ALCUNI ESERCIZI DI ANALISI E SINTESI DI SISTEMI DI CONTROLLO

per il corso di CONTROLLI AUTOMATICI – I modulo

Prof. G. Oriolo

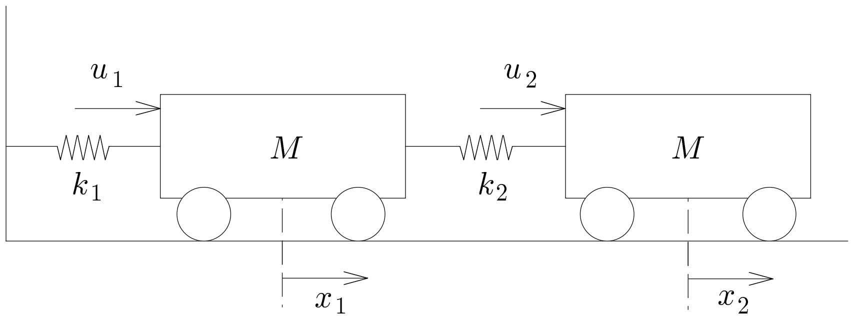
7 luglio 2000

1 Analisi dei sistemi

In questo capitolo vengono proposti vari problemi di modellistica e analisi di sistemi dinamici.

Esercizio 1.1

Si consideri il sistema meccanico in figura, costituito da due carrelli mobili e da due molle elastiche lineari.



I carrelli hanno entrambi massa M, e su di essi agiscono due forze esterne, rispettivamente u_1 e u_2. I coefficienti di elasticità delle molle valgono k_1 e k_2. Si indichino con x_1 e x_2 gli spostamenti dei carrelli rispetto alla situazione di molle indeformate, e si trascurino tutti gli attriti. Determinare il modello dinamico del sistema, fornendone una rappresentazione nello spazio di stato.

Esercizio 1.2

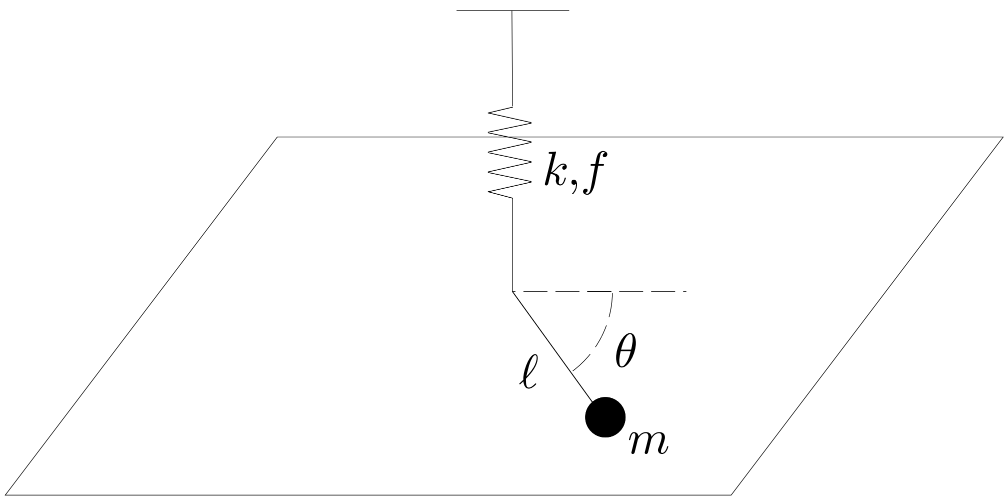
Sia dato il seguente sistema lineare stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Si studi la stabilità del sistema. Esistono stati iniziali in corrispondenza ai quali l'uscita $y(t)$ in evoluzione libera si mantiene limitata per qualsiasi istante di tempo t?

Esercizio 1.3

Si consideri il sistema meccanico illustrato in figura, costituito da una molla verticale di costante elastica torsionale k collegata ad un'asta rigida che porta una sfera di massa m alla sua estremità. Il baricentro della sfera si trova a una distanza ℓ dall'asse di rotazione.



