *può essere partizionato in due sottovettori*

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in R^m, \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \in R^{n-m},$$

detti vettore delle variabili di base (x_B) *e vettore delle variabili fuori base* (x_N).

Esempio 5.3.8 Sia dato il seguente sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & x_6 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 2x_6 & = & 8 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Consideriamo la sottomatrice di A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la sesta, prima e quarta colonna della matrice A del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che $\det B = -3$, abbiamo che B è una matrice di base di A, le colonne a_6, a_1 e a_4 sono colonne di base e gli indici 6, 1 e 4 sono indici di base.

Consideriamo ora, invece, la sottomatrice di A

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la seconda, quinta e quarta colonna della matrice A del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che $\det B = 0$, abbiamo che B non una matrice di base di A. $\square$

Utilizzando gli insiemi di indici I_B e I_N si può riscrivere il sistema $Ax = b$ nella seguente maniera:

$$\sum_{i \in I_B} a_{j_i} x_{j_i} + \sum_{i \in I_N} a_{j_i} x_{j_i} = b. \tag{5.10}$$

Utilizzando i sottovettori x_B e x_N, il sistema (5.10) può essere posto nella forma:

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{5.11}$$

oppure nella forma:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \tag{5.12}$$

I sistemi (5.11) e (5.12) mettono in evidenza che il sistema $Ax = b$ può essere risolto esprimendo il vettore delle variabili base x_B in funzione del vettore delle variabili fuori base. La particolare soluzione del sistema $Ax = b$ che si ottiene annullando il vettore delle variabili fuori base viene caratterizzata dalla seguente definizione.

Definizione 5.3.9 *Data una matrice di base B di A. Un vettore $\bar{x}$ è detto Soluzione di Base del sistema $Ax = b$ se i suoi sottovettori $\bar{x}_B$ e $\bar{x}_N$ sono tali che:*

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m} \end{aligned}$$

Data una matrice di base B, anche il vettore c dei coefficienti della funzione obiettivo può essere decomposto nei due sottovettori:

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_m} \end{pmatrix} \in R^m, \qquad c_N = \begin{pmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_n} \end{pmatrix} \in R^{n-m},$$

che rappresentano i coefficienti di costo delle variabili di base e quelli delle variabili fuori base.

Un problema in forma standard può quindi essere riscritto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

oppure nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

Osservazione Un problema di PL in forma standard può essere scritto nella forma equivalente (5.13) in tanti modi diversi quante sono le matrici di base di A.

Utilizzando delle particolari matrici di base del sistema $Ax = b$ è possibile caratterizzare delle particolari soluzioni ammissibili del Problema in Forma Standard 5.13 (oppure 5.14), a questo scopo sono necessarie altre due definizioni.

Definizione 5.3.10 *Dato un problema in forma standard 5.13, una matrice di base B di A è detta matrice di base ammissibile se risulta*

$$B^{-1}b \geq 0_m.$$

Definizione 5.3.11 *Dato un problema in forma standard 5.13 e data una matrice di base ammissibile B di A. Un vettore $\bar{x}$ è detto Soluzione di Base Ammissibile (SBA) del problema 5.13 se i suoi sottovettori $\bar{x}_B$ e $\bar{x}_N$ sono tali che:*

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m} \end{aligned}$$

Esempio 5.3.12 Consideriamo il sistema dell'Esempio 5.3.8 e la prima delle basi ivi presa in considerazione.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

con

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

Sappiamo già che B è una matrice di base, verifichiamo se è una matrice di base ammissibile. Risulta

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Quindi B è una base ammissibile. La soluzione di base ammissibile associata è

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora una matrice di base diversa, più precisamente

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

corrispondente a

$$I_B = \{j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 6\}.$$

È facile verificare che B è una matrice di base (il suo determinante è diverso da 0), e che la soluzione di base ad essa associata è

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 16/3 \end{pmatrix}$$
$$\bar{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16/3 \end{pmatrix}.$$

che, ovviamente, non è ammissibile perché la prima e seconda componente sono negative. □

Possiamo ora studiare la relazione tra SBA e vertici. Vale il seguente teorema.

Teorema 5.3.13 *Sia $\bar{x}$ un punto appartenente al poliedro P definito come in (5.8). Allora $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se è una SBA.*

È facile convincersi che il numero di SBA (e quindi il numero di vertici) è finito ed è pari, al massimo, al numero di possibili modi diversi di prendere m colonne di A fra n. Vale cioè il seguente teorema

Teorema 5.3.14 *Il numero di SBA (cioè di vertici) è finito e pari, al più, a* $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.

Notiamo che in effetti il numero di SBA può essere inferiore al limite massimo di $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ perché una volta fissate m colonne di A queste potrebbero non essere linearmente indipendenti o, anche nel caso lo fossero, la soluzione di base associata può non essere ammissibile.

Esempio 5.3.15 Si dato il seguente sistema.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & \frac{5}{2}x_4 & = & 4 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & 2 \\ & & & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A. Applicando le definizioni di base, soluzione di base e soluzione di base ammissibile, otteniamo i risultati riportati qui di seguito.

Indici delle colonne	*Base*	*Soluzione di base*	*Ammissibile*
{1, 2}	Sì	$(2, 1, 0, 0)^T$	Sì
{1, 3}	No	–	–
{1, 4}	Sì	$(-1, 0, 0, 2)^T$	No
{2, 3}	Sì	$(0, 1, -1, 0)^T$	No
{2, 4}	Sì	$(0, 1/3, 0, 4/3)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1/2, 2)^T$	Sì

Come si vede su $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibili combinazioni abbiamo 5 basi di cui solo tre sono ammissibili. □

Dal Teorema 5.3.2 e dal Teorema 5.3.13 segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario 5.3.16 *Una soluzione* $\bar{x} \neq 0_n$ *appartenente a* P *è una SBA se e solo se le colonne di* A *corrispondenti alle componenti di* $\bar{x}$ *positive sono linearmenti indipendenti.*

Il significato del Teorema 5.3.13 e del Corollario 5.3.16 è che i concetti di vertice di P e quello di soluzione di base ammissibile sono assolutamente equivalenti. In effetti noi siamo partiti da una formalizzazione *geometrica* del concetto di vertice che si presta

bene ai ragionamenti intuitivi e siamo poi arrivati al concetto algebrico (equivalente) di SBA che si presta meglio al tipo di manipolazione che dovremo introdurre per studiare un algoritmo risolutivo di tipo generale per i problemi di PL. Nel seguito ci riferiremo principalmente al concetto di SBA, ma, al fine di avere un' idea più intuitiva del significato dei risultati cui perverremo, conviene tenere sempre presente anche il suo aspetto geometrico di vertice, così come introdotto in precedenza.

Osservazione La corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili non è biunivoca. Infatti, mentre a ciascuna base ammissibile B di A corrisponde una sola soluzione di base ammissibile $x = (B^{-1}b \;\; 0_{n-m})^T$, è possibile che una soluzione di base ammissibile sia associata a due basi ammissibili diverse.

Esempio 5.3.17 Sia dato il seguente sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Compiliamo una tabella analoga a quella dell'Esempio 5.3.15.

Indici delle colonne	*Base*	*Soluzione di base*	*Ammissibile*
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{1, 4}	No	–	–
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì

Si vede che abbiamo 4 basi ammissibili, ma solo 2 soluzioni di base ammissibili (ovvero solo due vertici). Infatti tre basi diverse, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, danno origine ad un'unica soluzione di base, $(0, 0, 1, 0)^T$. □

Risulta abbastanza evidente che la possibilità che a una stessa SBA (equivalentemente, a uno stesso vertice) corrispondano più basi è legato al fatto che nel vettore $B^{-1}b$ ci siano degli zeri, che corrispondono al fatto che alcune variabili, che valgono 0, possono indifferentemente essere considerate in base o fuori base.

