Rappresentazione della conoscenza

Lezione 1bis

Sistemi formali

sistemi formali

=

formalismi di rappresentazione della conoscenza

Sistemi formali

Un *sistema formale* o *logica* Λ è definito da:

- Un insieme non vuoto (finito o al più numerabile) $\mathcal{A}$ di simboli, detto *alfabeto* di Λ. Una sequenza finita di elementi di $\mathcal{A}$ è detta *espressione* di Λ.
- Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ delle espressioni di Λ chiamato l'insieme delle *formule ben formate* (o *formule)* di Λ.
- Un sottoinsieme Ax di $\mathcal{F}$, detto insieme degli *assiomi logici* o *assiomi* di Λ.
- Un insieme finito $\mathcal{R}$ di relazioni (decidibili) $R_1, \ldots, R_n$ tra formule di Λ, dette *regole di inferenza*.

Linguaggio: Le Formule

$\diamondsuit$ Insieme iniziale: gli atomi $\mathcal{A}tom$

$\diamondsuit$ Insieme finito di operatori (connettivi) unari $\star$ e binari $\circ$.

L'insieme $\mathcal{F}$ delle *formule ben formate* di una logica Λ con alfabeto $\mathcal{A}$ è l'insieme definito induttivamente come segue:

1. Se A è un elemento di $\mathcal{A}tom$ allora $A \in \mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$ e $\star$ è un operatore unario allora $(\star A) \in \mathcal{F}$;
3. Se $A, B \in \mathcal{F}$ e $\circ$ è un operatore binario allora $(A \circ B) \in \mathcal{F}$.

Principio di induzione strutturale

La definizione induttiva del linguaggio garantisce che per dimostrare che una proprietà Q vale per ogni formula A di $\mathcal{F}$ basta dimostrare:

- *Passo base*
  - Q vale per ogni formula A di $\mathcal{A}tom$;
- *Passo induttivo*
  - Se la proprietà Q vale per A allora vale per $(\star A)$, per ogni operatore unario $\star$;
  - Se la proprietà Q vale per B e C, allora vale per $(B \circ C)$, per ogni operatore binario $\circ$.

Semantica: significato delle formule

- sistema di valutazione

- assegnazione

- – funzione di interpretazione

  – strutture e modelli

Sistema di valutazione

Un sistema di valutazione $\mathcal{S}$ è una tripla $\langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O}_p \rangle$, dove:

1. $\mathcal{B}$ è un insieme detto *insieme dei valori di verità* che contiene almeno due elementi.
2. $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{B}$, detto *insieme designato a rappresentare il vero*.
3. $\mathcal{O}_p = \{\mathcal{O}_{p_\star}, \mathcal{O}_{p_\circ}\}$ è l'insieme delle funzioni che corrispondono ai costruttori del linguaggio $\{\star, \circ\}$, con $\mathcal{O}_{p_\star} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ e $\mathcal{O}_{p_\circ} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$. $\mathcal{O}_{p_\circ}$ e $\mathcal{O}_{p_\star}$ interpretano $\circ$ e $\star$.

Assegnazioni ed Interpretazioni

$\diamondsuit$ Dato un sistema di valutazione $\mathcal{S} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O}_p \rangle$ per $\mathcal{L}$, un'assegnazione $\mathcal{V}$ è una funzione:

$$\mathcal{V} : \mathcal{A}tom \rightarrow \mathcal{B}$$

Estendiamo l'assegnazione $\mathcal{V}$ a una interpretazione $I_{\mathcal{V}} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{B}$ per le formule di $\mathcal{F}$ come segue.

$\diamondsuit$ Sia $\mathcal{V}$ un'assegnazione, una *interpretazione* $I_{\mathcal{V}} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{B}$ è definita come:

- $I_{\mathcal{V}}(A) = \mathcal{V}(A)$ se $A \in \mathcal{A}tom$;
- $I_{\mathcal{V}}(\star A) = \mathcal{O}_{p_\star}(I_{\mathcal{V}}(A))$
- $I_{\mathcal{V}}(A \circ B) = \mathcal{O}_{p_\circ}(I_{\mathcal{V}}(A), I_{\mathcal{V}}(B))$

Tautologie, formule soddisfacibili, contraddittorie

$\diamondsuit$ Una formula A è una *tautologia* rispetto a un sistema di valutazione $\mathcal{S}$ sse $I_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{T}$ per ogni interpretazione $I_{\mathcal{V}}$.

$\diamondsuit$ Una formula A è *soddisfacibile* se esiste una interpretazione $I_{\mathcal{V}}$, tale che $I_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{T}$.

$\diamondsuit$ Una formula A è *insoddisfacibile* o *contraddittoria* se $I_{\mathcal{V}}(A) \notin \mathcal{T}$ per ogni $I_{\mathcal{V}}$.

Se la logica ha un operatore unario $\neg$ per denotare la negazione, avremo che la negazione $\neg A$ di una tautologia A è una formula insoddisfacibile, cioè una contraddizione.

Modelli

verità = soddisfacibilità $\models$ in una struttura $\mathcal{M}$

$\diamondsuit$ Una formula A è *soddisfacibile* sse esiste una struttura $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models A$.

$\diamondsuit$ Una formula A è *insoddisfacibile* se non esiste una struttura M tale che $\mathcal{M} \models A$.