Si assuma che la massa dell'asta sia trascurabile, e che sia presente un attrito viscoso con coefficiente $f > 0$.

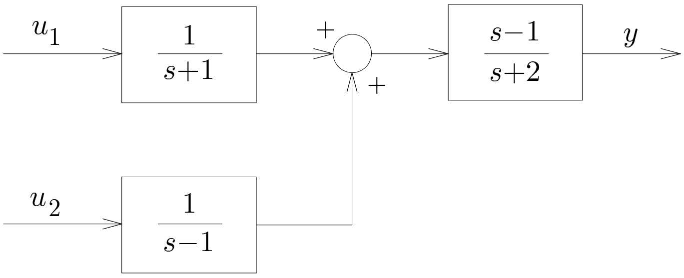
a) Prendendo come uscita del sistema la rotazione θ dell'asta rispetto alla posizione di equilibrio, si derivino le equazioni di stato del sistema.

b) Si studi la natura dei modi naturali del sistema al variare di f.

c) Posto $f = 0.01$, $k = 0.05$, $m = 2$, $l = 0.5$, si determini dopo quanto tempo l'ampiezza di oscillazione si riduce del 90% rispetto a quella iniziale, a seguito di una rotazione iniziale dell'asta di α gradi.

Esercizio 1.4

Considerato il sistema interconnesso in figura



a) calcolare la risposta forzata all'ingresso

$$u_1(t) = \delta_{-1}(t) \qquad u_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

b) calcolare la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u_1(t) = u_2(t) = \sin 2t$$

Esercizio 1.5

Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \\ y &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

determinare *tutti* gli stati iniziali $x(0)$ tali che l'uscita corrispondente sia non divergente.

Esercizio 1.6

Dato il sistema a retroreazione *positiva* unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = k\frac{s+1}{s(s-1)}$$

si studi la stabilità ad anello chiuso al variare di k mediante il criterio di Nyquist.

Esercizio 1.7

Si studi la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = k\frac{(s+1)^2}{s(s-1)(s+2)(s+3)}$$

al variare del parametro $k > 0$. In particolare, si determinino con esattezza eventuali valori critici di k.

Esercizio 1.8

Mediante il criterio di Nyquist, si studi *qualitativamente* la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = k\frac{s-z}{(s+p_1)(s-p_2)(s-p_3)} \qquad p_1 > p_2 > p_3 > z > 0$$

al variare del parametro $k > 0$, nell'ipotesi che p_1 sia sufficientemente grande.

Esercizio 1.9

Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si determinino *tutti* gli stati iniziali x_0 cui corrisponde un'uscita y limitata in evoluzione libera.

Esercizio 1.10

Mediante il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = k\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s^3} \qquad \tau_1, \tau_2 > 0$$

al variare del parametro $k > 0$. Si determinino eventuali valori critici di k usando il criterio di Routh.

Esercizio 1.11

Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_3 - u \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y &= x_1 + u \end{aligned}$$

a) calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$ e la risposta impulsiva $W(t)$;

b) determinare gli stati iniziali cui corrisponde un'uscita y limitata in evoluzione libera.

Esercizio 1.12

Mediante il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = k\frac{s-a}{s(s+a)} \qquad a > 1$$

al variare del parametro k (valori positivi e negativi). In particolare, si determinino eventuali valori critici di k.

Esercizio 1.13

Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 8x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 7x_2 + u \\ y &= 3x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$

a) si determini la corrispondente funzione di trasferimento;

b) se ne calcoli l'uscita in evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $x_0 = (2 \quad 1)^T$.

Esercizio 1.14

Mediante il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = \frac{1 - \tau s}{(1+s)^2}$$

al variare del parametro $\tau > 0$. In particolare, si determinino eventuali valori critici di τ.

Esercizio 1.15

Si dimostri che la risposta impulsiva $W(t)$ del sistema dinamico lineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

è identicamente nulla se vale la seguente relazione

$$\mathcal{R}\left(B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B \right) \in \mathcal{N}(C)$$

dove $\mathcal{R}(\cdot)$ e $\mathcal{N}(\cdot)$ indicano rispettivamente lo spazio immagine e lo spazio nullo di una matrice.