Allo scopo di chiarire il legame tra basi ammissibili e soluzioni ammissibili di base (vertici) introduciamo la seguente definizione.

Definizione 5.3.18 *Una soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ è degenere se il numero di componenti positive di $\bar{x}$ è minore di m.*

Dalla precedente definizione discende immediatamente che se una soluzione è non degenere allora *ogni* componente del vettore $B^{-1}b$ è strettamente positiva. Nel caso di soluzioni di base non degeneri la corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili diviene biunivoca, come mostrato nel seguente teorema.

Teorema 5.3.19 *Se una soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ è non degenere allora esiste una ed una sola base ammissibile B tale che*

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Se una soluzione $\bar{x}$ è degenere, allora una o più componenti del vettore $\bar{x}_B = B^{-1}b$ sono nulle. In tal caso, basi ammissibili diverse possono produrre la stessa soluzione ammissibile di base $\bar{x}$.

Esempio 5.3.20 Con riferimento all' Esempio 5.3.17, completiamo la tabella, aggiungendo l'indicazione di soluzione degenere o meno.

Indici delle colonne	*Base*	*Soluzione di base*	*Ammissibile*	*Degenere*
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No	-
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{1, 4}	No	–	–	–
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì	No
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì

5.4 Introduzione al metodo del simplesso

5.4.1 Introduzione

Il Metodo del Simplesso permette di risolvere problemi di Programmazione Lineare in *forma standard*, cioè problemi di Programmazione Lineare della forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{5.15}$$

dove $x \in R^n$, $b \in R^m$ e $A \in R^{m \times n}$.

Come detto precedentemente il metodo del Simplesso trae ispirazione dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare e si basa sull'idea di cercare una possibile soluzione del problema di Programmazione Lineare tra i vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile del problema. Gli elementi caratterizzanti di questo metodo sono:

- la capacità di selezionare in maniera efficiente i vertici che visita;
- il fatto di passare da un vertice ad un'altro senza richiedere inversioni di matrici o soluzioni di sistemi di equazioni;
- l'uso di semplici criteri che permettono di individuare il vertice ottimo o di concludere che il problema di Programmazione Lineare non ammette soluzioni in quanto è illimitato inferiormente.

Queste importanti caratteristiche sono ottenute grazie ad un uso molto efficiente delle basi ammissibili della matrice A. Tali basi permettono, da una parte, di individuare facilmente un vertice dell'insieme ammissibile (una soluzione di base ammissibile) e, dall'altra parte, di sfruttare i vincoli di uguaglianza dell'insieme ammissibile per esprimere un gruppo di variabili (le variabili di base) in funzione delle altre (le variabili non di base).

In questa sezione vengono accennati gli elementi essenziali su cui si basa il metodo del simplesso.

Per semplificare la descrizione, si suppongono vere le seguenti assunzioni.

Assunzione 5.4.1

i) *l'insieme ammissibile del problema (5.15) è non vuoto;*

ii) $\text{rango}(A) = m$*;*

iii) *data una base ammissibile B, si hanno a disposizione la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$.*

Per quanto visto precedentemente, l'assunzione iii) può essere sfruttata per riscrivere il problema nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Questa forma mette in evidenza il fatto che il vettore x_B è funzione del vettore x_N infatti:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \tag{5.17}$$

Sostituendo l'espressione di x_B nella funzione obiettivo del problema 5.16 si ottiene una nuova forma equivalente del problema (5.15):

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N \\ & x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

dove in vettore γ è detto *vettore dei costi ridotti* ed è dato da:

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \in R^{n-m}.$$

Il problema 5.18 viene detto *problema in forma canonica rispetto alla base B.*

5.4.2 Criterio di ottimalità

Data una base ammissibile e, quindi, una soluzione di base ammissibile associata, il primo passo che affronta il metodo del simplesso è quello di cercare di capire se questa soluzione di base ammmissibile è una soluzione ottima del problema. A questo fine, gioca un ruolo fondamentale il seguente criterio di ottimalità.

Teorema 5.4.1 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.15.* Se *il vettore dei costi ridotti è non negativo, ovvero* se*:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è ottima *per il problema 5.15.*

Prova. Si deve dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, allora per una qualunque vettore ammissibile x risulta

$$c^T x \geq c^T \bar{x}.$$

Sia x un qualsiasi punto ammissibile del problema 5.15 si ha:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

e ricordando l'espressione (5.17) di x_B

$$c^T x = {c_B}^T B^{-1}b + \gamma^T x_N$$

D'altra parte, per ipotesi si ha $\gamma \geq 0$ e per l'ammissibilità di x è si ha $x_N \geq 0$, da cui si ottiene:

$$c^T x \geq {c_B}^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}.$$

Ma la precedente relazione mostra che la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla matrice di base B è ottima per il problema 5.15. □

Dal precedente teorema si può derivare il seguente corollario.

Corollario 5.4.2 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.15.* Se *il vettore dei costi ridotti è positivo, ovvero* se*:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B > 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è l'unica soluzione ottima *del problema 5.15.*

Prova. Ripetendo gli stessi argomenti usati nella prova del Teorema 5.4.1, si ottiene che per ogni vettore x ammissibile

$$c^T x = {c_B}^T B^{-1} b + \gamma^T x_N > {c_B}^T B^{-1} b = c^T \bar{x}, \tag{5.19}$$

dove la stretta disuguanza segue dall'ipotesi che $\gamma > 0$ e dal fatto che ogni punto ammissibile x distinto da $\bar{x}$ deve avere $x_N \geq 0_{n-m}$ e $x_N \neq 0_{n-m}$. Dalla 5.19 segue che la soluzione di base ammissibile è l'unica soluzione ottima per il problema 5.15 □

I risultati appena descritti ci consentono di formulare un *criterio sufficiente di ottimalità* per una soluzione di base ammissibile.

Esempio 5.4.3 Consideriamo il seguente problema di PL.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x & \geq & 0.
\end{array}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1, 3 e 4 ($I_B = \{1, 3, 4\}$ e $I_N = \{2, 5, 6\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1,1,1)^T, \quad c_N = (2,1,1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (10/3, 1/3, 7/3).$$

Siccome i coefficienti ridotti sono tutti positivi abbiamo identificato una soluzione ottima che è anche l'unica. Tale soluzione ottima è data da

$$x_B = B^{-1}b = (1,0,2)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1,0,0,2,0,0,)^T.$$

Esempio 5.4.4 Consideriamo di nuovo il problema dell'Esempio 5.4.3, e consideriamo la base costituita dalle colonne 1, 4 e 6 ($I_B = \{1,4,6\}$ e $I_N = \{2,3,5\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1,1,1)^T, \quad c_N = (2,1,1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-5/2, -7/2, 3/2).$$

Calcoliamo anche la soluzione di base associata.

$$x_B = B^{-1}b = (1,2,0)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1,0,0,2,0,0,)^T.$$

Come si vede la soluzione di base trovata è la stessa trovata nell' Esempio 5.4.3, ed è quindi ottima (si tratta ovviamente di una SBA degenere). Come si vede il test impiegato non è stato capace, in questo caso, di determinare il fatto che la soluzione corrente è ottima. Questo perché il criterio impiegato è solo sufficiente, ma non necessario.