$\diamondsuit$ Una formula A è una *tautologia* rispetto a un sistema di valutazione $\mathcal{S}$ sse $\mathcal{M} \models A$ per ogni struttura $\mathcal{M}$ (e si scrive $\models A$).

$\diamondsuit$ Dato un insieme di formule Γ una struttura $\mathcal{M}$ si dirà *modello* per Γ se tutte le formule di Γ sono modellate da $\mathcal{M}$.

Conseguenza/Implicazione Logica

$\diamondsuit$ Una formula A è *conseguenza logica* (*implicata logicamente*) di un insieme di formule Γ (*base di conoscenza*) sse ogni modello di Γ è anche modello di A.

$$\Gamma \models A$$

$\diamondsuit$ $\Gamma \not\models f$: Γ è *soddisfacibile*, cioè ha un modello

$\diamondsuit$ $\Gamma \models f$: Γ è *insoddisfacibile*, cioè non ha modelli

Nota sull'uso del termine "modello"

- ♢ la rappresentazione (aeromodello, modello economico ...)
- ♢ l'oggetto rappresentato (logica, pittura ...)

Apparato deduttivo

$\diamondsuit$ Le regole di inferenza di $\mathcal{R}$ spesso vengono scritte nella seguente forma:

$$\frac{A_1 \cdots A_n}{A} \qquad\qquad \frac{premesse}{conclusione}$$

$\diamondsuit$ Se $A \in Ax$ possiamo scrivere

$$\frac{}{A}$$

$\diamondsuit$ Una sequenza finita di formule $A_1, \cdots, A_n$ di Λ è detta una *dimostrazione* o *prova* in Λ se, per ogni i compreso tra 1 ed n, o $A_i \in Ax$, cioè è un assioma di Λ, oppure è una conseguenza diretta mediante una delle regole di $\mathcal{R}$ di alcune delle formule che la precedono nella sequenza.

Teoremi

$\diamondsuit$ Una formula A di Λ è detta un *teorema* di Λ se esiste una dimostrazione di Λ che ha A come ultima formula. Tale dimostrazione è detta *una dimostrazione di* A in Λ.

$\diamondsuit$ $\vdash A$ indica che A è un teorema di Λ.

$\diamondsuit$ $\vdash_{\Lambda} A$ indica la dipendenza dall'insieme di assiomi Λ.

$\diamondsuit$ $\vdash_{\mathcal{R}} A$ indica la dipendenza dall'insieme di regole di inferenza $\mathcal{R}$.

Dimostrazioni

Sia Γ un insieme di formule.

$\Gamma \vdash A$: indica che una formula A è una conseguenza di Γ, se esiste una sequenza di formule $A_1, \ldots, A_n$ tale che A è A_n e per ciascun i compreso tra 1 e n si ha una tra:

- $A_i \in Ax$
- $A_i \in \Gamma$
- A_i è conseguenza diretta di alcune delle formule che la precedono nella sequenza.

Tale sequenza è detta una *derivazione* o *prova di A da Γ in Λ*. Gli elementi di Γ sono detti le *premesse*, o *ipotesi*, o anche *assunzioni* di A.

Chiusura deduttiva

Sia Γ un insieme di formule.

$\diamondsuit$ La *chiusura deduttiva* di Γ, denotata con $Cn(\Gamma)$, è l'insieme di tutte le formule che sono conseguenza di Γ (cioè $Cn(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$)

$\diamondsuit$ Γ è *consistente* sse $Cn(\Gamma)$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{F}$ (cioè $Cn(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\} \subset \mathcal{F}$).

Monotonicità di una logica

La nozione di conseguenza in una logica Λ può godere di diverse proprietà:

- Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash A$ allora $\Delta \vdash A$, o anche $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$ (*monotonicità*);

Teoremi e Meta-teoremi

♢ *teorema* è una formula derivabile *nel* linguaggio.

♢ Una *proprietà del* linguaggio e delle sue formule non è quindi un teorema, ma un *meta-teorema*.

♢ La parola “dimostrazione” verrà usata con un duplice significato: una dimostrazione nella logica e una meta-dimostrazione.

Correttezza e Completezza

$\diamondsuit$ Un apparato deduttivo $\mathcal{R}$ è *corretto* se per ogni formula $A \in \mathcal{F}$,

$$\vdash_{\mathcal{R}} A \text{ implica } \models A$$

$\diamondsuit$ Un apparato deduttivo $\mathcal{R}$ è *completo* rispetto a una classe di formule $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, se per ogni formula $A \in \Gamma$,

$$\models A \text{ implica } \vdash_{\mathcal{R}} A$$

$\diamondsuit$ Teorema di completezza:

$$\vdash \ \equiv \ \models$$

Riassumendo

sintassi	semantica
$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} A$ derivabilità	$\Gamma \models A$ conseguenza logica
$\vdash_{\mathcal{R}} A$ teorema	$\models A$ validità
$Cn(\Gamma) \subset \mathcal{F}$ consistenza	$\Gamma \not\models \mathbf{f}$ soddisfacibilità
inconsistenza $Cn(\Gamma) = \mathcal{F}$	insoddisfacibilità $\Gamma \models \mathbf{f}$

Conclusioni

Logica = Linguaggio di rappresentazione della conoscenza

Scelte di progetto

1. ontologia (tempo, conoscenza, azioni, ...)
2. epistemologia (gradi di verità delle asserzioni)

Metodologia di progetto

1. sintassi
2. semantica
3. algoritmi di deduzione