Esercizio 1.16

Si consideri il processo individuato dalla seguente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{0.5 - s}{s(0.5 + s)}$$

Utilizzando il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a controreazione unitaria avente tale processo sul ramo diretto.

Esercizio 1.17

Calcolare la risposta a regime permanente ad un ingresso a gradino per un sistema del secondo ordine caratterizzato dalla coppia di poli complessi e coniugati $p = \alpha + j$, $p^* = \alpha - j$, al variare di α.

Esercizio 1.18

Dato il sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -6x_1 - 6x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - u \\
y &= -2x_1 - 4x_2
\end{aligned}
$$

si calcoli l'uscita in evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.19

Studiare con il criterio di Nyquist la stabilità del sistema ottenuto dalla controreazione unitaria della funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{s + 100}{(s^2 + 1)(1 - s)}$$

Esercizio 1.20

Dato il sistema lineare

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx
\end{aligned}
$$

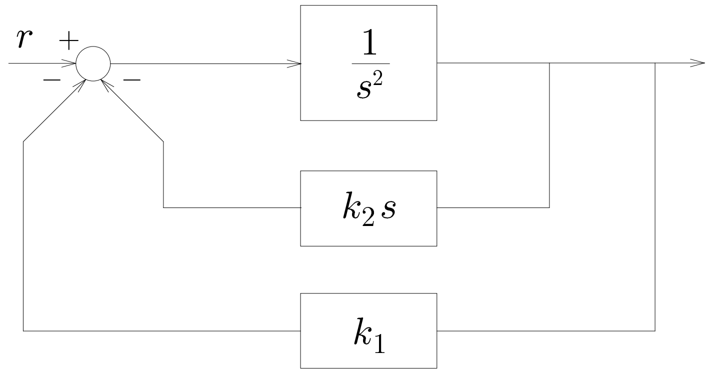
con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si studi la risposta in regime permanente all'ingresso $u(t) = (1+\cos 4t)\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 1.21

Per il sistema di controllo in figura



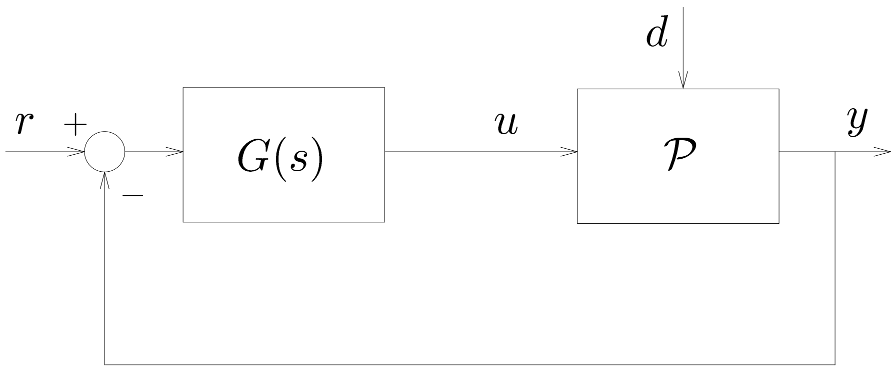
dire se le seguenti asserzioni sono vere o false: *(i)* il sistema è di tipo 2 *(ii)* l'errore a regime per un riferimento r a rampa unitaria è nullo per $k_2 = 0$ *(iii)* posto $k_2 = 1$, la più rapida risposta indiciale non oscillatoria si ottiene per $k_1 = 0.25$. Giustificare le risposte.

2 Sintesi in Frequenza

In questo capitolo vengono proposti vari problemi di sintesi di sistemi di controllo mediante l'impiego della risposta in frequenza. In particolare, le specifiche assegnate vengono soddisfatte attraverso l'uso di opportune funzioni compensatrici.