Il criterio di ottimalità è una condizione necessaria di ottimo in corrispondenza di vertici non degeneri come mostra il seguente risultato.

Teorema 5.4.5 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.15. Se la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è una soluzione ottima per il problema 5.15 e se è un vertice non degenere allora:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}.$$

Prova. (La prova non fa parte del programma di esame). Se $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema 5.15, è anche una soluzione ottima del problema equivalente 5.16 Utilizzando la Proposizione 3.2.9 si ha che il punto la soluzione ottima $\bar{x}$ è un punto di Karush-Kuhn-Tucker per il problema 5.16. Quindi esistono dei moltiplicatori $\bar{\mu} \in R^m$ e $\bar{\lambda} \in R^n$ tali che, se la funzione Lagrangiana $L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è scritta nella seguente maniera:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = c_B^T x_B + c_N^T x_N + \bar{\mu}^T (x_B + B^{-1}Nx_N - B^{-1}b) - \bar{\lambda}_B^T \bar{x}_B - \bar{\lambda}_N^T \bar{x}_N,$$

le seguenti condizioni sono soddisfatte:

$$\nabla_{x_B} L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = c_B + \bar{\mu} - \bar{\lambda}_B = 0 \tag{5.20}$$
$$\nabla_{x_N} L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = c_N + (B^{-1}N)^T \bar{\mu} - \bar{\lambda}_N = 0 \tag{5.21}$$
$$\bar{\lambda}_B^T \bar{x}_B = \bar{\lambda}_B^T B^{-1} b = 0 \tag{5.22}$$
$$\bar{\lambda}_N^T \bar{x}_N = \bar{\lambda}_N^T 0 = 0 \tag{5.23}$$
$$\bar{\lambda}_B \geq 0 \tag{5.24}$$
$$\bar{\lambda}_N \geq 0. \tag{5.25}$$

Se il vertice $\bar{x}$ è non degenere si ha che

$$\bar{x}_B = B^{-1}b > 0.$$

Questa relazione, la (5.22) e la (5.24) implicano che

$$\bar{\lambda}_B = 0.$$

Quest'ultima uguaglianza e la (5.20) danno:

$$\bar{\mu} = -c_B.$$

Sostituendo questo valore per $\bar{\mu}$ nella (5.21) e tenondo conto della (5.25) so ottiniene:

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0$$

che dimostra il risultato. □

5.4.3 Criterio di illimitatezza

Se il criterio di ottimalità non è verificato il metodo del simplesso cerca di capire se il problema da risolvere sia illimitato inferiormente.

Il fallimento del criterio di ottimalità implica:

$$\{i \in \{1, \ldots, n-m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset.$$

In questa situazione si può considerare il seguente criterio sufficiente di illimitatezza (inferiore) del problema 5.15.

Teorema 5.4.6 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.15.* Se *per qualche indice $i \in \{1, \ldots, n-m\}$ abbiamo che:*

(i) $\gamma_i < 0$

(ii) *la colonna i-esima della matrice $B^{-1}N$ è tutta non positiva, cioè $(B^{-1}N)_i \leq 0_m$,*

allora il problema 5.15 è illimitato inferiormente.

Prova. La dimostrazione è costruttiva. Facciamo cioè vedere che, nelle ipotesi poste, possiamo trovare una semiretta di punti $x(\rho)$, con $\rho \geq 0$, sempre contenuta nell'insieme ammissibile e tale che il valore della funzione obiettivo $c^T x(\rho)$ diminuisca indefinitamente. Consideriamo un vettore del tipo $x(\rho)$, con $\rho \geq 0$, dato da:

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N(\rho)$$

$$x_N(\rho) = \rho e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ i-esima componente.}$$

Per definizione, il vettore $x(\rho)$ soddisfa il vincolo $Ax(\rho) = b$. Si tratta di una soluzione ammissibile se risulta anche $x_B(\rho) \geq 0$, $x_N(\rho) \geq 0$. Per valori positivi di ρ abbiamo che, ovviamente risulta $x_N(\rho) \geq 0$. D'altra parte

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N(\rho) = B^{-1}b - \rho(B^{-1}N)_i \geq 0_m,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla (ii). Quindi sono verificati i vincoli del problema (5.15). Il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è

$$c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma_i \rho.$$

Da ciò si vede, tenendo conto che $\gamma_i < 0$ per la (i), che, al crescere di ρ, la funzione obiettivo del problema (5.15) può assumere valori piccoli a piacere in punti ammissibili. □

Esempio 5.4.7 Consideriamo il problema di PL seguente.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & -x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1 e 4 ($I_B = \{1, 4\}$ e $I_N = \{2, 3\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (-1, 0)^T, \quad c_N = (-1, 0)^T, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice $B^{-1}N$ e i coefficienti ridotti

$$\begin{aligned} B^{-1}N &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-2, 1). \end{aligned}$$

Notiamo che in corrispondenza al coefficiente ridotto della prima variabile non in base (x_2), che è negativo, la prima colonna della matrice $B^{-1}N$ contiene solo elementi non positivi. Quindi possiamo concludere che il problema è illimitato inferiormente.

5.4.4 Determinazione di una nuova base ammissibile

Data una soluzione di base ammissibile

$$\bar{x} = \begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}$$

del problema 5.15, nel caso in cui i criteri di ottimalità ed illimitatezza, applicati ad $\bar{x}$, non siano soddisfatti, il metodo del simplesso cerca di determinare una nuova soluzione di base ammissibile o, almeno, una nuova base ammissibile del problema.

Nel seguito, per semplicità, le colonne matrice $B^{-1}N$ saranno indicate da $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n-m}\}$, cioè:

$$B^{-1}N = (\pi_1, \ldots, \pi_{n-m}).$$

Come già osservato se il criterio di ottimalità non è soddisfatto si ha:

$$\Big\{ i \in \{1, \ldots, n-m\} : \gamma_i < 0 \Big\} \neq \emptyset. \tag{5.26}$$

Mentre se non è soddisfatto il criterio di illimitatezza, allora per ogni indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ si ha:

$$\left\{ k \in \{1, \ldots, m\} : (\pi_h)_k > 0 \right\} \neq \emptyset. \tag{5.27}$$

Perciò in questa sezione si considererà il caso in cui sia la (5.26) sia la (5.27) sono sempre verificate.

Falliti i due criteri, il metodo del simplesso cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema 5.15, cioè un punto

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

che, per essere diverso da $\bar{x}$, *deve avere almeno una componente del vettore $\tilde{x}_N$ è diversa da zero.* Infatti, se $\tilde{x}_N = 0_{n-m}$, allora $\tilde{x}_B = B^{-1}b$ ed $\tilde{x} = \bar{x}$.

L'idea base del Metodo del Simplesso è quella di modificare *una sola componente del vettore x_N*, ad esempio l'h-esima (ricordando la definizione di x_N si ha $(x_N)_h = x_{j_{m+h}}$), portandola da zero ad un valore positivo ρ. Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) = \begin{cases} x(\rho)_B = B^{-1}b - \rho B^{-1} N e_h \\ \\ x(\rho)_N = \rho e_h \end{cases} \tag{5.28}$$

dove ρ è un numero reale non-negativo, e_h è l'h-esimo vettore unitario con $n-m$ componenti ed l'espressione del sottovettore $x(\rho)_B$ è data dalla (5.17) che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema originario.

Dopo aver definito il generico punto $x(\rho)$ rimangono da risolvere le due seguenti questioni:

- quale variabile fuori base modificare, cioè come scegliere l'indice h;
- quanto variare la variabile fuori base scelta, cioè quale valore dare allo scalare ρ.

Alle preceedenti domande risponde il seguente teorema che costituisce un'altro risultato fondamentale riguardarte le proprietà del Metodo del Simplesso. Infatti mette in evidenza il fatto che, nella la scelta dell'indice h, ovvero di quale variabile fuori base modificare, il Metodo del Simplesso fa riferimento al fatto di cercare di determinare dei nuovi punti in cui la funzione obiettivo sia diminuita (o, al peggio non sia aumentata). Mentre, riguardo alla scelta del varole di ρ, determina un valore $\bar{\rho}$ tale che il punto $x(\bar{\rho})$ sia una soluzione di base ammissibile di cui sia nota la matrice di base ammissibile associata.

Teorema 5.4.8 *Data una matrice di base ammissibile $B = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}, \ldots, a_{j_m})$ del problema 5.15. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{hk}} = \min_{\substack{i=1,\ldots,m \\ \pi_{hi}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{hi}} \right\}. \tag{5.29}$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (5.28)) è una soluzione di base ammissibile del problema 5.15 tale che

$$c^T\tilde{x} = c^T x(\bar{\rho}) \leq c^T\bar{x}.$$

Inoltre la matrice di base ammissibile $\tilde{B}$ associata a $\tilde{x}$è data da:

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \ldots, a_{j_m}). \tag{5.30}$$

Osservazione Il risultato precedente può essere interpretato: supponiamo di avere una base ammissibile B e supponiamo che non sia soddisfatto il criterio di ottimalità né quello di illimitatezza. Allora, se si considera una nuova soluzione di base corrispondente alla base $\tilde{B}$ ottenuta facendo entrare nella base B una qualunque variabile alla quale è associato un costo ridotto negativo e facendo uscire una variabile scelta secondo il criterio del rapporto minimo (5.29) indicato dal Teorema 5.4.8, questa nuova soluzione è ammissibile e ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello della soluzione di base precedente.

Osservazione Dal criterio del rapporto minimo (5.29) si deduce che $\bar{\rho} = \dfrac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k}$ è nullo se e solo se $(B^{-1}b)_k = 0$. Di conseguenza, una *condizione necessaria* per avere $\bar{\rho} = 0$ è che risulti $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i, ovvero che la soluzione $\bar{x}$ associata alla base B sia *degenere*. In tal caso si ha che la k-esima componente di $\tilde{x}_B$ e l'h-esima componente di $\tilde{x}_N$ hanno entrambe valore zero. Pertanto, il vettore $\tilde{x}$, ottenuto da $\tilde{x}$ scambiando tali componenti, coincide con $\bar{x}$, ovvero

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Si osservi inoltre che in questo caso la nuova soluzione di base ammissibile coincide con la vecchia mentre la nuova base ammissibile $\tilde{B}$ è diversa dalla vecchia base B.

A questo punto sorge naturale chiedersi se la condizione $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i, ovvero che la soluzione è degenere, è anche una *condizione sufficiente* affinché $\bar{\rho}$ sia nullo. La risposta è negativa: infatti è possibile che il valore $\bar{\rho}$ sia diverso da zero in corrispondenza ad una soluzione degenere. Dalla definizione di $\bar{\rho}$ data dalla (5.29) si deduce che tale situazione si verifica quando ad ogni componente nulla del vettore $B^{-1}b$, corrisponde una componente *non positiva* di π_h, ovvero $(\pi_h)_i \leq 0$.

Dalla precedenti osservazioni segue il seguente corollario.

Corollario 5.4.9 *Sia B una matrice di base ammissibile del problema (5.15) associata ad un vertice $\bar{x}$ non degenere. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}.$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (5.28)) è una soluzione di base ammissibile del problema (5.15) tale che:

$$c^T \tilde{x} < c^T \bar{x}.$$

5.4.5 Calcolo della nuova matrice.

(La sezione 5.4.5 non fa parte del programma di esame)

I teoremi visti nel paragrafo precedente mostrano che, data una base ammissibile B, se non è verificato il criterio sufficiente di ottimalità né quello sufficiente di illimitatezza è sempre possibile determinare una nuova base ammissibile $\widetilde{B}$, data dalla (5.30), a cui corrisponde un vertice con un valore della funzione obiettivo non superiore ripetto al valore precedente.

In linea di principio possiamo a questo punto calcolare *ex novo* $\widetilde{B}^{-1}$, e quindi $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ e $\widetilde{B}^{-1}b$ che sono le quantità necessarie per calcolare il nuovo vertice ed per effettuare i nuovi test di ottimalità e di illimitatezza.

Questa procedura non è però realizzabile in pratica se non per problemi di piccole dimensione. Infatti, per calcolare l' inversa di una matrice quadrata $m \times m$ (quale è la $\widetilde{B}$) occorre eseguire un numero di moltiplicazioni approssimativamente proporzionale a m^3, e questo numero diventa praticamente eccessivo per molti problemi che si incontrano nella pratica. Bisogna inoltre tenere conto che nel risolvere un problema di PL bisogna passare, in genere, per molte basi prima di arrivare l'ottimo; bisognerebbe cioè calcolare molte inverse per risolvere un singolo problema.

Questo può essere evitato sfruttando risultati noti nell'ambito dell'Algebra Lineare. Infatti le quantità $\widetilde{B}^{-1}$, $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ e $\widetilde{B}^{-1}b$ possono essere ottenute con semplici operazioni a partire da B^{-1}, $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$.

A questo fine si introduce la seguente matrice $m \times m$, detta *matrice di pivot* che è descritta da:

$$T = I_m + \frac{1}{\pi_{hk}} (e_k - \pi_h) e_k^T \tag{5.31}$$

oppure svolgendo i prodotti matriciali assume la forma:

$$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\pi_{h1}/\pi_{hk} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\pi_{h2}/\pi_{hk} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{hk-1}/\pi_{hk} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\pi_{hk} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{hk+1}/\pi_{hk} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{hm-1}/\pi_{hk} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{hm}/\pi_{hk} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ k - \text{esima colonna} \end{array} \tag{5.32}$$

Notiamo che la matrice T è ottenuta dalla matrice identità $m \times m$, sostituendo alla k-esima colonna, una colonna ottenibile a partire dgli elementi della h-esima colonna della matrice $B^{-1}N$. L'elemento $(\pi_h)_k$ viene detto *elemento di pivot*.

Grazie alla sua espressione, la matrice T presenta interessanti proprietà. Alcune di queste sono descritte dai seguenti teoremi.

Il primo teorema mostra che la matrice T permette di calcolare efficientemente la matrice $\widetilde{B}^{-1}$ a partire dalla matrice B^{-1}.

Teorema 5.4.10 *Sia T la matrice data dalla (5.31) o dalla (5.32). Allora si ha:*

$$\widetilde{B}^{-1} = TB^{-1} \tag{5.33}$$

Il prossimo teorema mostra che, attraverso la matrice T, si possono calcolare direttamente il vettore $\widetilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ senza utilizzare (e quindi senza costruire e memorizzare) la matrice $\widetilde{B}^{-1}$.