Esercizio 2.1

Si consideri il sistema di controllo in figura



in cui il processo $\mathcal{P}$ ha la seguente rappresentazione con lo spazio di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -0.5\,x + 0.1\,u + 0.1\,d \\ y &= -5.5\,x + 0.1\,u + 0.1\,d. \end{aligned}$$

Si progetti un compensatore $G(s) = K_G R(s)/s^r$ tale che $|K_G R(j\omega)| \leq 18$ dB, $\forall\omega$, e in grado di garantire le seguenti specifiche:

- risposta nulla a regime permanente per un disturbo d costante;
- massimo valore possibile di banda passante;
- margine di fase non inferiore a 30°.

Esercizio 2.2

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = 7\,\frac{as - 1}{s} \qquad 0.1 \leq a \leq 1$$

si progetti un controllore *di dimensione minima* (cioè con il minor numero possibile di poli) tale che il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo per un riferimento a rampa unitaria;
- pulsazione di attraversamento pari a $1/a$;
- margine di fase di almeno $10°$.

Al termine, tracciare il diagramma di Nyquist prima e dopo la compensazione.

Nota: L'esercizio va risolto in modo parametrico rispetto ad a. È ammissibile una modesta approssimazione nel soddisfacimento delle specifiche.

Esercizio 2.3

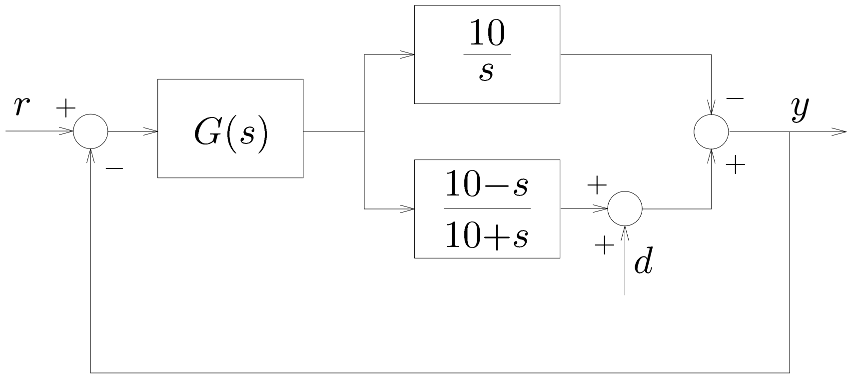
Progettare un controllore $C(s)$ in grado di stabilizzare asintoticamente il processo

$$P(s) = \frac{s+1}{s^3},$$

imponendo una banda passante di almeno 5 rad/sec ed un margine di fase di almeno $30°$, sotto il vincolo $|C(j\omega)| \leq 36$ dB per ogni valore di ω.

Esercizio 2.4

Si consideri il sistema di controllo in figura



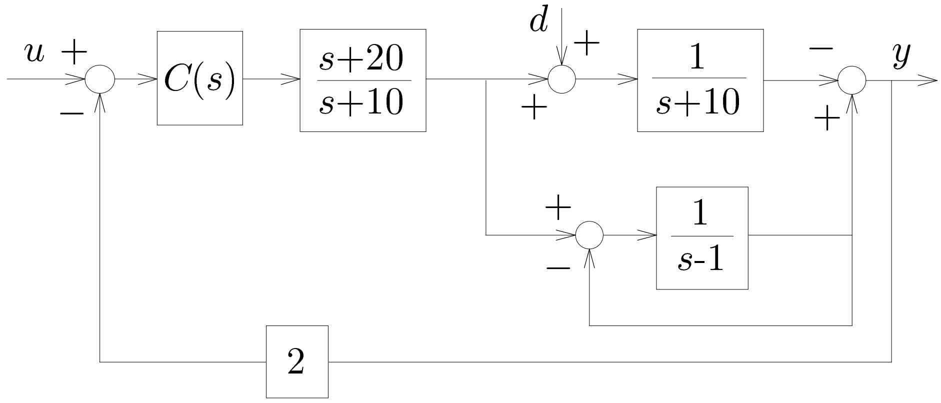
Si progetti la funzione di trasferimento $G(s)$ del controllore in modo da garantire la stabilità asintotica e soddisfare le seguenti specifiche:

- risposta a regime nulla per un disturbo d a gradino;
- errore a regime non superiore a 0.1 per un ingresso $r = t^2/2$;
- pulsazione di attraversamento all'incirca pari a 1 rad/sec;
- margine di fase non inferiore a 25°.