Teorema 5.4.11 *Sia T la matrice data dalla (5.31) o dalla (5.32). Allora si ha:*

$$\widetilde{B}^{-1}b = T(B^{-1}b) \tag{5.34}$$

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} = T(\pi_1, \ldots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \ldots, \pi_{n-m}). \tag{5.35}$$

5.4.6 Struttura dell'algoritmo

Come si è osservato, il metodo del simplesso, a partire da una soluzione di base ammissibile, iterativamente effettua le seguenti operazioni:

1. verifica se la soluzione di base ammissibile corrente è una soluzione ottima e in caso affermativo si arresta;
2. verifica se il problema è illimitato (inferiormente) e in caso affermativo si arresta;
3. se nessuna delle precedenti verifiche ha avuto esito positivo, costruisce una nuova base ammissibile.

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito ed analizzato in dettaglio questi tre elementi costitutivi del metodo del simplesso; infatti, nel paragrafo 5.4.2 è stato definito un criterio sufficiente per verificare l'ottimalità di una soluzione di base ammissibile; nel paragrafo 5.4.3 è stato definito un criterio sufficiente per verificare se un problema è illimitato inferiormente; infine, nel paragrafo 5.4.4 abbiamo esaminato come costruire una nuova base ammissibile e una nuova forma canonica. Ad ogni iterazione, se i criteri di arresto non sono verificati, il metodo genera una nuova soluzione di base ammissibile alla quale corrisponde, per come è stata costruita, una decrescita (non crescita) del valore della funzione obiettivo.

Nel seguito riportiamo uno schema algoritmico di una iterazione del metodo. Supponiamo quindi di avere un problema di Programmazione Lineare in forma standard e in forma canonica rispetto ad una base B

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Come già in precedenza, indichiamo con a_{j_i}, $i = 1, \ldots, m$ le colonne della matrice B, e con $a_{j_{m+i}}$ le colonne della matrice N, ovvero

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1} & \cdots & a_{j_m} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a_{j_{m+1}} & \cdots & a_{j_{n-m}} \end{pmatrix}.$$

Metodo del simplesso

P1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

- Calcolare il vettore $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

P2: *Verifica del criterio di ottimalità*

- se per ogni $i \in \{1, \ldots, n-m\}$, risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente $\bar{x}_B = B^{-1}b, \quad \bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima. – STOP

P3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

- se per qualche $i \in \{1, \ldots, n-m\}$, tale che $\gamma_i < 0$ risulta $\pi_i \leq 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

P4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$;
  l'h-esima variabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base.
- calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1,\ldots,m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\};$$

  la k-esima variabile in base, ovvero x_{j_k}, esce dalla base.
- costruire le matrici $\widetilde{B}$ e $\widetilde{N}$ a partire da B e N scambiando fra loro l'h-esima colonna di N, ovvero $a_{j_{m+h}}$ con la k-esima colonna di B, ovvero a_{j_k}.
- costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$ e $c_{\tilde{N}}$.

P5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base $\widetilde{B}$, ovvero $\widetilde{B}^{-1}b$ e $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base $\widetilde{B}$ ed effettuare una nuova iterazione.

5.4.7 Convergenza del metodo del simplesso

Per concludere l'analisi del metodo del simplesso, vogliamo ora mostrare che, sotto opportune ipotesi, il numero di iterazioni è finito, ovvero che, in un numero finito di iterazioni, l'algoritmo descritto nei paragrafi precedenti *converge* alla soluzione ottima del problema iniale o conclude che il problema è illimitato inferiormente. A tale scopo notiamo che, nelle ipotesi che abbiamo finora adottato (il problema lieare è ammissibile e il rango della matrice A è m) sappiamo che il numero di basi ammissibili per il problema è finito e maggiore o uguale a 1 (perchè il poliedro del problema in forma standard ammette almeno un vertice, essendo non vuoto e non contenendo rette). Il principale risultato sulla convergenza II del metodo del simplesso è il seguente.

Teorema 5.4.12 *Se nell'applicazione del metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza.*

Prova. Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione, se i criteri di arresto e di illimitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibile differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalià o quello di illimitatezza devono essere soddisfatti. □

È appena il caso di osservare che, nelle ipotesi di questo teorema, il metodo del simplesso termina una volta raggiunta la base B_t con il soddisfacimento del criterio di ottimalità o del criterio di illimitatezza. Un caso semplice (poco frequente nelle applicazioni reali) in cui si può garantire che non ci sono ripetizioni di basi è quello in cui tutte le soluzioni di base siano *non degeneri*. In questo caso infatti, il Corollario 5.4.9 ci assicura che ad ogni cambio di base corrisponde una *diminuzione* del valore della funzione obiettivo. È allora chiaro che non ci possono essere ripetizioni di base, perché questo implicherebbe che in qualche iterazione viene generata una nuova base il cui valore è *maggiore* del valore della base precedente. Questa osservazione ci permette di enunciare, senza bisogno di ulteriori dimostrazioni, il seguente corollario.

Corollario 5.4.13 *Se ogni soluzione di base ammissibile del problema (5.15) è non degenere allora, in un numero finito di passi, il metodo del simplesso converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.*

Se il problema lineare ammette SBA degeneri, è possibile che il metodo del simplesso generi una sequenza di basi ammissibili $\{B_1, \ldots, B_q\}$ $(q > 1)$ con $B_1 = B_q$. Ovviamente affinché ciò sia possibile è evidente che (visto che il valore della funzione obiettivo ad ogni cambio di fase non cresce) deve risultare che il valore della funzione obiettivo in ogni base $\{B_1, \ldots, B_q\}$ è costante. A sua volta, ciò è possibile solamente se ad ogni iterazione $\bar{\rho} = 0$. Questo vuol quindi dire che, nella situazione appena descritta, le basi $\{B_1, \ldots, B_q\}$ corrispondono tutte allo stesso vertice (degenere). In tale situazione, se usiamo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererà la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Tale situazione viene detta di *ciclaggio*, ed è illustrata dal seguente esempio, dovuto a Beale.

Esempio 5.4.14 Si consideri il problema

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & & & & \frac{3}{4}x_4 & +20x_5, & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & \\
 & x_1 & & & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 \\
 & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & & = 1 \\
 & & & & & & & x & \geq 0
\end{array}
\tag{5.36}
$$

Indicando con a_i, $i = 1, \ldots, 7$, le colonne della matrice dei vincoli di uguaglianza del problema (5.36), la base ottima di questo problema è (a_1, a_4, a_6) (si lascia al lettore la verifica del test di ottimalità). Supponiamo ora di applicare il metodo del simplesso a partire dalla base ammissibile ovvia (a_1, a_2, a_3). Si tratta ovviamente di una base degenere in quanto $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Supponiamo ora di applicare il metodo del simplesso scegliendo ad ogni iterazione l'indice h della variabile entrante per il quale il coefficiente di costo ridotto è minimo e l'indice k della varibile uscente il più piccolo tra quelli possibili (ad ogni iterazione ci sono una o due scelte possibili per k). Il lettore può verificare che con queste scelte (molto naturali, e coerenti con le scelte usate in classe per la risoluzione degli esercizi) viene generata la seguente successione di basi

$$
\begin{array}{llll}
(a_1, a_2, a_3), & (a_4, a_2, a_3), & (a_4, a_5, a_3), & \\
(a_6, a_5, a_3), & (a_6, a_7, a_3), & (a_1, a_7, a_3), & (a_1, a_2, a_3).
\end{array}
$$

Si tratta di una serie di basi degeneri tutte corrispondenti allo stesso vertice. La cosa importante da notare è che l'ultima base indicata coincide con la prima. Quindi è chiaro che (se non si cambiano i criteri di scelta di h e k) da questo punto in poi, il metodo non farà altro che ripetere indefinitivamente la stessa successione di basi senza mai raggiungere la base ottima.

Quindi, nel caso (più frequente nelle applicazioni) in cui esistano SBA degeneri, il Metodo del Simplesso, così come descritto prima, può non convergere, ovvero può produrre una sequenza infinita di basi ammissibili senza mai verificare uno dei due criteri di arresto.

Questa situazione indesiderata può essere risolta sfruttando la libertà esistente nel metodo nella scelta di h e k. È possibile definire opportune *regole anti ciclaggio* per la selezione di questi indici quando ci sia più di una variabile candidata ad entrare o uscire. Utilizzando queste regole si può garantire *in ogni caso* che il metodo del simplesso converge in un numero finito di passi. È da notare, però, che spesso queste regole non vengono applicate in pratica, perchè eccessivamente onerose e il metodo del simplesso viene applicato esattamente così come lo abbiamo descritto. La pratica mostra che i casi in cui, pur non applicando nessuna regola anti ciclaggio, l'algoritmo non converge (cicla) sono rari. Inoltre, nel momento in cui ci si rende conto di trovarsi in una di queste rare situazioni è sempre possibile applicare le regole anti ciclaggio (anche ad algoritmo già iniziato). La discussione della reale implementazione pratica del metodo del simplesso è però argomento molto complesso e non può essere qui

trattata in dettaglio. Ci limitiamo a riportare una delle più famose e semplici regole anti ciclaggio, la regola di Bland.

Regola anti ciclaggio di Bland: *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.*

Vale il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 5.4.15 *Supponiamo di applicare il metodo del simplesso con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di h e k). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi, per il Teorema 5.4.12, esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza generata dal metodo del simplesso soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Il lettore può verificare che se si applica la regola di Bland nella soluzione del problema di Beal considerato sopra, viene in effetti trovata la base ottima in un numero finito di passi.

5.4.8 Eliminazione delle ipotesi e calcolo delle prima forma canonica

(La sezione 5.4.8 non fa parte del programma di esame)

Tuttavia il precedente algoritmo può essere definito supponendo che l'Assunzione 5.4.1 sia soddisfatta e che una Base Ammissibile e la sua relativa forma canonica siano note. Queste difficoltà possono essere superate per via algoritmica e sono state proposte in letteratura varie tecniche. Un esempio è la seguente.

Si considera, coma al solito, un problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{5.37}$$

in cui si richiede la seguente assunzione.
Assunzione: *Il vettore b dei vincoli di uguaglianza del problema 5.37 è tale che:*

$$b \geq 0_m.$$

In realtà la precedente non è una vera e propria assunzione, ma piuttosto la richiesta di formulare i vincoli in maniera tale da soddisfare $b \geq 0_m$. Infatti se una componente b_i è strettamente negativa, basta cambiare il segno ad entrambi i termini dell'i-esimo vincolo per soddisfare l'ipotesi richiesta.

A partire dal problema 5.37, si definisce il seguente problema in cui si introducono m nuove variabili $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + M \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ & Ax + I_m \alpha = b \\ & x \geq 0_n, \alpha \geq 0_m \end{aligned} \tag{5.38}$$

con $M \in R$, $M > 0$ e con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$.

Questo nuovo problema di programmazione lineare soddisfa tutte le ipotesi richieste per poter applicare il precedente metodo del simplesso, infatti:

- è facile verificare che il punto $(x, \alpha) = (0, b)$, avendo ipotizzato $b \geq 0_m$, soddisfa tutti i vincoli del problema ausiliario, quindi l'insieme ammissibile del problema 5.38 è non vuoto;
- la matrice dei vincoli $(A \quad I_m)$, contenendo la matrice identità $m \times m$, soddisfa alla richiesta che rango$(A \quad I_m) = m$;
- la matrice $\hat{B} = I_m$ è una base ammissibile per il problema 5.38 (poichè $\hat{B}^{-1} b = b \geq 0_m$) e si ha che $\hat{B}^{-1} \hat{N} = \hat{N} = A$ ed $\hat{B}^{-1} b = b$.

Il problema 5.38 ha la proprietà che, se il problema iniziale 5.37 ha soluzione, esiste un valore M sufficientemente alto per cui all'ottimo le variabili artificiali α^* assumono valore zero mentre le variabili x^* coincidono con quelle ottime del problema 5.37.

Appendice A

Richiami di Algebra Lineare

A.1 Vettori

Rappresentazione di un vettore

Ogni vettore $x \in R^n$ è pensato come un vettore colonna, cioè

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza il suo trasposto x^T è il seguente vettore riga:

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix}.$$

Operazioni su vettori

Il prodotto tra uno scalare $\alpha \in R$ ed un vettore $x \in R^n$ è il vettore dato da:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

La somma tra due vettori $x, y \in R^n$ è il vettore dato da:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare tra due vettori $x, y \in R^n$ è lo scalare dato da:

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Dalla sua definizione segue la seguente proprietà:

$$x^T y = y^T x.$$

Norma di un vettore

La norma di un vettore è uno scalare che definito dalle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in R^n, \\
&\qquad \|x\| = 0 \quad \text{se e solamente se} \quad x = 0 \\
&2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\|, \quad \text{per ogni} \quad \alpha \in R \\
&3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{per ogni} \quad x, y \in R^n
\end{aligned}$$

Alcuni esempi di norma sono:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

La norma $\|\cdot\|_2$ è detta norma Euclidea e può essere scritta anche come $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. Una importante proprietà (detta equivalenza delle norme) assicura che comunque scelte due norme $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_q$ esistono due scalari $c_1, c_2 > 0$ tali che si ha

$$c_1 \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq c_2 \|x\|_q \quad \text{per ogni} \quad x, y \in R^n.$$

In particolare vangono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1, \\
&\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2, \\
&\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Disuguaglianza di Schwarz, angolo tra vettori, vettori ortogonali

Comunque scelti due vettori $x, y \in R^n$, per la norma Euclidea vale la seguente disuguaglianza di Schwarz:

$$|x^T y| \leq ||x||_2 ||y||_2, \tag{A.2}$$

dove l'uguaglianza vale se e solamente se i due vettori sono collineari (cioè $x = \alpha y$ con $\alpha \in R$).

Utilizzando la precedente disuguaglianza si può definire il coseno dell'angolo compreso tra due vettori:

$$\cos\theta = \frac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

Due vettori $x, y \in R^n$ sono detti ortogonali se:

$$x^T y = 0.$$

Indipendenza lineare e rango di insieme di vettori

Dei vettori $x_1, x_2, \ldots, x_m \in R^n$ sono linearmente indipendenti se non esistono dei scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in R$ non tutti nulli tali che:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0.$$

Il rango di un insieme di vettori è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti contenuti nel insieme.

A.2 Matrici

Rappresentazione di una matrice

Ogni matrice $A \in R^{m \times n}$ è pensata come

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix},$$

che può essere rappresentata in forma più compatta

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$$

Di conseguenza la matrice trasposta $A^T \in R^{n \times m}$ è data da:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e

$$A^T = [a_{ji}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

Data una matrice $A \in R^{m\times n}$, le sue colonne sono rappresentate vettori $a_{\cdot i} \in R^m$, $i = 1\dots, n$

$$a_{\cdot i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

per cui si ha:

$$A = \begin{pmatrix} a_{\cdot 1} & a_{\cdot 2} & \cdot & \cdot & a_{\cdot n} \end{pmatrix}.$$

Data una matrice $A \in R^{m\times n}$, le sue righe sono rappresentate vettori $a_{i\cdot} \in R^n$, $i = 1\dots, m$

$$a_{i\cdot} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \end{pmatrix},$$

da cui:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\cdot}^T \\ a_{2\cdot}^T \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m\cdot}^T \end{pmatrix}.$$

Matrici quadrate

Una matrice $A \in R^{m\times n}$ è detta quadrata se $m = n$

Matrici simmetriche

Una matrice $A \in R^{m\times n}$ è detta simmetrica se è quadrata e se soddifa la propietà $a_{ij} = a_{ji}$ per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$.