Al termine, tracciare il diagramma di Nyquist qualitativo della funzione di trasferimento ad anello aperto ottenuta.

Esercizio 2.5

Per il processo in figura



si progetti un controllore $C(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- astatismo;
- errore a regime permanente in risposta ad un ingresso canonico a parabola non superiore a 0.05;
- pulsazione di attraversamento $\omega_t \in [5 \div 10]$ rad/sec;
- margine di fase non inferiore a 30°;
- stabilità asintotica ad anello chiuso.

Esercizio 2.6

Per il processo

$$P(s) = \frac{40}{(s+10)(s+20)}$$

si progetti un controllore $C(s)$ in uno schema a controreazione unitaria in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- errore a regime permanente ≤ 0.2 per un'uscita desiderata $y_d = 5t$;
- tempo di salita $t_s \leq 0.2$ s nella risposta indiciale;
- banda passante $B_3 \geq 20$ rad/sec;
- margine di fase $m_\phi \geq 40°$;
- attenuazione maggiore dell'90 % dei disturbi agenti sull'uscita nella banda di frequenze $[0, 2]$ rad/sec;
- controllore di dimensione minima.

A sintesi completata, si verifichi esplicitamente il soddisfacimento della specifica sulla banda passante ad anello chiuso.

Esercizio 2.7

Si consideri un servomeccanismo composto da un motore elettrico che movimenta un braccio meccanico attraverso una trasmissione visco-elastica. Il modello dinamico di tale processo è dato dalle seguenti due equazioni differenziali lineari del secondo ordine,

$$\begin{aligned} J_\ell \ddot{\theta}_\ell + b_r(\dot{\theta}_\ell - \dot{\theta}_m) + k_r(\theta_\ell - \theta_m) &= 0 \\ J_m \ddot{\theta}_m + b_r(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_\ell) + k_r(\theta_m - \theta_\ell) &= \tau, \end{aligned}$$

in cui θ_m (θ_ℓ) è la posizione angolare del motore (braccio), J_m (J_ℓ) è l'inerzia del motore (braccio), k_r (b_r) è il coefficiente di rigidezza (viscosità) della trasmissione, e τ è la coppia fornita dal motore (ingresso di controllo). In particolare, si assumano i seguenti dati numerici:

$J_\ell = 4$ Kg m^2, $J_m = 1$ Kg m^2, $k_r = 100$ Nm/rad, $b_r = 10$ Nm/(rad/sec).

Progettare un controllore $C(s)$ a controreazione dall'uscita $y = \theta_\ell$ (posizione del braccio) in modo che la banda passante ad anello chiuso sia almeno 10 rad/sec.

Esercizio 2.8

Per il processo

$$P(s) = \frac{as+1}{s(s-1)}, \qquad 0.05 < a < 1,$$

si consideri uno schema di controllo a controreazione unitaria dall'uscita con controllore $G(s)$.

a) Studiare mediante il criterio di Nyquist la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso ottenuto con $G(s) = 1$.

b) Progettare un controllore $G(s)$ che renda asintoticamente stabile il sistema ad anello chiuso, con un errore a regime permanente minore di 0.1 nella riproduzione di un'uscita desiderata $y_d(t) = 3t$.

3 Riferimenti

I seguenti libri contengono ampie raccolte di esercizi svolti. Il primo di essi riguarda l'analisi dei sistemi dinamici, mentre il secondo illustra problemi di sintesi di controllori.

Gori Giorgi, Monaco, Battilotti, Di Gennaro, *Teoria dei Sistemi – Complementi ed Esercizi*, EUROMA – La Goliardica, Roma, 1998 (capitoli 1–4).

Lanari, Oriolo, *Controlli Automatici – Esercizi di Sintesi*, EUROMA – La Goliardica, Roma, 1997 (capitoli 1–2).