Una matrice $A \in R^{n\times n}$ simmetrica coincide con la sua trasposta cioè $A = A^T$.

Operazioni su matrici

Il prodotto tra uno scalare $\alpha \in R$ ed una matrice $A \in R^{m\times n}$ è la matrice data da:

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

La somma tra due matrici $A, B \in R^{m\times n}$ è la matrice data da:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

Date due matrici $A \in R^{m\times p}$ e $B \in R^{p\times n}$ (in cui il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda) si può definire la matrice prodotto $D \in R^{m\times n}$ data da:

$$D = AB = [d_{ij}]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \qquad \text{con} \qquad d_{ij} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} b_{hj}.$$

Come caso particolare, si può definire il vettore $y \in R^m$ che dato dal prodotto di una matrice $A \in R^{m\times n}$ ed un vettore $x \in R^n$:

$$y = Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix},$$

che può anche essere riscritto nelle seguenti maniere:

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_{\cdot i} x_i, \qquad y = \begin{pmatrix} a_{1\cdot}^T x \\ a_{2\cdot}^T x \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m\cdot}^T x \end{pmatrix}$$

Dati due vettori $y \in R^m$ e $x \in R^n$ ed una matrice $A \in R^{m\times n}$ si definisce il seguente scalare:

$$y^T A x = x^T A^T y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j.$$

Rango di una matrice

Data una matrice $A \in R^{m\times n}$ si definisce rango di A, $rango(A)$, il massimo numero di colonne e/o righe linearmente indipendenti.

Matrici invertibili

Una matrice quadrata $A \in R^{n\times n}$ è detta invertibile o non singolare se il suo determinante è diverso da zero.

Data una matrice quadrata $A \in R^{n\times n}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) la matrice A è invertibile;

ii) la matrice A^T è invertibile;

iii) per ogni vettore $x \in R^n$ tale che $x \neq 0$ si ha che $Ax \neq 0$;

iv) per ogni vettore $y \in R^n$ esiste un unico vettore $x \in R^n$ tale che $y = Ax$;

v) esiste una unica matrice $A^{-1} \in R^{n\times n}$ (detta matrice inversa di A) tale che

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I;$$

vi) le colonne di A sono linearmente indipendenti;

vii) le righe di A sono linearmente indipendenti;

Norma di matrici quadrate

La norma di una matrice $A \in R^{n\times n}$ può essere definita sia interpretando la matrice come un insieme di n^2 elementi a_{ij}, con $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$, e sia pensandola come un operatore lineare da R^n a R^n.

Nel primo caso si può definire come norma di A una norma vettoriale dei suoi elementi. Una norma di questo tipo è la seguente norma di Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Nel caso che la matrice è considerata un operatore lineare si può definire una norma indotta dalla norma associata allo spazio vettiriale R^n:

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{x\in R^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

In particolare si ha:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\le j\le n} \|a_{\cdot j}\|_1 \\
\|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\le j\le n} \|a_{i\cdot}\|_1 \\
\|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}
\end{aligned}$$

dove $\lambda_{\max}(A^T A)$ indica il massimo autovalore della matrice $A^T A$. Se A è una matrice simmetrica si ha:

$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|,$$

dove $\lambda_i(A)$, con $i = 1, \ldots, n$, sono gli autovalori di A.

Tra le precedenti norme valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F, \\
&\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1, \\
&\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty.
\end{aligned}$$

Date due matrici $A \in R^{n\times n}$ e $B \in R^{n\times n}$, sia la norma $\|\cdot\|_F$ che le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ vale la relazione:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Matrici simmetriche definite positive e semidefinite positive

Una matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ è detta essere definita positiva se per ogni $x \in R^n$ si ha

$$x^T Ax > 0.$$

Una matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ è detta essere semidefinita positiva se per ogni $x \in R^n$ si ha

$$x^T Ax \geq 0.$$

Una matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ è definita positiva se e solamente i suoi autovalori sono positivi, cioè $\lambda_{\min}(A) > 0$.

Una matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ è definita positiva se e solamente i determinanti dei suoi minori principali sono positivi.

Una matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ è semidefinita positiva se e solamente i suoi autovalori sono non negativi, cioè $\lambda_{\min}(A) \geq 0$.

Data matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ definita semidefinita positiva esiste una matrice simmetrica $A^{\frac{1}{2}} \in R^{n\times n}$ tale che

i) $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$;

ii) la matrice simmetrica $A^{\frac{1}{2}}$ è invertibile se e solamente se A è invertibile;

iii) se A è invertibile si ha $A^{-1} = A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}$.

Data matrice $A \in R^{m\times n}$ allora

i) la matrice $A^T A$ è simmetrica e semidefinita positiva;

ii) la matrice simmetrica $A^T A$ è definita positiva se e solamente se A ha rango n;

iii) se $n = m$ la matrice simmetrica $A^T A$ è definita positiva se e solamente se A è invertibile.

Minimo e massimo autovalore di una matrice simmetrica

Data una matrice simmetrica $A \in R^{n\times n}$ il suo minimo autovalore ed il suo massimo possono essere definiti come:

$$\lambda_{\min}(A) = \min \frac{x^T Ax}{x^T x}, \qquad \lambda_{\max}(A) = \max \frac{x^T Ax}{x^T x}. \tag{A.3}$$

Appendice B

Richiami di Analisi Matematica

B.1 Successioni

Limiti di successioni

Data una successione $\{x_k\}$, con $x_k \in R^n$, un vettore $\bar{x} \in R^n$ è un punto limite della successione se per ogni ε esiste un indice k_ε tale che:

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad k \geq k_\varepsilon.$$

Quando una sequenza ha un limite si usa la notazione:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$$

e la successione è detta convergere al punto $\bar{x}$.

Ogni successione ha al piú un solo limite.

Per esempio la successione

$$\{x_k\} = \left\{ \frac{1}{1+k} \right\}$$

ha come limite il punto 0.

Limiti di successioni di scalari

Ogni successione di scalari non crescente (non decrescente) e limitata inferiormente (superiormente) ha un limite.

Punti di accumulazione di successioni

Data una successione $\{x_k\}$, con $x_k \in R^n$, un vettore $\bar{x} \in R^n$ è un punto di accumulazione della successione se per ogni ε e per ogni $\bar{k}$ esiste un indice $k \geq \bar{k}$ tale che:

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon.$$

Se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione della successione $\{x_k\}$ allora esiste una sotto successione $\{x_k\}_K$ contenuta in $\{x_k\}$ che converge a $\bar{x}$ (cioè ha limite in $\bar{x}$). Sintenticamente si scrive:

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}$$

Come esempio si può osservare la successione

$$\{x_k\} = \left\{ \frac{1}{1+k} + (-1)^k \right\}$$

che ha due punti di acculazione

- il punto -1 a cui converge la sottosequenza $\{x_k\}_{K_1}$ con K_1 l'insieme degli interi dispari;
- il punto 1 a cui converge la sottosequenza $\{x_k\}_{K_2}$ con K_2 l'insieme degli interi pari.

Ogni successione limitata (cioè esiste uno scalare γ tale che $\|x_k\| \leq \gamma$) ammette un punto di accumulazione.

Se la successione $\{x_k\}$ converge a un limite $\bar{x}$ allora tutti i punti di accumulazione coincidono con il limite $\bar{x}$.

Punti di accumulazione di successioni di scalari

Data una successione $\{\alpha_k\}$, con $\alpha_k \in R$, il piú piccolo dei sui punti di accumulazione è caratterizzato dal seguente limite:

$$\liminf_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{l\geq k} \alpha_l,$$

e il piú grande dal seguente limite:

$$\limsup_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{l\geq k} \alpha_l.$$

Se la successione $\{\alpha_k\}$ non ha punti di accumulazione si ha$\{\alpha_k\}$

$$\liminf_{k\to\infty} \alpha_k = \infty.$$

Insiemi chiusi

Un insieme $\mathcal{A} \in R^n$ è chiuso se ogni punto di accunulazione di una successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{A}$ per ogni k, continua ad appartenere all'insieme $\mathcal{A}$.

Insiemi compatti

Un insieme $\mathcal{A} \in R^n$ è compatto se è chiuso e limitato.

Se un insieme $\mathcal{A} \in R^n$ è compatto allora ogni successione $\{x_k\}$ tale che $x_k \in \mathcal{A}$ per ogni k ha almeno un punto di accumulazione e tutti i suoi punti di accumulazione appartengono all'insieme $\mathcal{A}$.

B.2 Funzioni continue, vettore gradiente, matrice Hessiana

Funzioni continue

Una funzione $f : R^n \to \mathcal{R}$ è continua in $\bar{x}$ se per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in R^n$ e tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\bar{x})$$

o, equivalentemente, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon, \quad \text{per ogni} \quad x \in B(\bar{x}, \delta_\epsilon).$$

L'insieme delle funzioni continue su R^n viene indicato con $C(R^n)$.

Funzioni continuamente differenziabili

Data una funzione $f : R^n \to \mathcal{R}$ se nel punto $x \in R^n$ il seguente limite esiste

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_n) - f(x)}{\epsilon}$$

e viene detto derivata parziale di f in x rispetto alla variabile x_i ed è indicato con

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_n) - f(x)}{\epsilon}.$$

Se in un punto $x \in R^n$ esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, con $i = 1, \ldots, n$, si può definire il vettore gradiente di f in x:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

oppure il suo vettore trasposto

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Se per ogni $x \in R^n$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, esistono e sono continue, la funzione viene detta continuamente differenziabile.

L'insieme delle funzioni continuamente differenziabili su R^n viene indicato con $C^1(R^n)$.

Funzioni due volte continuamemte differenziabili

Se per ogni $x \in R^n$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, sono continuamente differenziabili, esitono e sono continui i seguenti limiti

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_j+\epsilon,\ldots,x_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\epsilon}, \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tali limiti vengono detti derivate parziali seconde di f in x rispetto alla variabile x_i ed alla variabile x_j.

Si definisce Hessiano di f, la matrice definita nella seguente maniera:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & . & . & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & . & . & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & . & . & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_4^2} \end{pmatrix}$$

Se per ogni $x \in R^n$ tutte le derivate parziali $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, sono continuamente differenziabili la funzione viene detta due volte continuamente differenziabile.

L'insieme delle funzioni due volte continuamente differenziabili su R^n viene indicato con $C^2(R^n)$.

Esempio

Data la funzione $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ si ha:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

Matrice Jacobaina

Dato una funzione vettoriale $g : R^n \to R^m$, cioè un vettore di funzioni:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ . \\ . \\ g_m x) \end{pmatrix}$$

In ogni punto $x \in R^n$ in cui il seguente limite esiste

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{g_j(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_n) - g_j(x)}{\epsilon} = \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i},$$

viene detto derivata parziale della funzione g_j in x rispetto alla variabile x_i.

In un punto $x \in R^n$ in cui esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}$, con $j = 1, \ldots, m$ e $i = 1, \ldots, n$, si può definire la matrice Jacobiana di g in x:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} \\ . \\ . \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x} \end{pmatrix},$$

oppure la sua matrice trasposta

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} & . & . & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) & \nabla g_2(x) & \cdot & \cdot & \nabla g_m(x) \end{pmatrix}.$$

Funzione lineare

Una funzione $f : R^n \to R$ è detta lineare se ha la seguente espressione:

$$f(x) = c^T x,$$

con $c \in R^T$.

Funzione affine

Una funzione $f : R^n \to R$ è detta affine se ha la seguente espressione:

$$f(x) = c^T x + \alpha,$$

con $c \in R^T$ e $\alpha \in R$.

Funzione quadratica

Una funzione $f : R^n \to R$ è detta affine se ha la seguente espressione:

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + q,$$

con $Q \in R^{n \times n}$, $c \in R^T$ e $q \in R$.

B.3 Teoremi della media

Teoremi della media del primo ordine

Teorema B.3.1 *Sia $f \in C^1(R^n)$ allora per ogni $x, y \in R^n$ esiste un $\lambda \in [0,1]$ per cui si ha:*

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x + \lambda(y-x))^T (y-x).$$

Teorema B.3.2 *Sia $f \in C^1(R^n)$ allora per ogni $x \in R^n$ e per ogni sequenza di vettori $\{y_k\}$, con $y_k \in R^n$, tale che*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = x,$$

si ha:

$$f(y_k) = f(x) + \nabla f(x)^T (y_k - x) + r_1(x, y_k),$$

con

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_1(x, y_k)}{\|y_k - x\|} = 0.$$

Teoremi della media del secondo ordine

Teorema B.3.3 *Sia $f \in C^2(R^n)$ allora per ogni $x, y \in R^n$ esiste un $\tilde{\lambda} \in [0,1]$ per cui si ha:*

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x + \tilde{\lambda}(y-x))(y-x).$$

Teorema B.3.4 *Sia $f \in C^2(R^n)$ allora per ogni $x \in R^n$ e per ogni sequenza di vettori $\{y_k\}$, con $y_k \in R^n$, tale che*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = x,$$

si ha:

$$f(y_k) = f(x) + \nabla f(x)^T (y_k - x) + \frac{1}{2}(y_k - x)^T \nabla^2 f(x)(y_k - x) + r_2(x, y_k)$$

con

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_2(x, y_k)}{\|y_k - x\|^2} = 0.$$

Teoremi della media del primo ordine per funzioni vettoriali

Teorema B.3.5 *Sia $g : R^n \to R^m$, con $g_i \in C^1(R^n)$ per $i = 1, \ldots, m$, allora per ogni $x, y \in R^n$ esistono m scalari $\lambda_i \in [0,1]$, con $i = 1, \ldots, m$, per cui si ha:*

$$g(y) = g(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x+\lambda_1(y-x))}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2(x+\lambda_2(y-x))}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial g_m(x+\lambda_m(y-x))}{\partial x} \end{pmatrix} (y-x)$$

Teorema B.3.6 *Sia* $g : R^n \to R^m$*, con* $g_i \in C^1(R^n)$ *per* $i = 1, \ldots, m$*, allora per ogni* $x, y \in R^n$ *si ha:*

$$g(y) = g(x) + \int_0^1 \frac{\partial g(x + t(y - x))}{\partial x}(y - x)dt$$

oppure

$$\|g(x) - g(x)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\frac{\partial g(x + t(y - x)}{\partial x})\| \|y - x\|$$