TEORIA DELLA STABILITÀ

Esercizi preparati per il corso di

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Università di Roma “La Sapienza”

Prof. G. Oriolo

26 febbraio 2006

Esercizio 1

Si determinino i punti di equilibrio con le relative proprietà di stabilità per il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= k_1(x_1^2 - 1) + u^3 \\ \dot{x}_2 &= k_2 x_2^3 - x_1 u\end{aligned}$$

dove i parametri k_1 e k_2 hanno segno concorde (entrambi positivi o negativi).

Esercizio 2

Mediante il criterio indiretto di Lyapunov, si studi la stabilità degli stati di equilibrio del sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \cos x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dot{x}_2 &= 2\cos^2 x_1 - x_2^2\end{aligned}$$

Esercizio 3

Il sistema preda-predatore è un modello che caratterizza l'interazione tra due specie animali in un ambiente naturale. Tale modello può essere descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 \left(1 - \frac{1}{k} x_1\right) - b x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + \eta b x_1 x_2\end{aligned}$$

dove x_1 e x_2 sono rispettivamente la popolazione di prede e di predatori, e i parametri a_1, a_2, η e b sono quantità positive.

Mediante il criterio indiretto di Lyapunov, si studi la stabilità degli stati di equilibrio del sistema.

Esercizio 4

Utilizzando il criterio diretto di Lyapunov, si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Qual è il corrispondente dominio di attrazione? Esistono altri punti di equilibrio?

Esercizio 5

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - (2x_2 + x_1)(1 - x_2^2)\end{aligned}$$

Si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile usando la candidata di Lyapunov $V(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$. Si stimi il corrispondente dominio di attrazione.

Esercizio 6

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1^3\end{aligned}$$

Si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile usando un'opportuna funzione di Lyapunov. Si stimi il corrispondente dominio di attrazione.

Esercizio 7

Si consideri il sistema non lineare descritto dalla seguente equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} + (x-1)^4\dot{x}^7 + x^5 = x^3 \sin^3 x$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Si determinino i punti di equilibrio con le relative proprietà di stabilità.

Esercizio 8

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mathrm{sat}(2x_1 + x_2)\end{aligned}$$

dove $\mathrm{sat}(\cdot)$ è la funzione di saturazione, definita da

$$\mathrm{sat}(y) = \begin{cases} y & |y| \le 1 \\ \mathrm{sign}(y) & |y| > 1 \end{cases}$$

Si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 9

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \sin x_1 - 2\mathrm{sat}(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Si dimostri che l'origine è l'unico punto di equilibrio del sistema, e che è asintoticamente stabile.

Esercizio 10

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1 x_2 - 1)x_1^3 + (x_1 x_2 - 1 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

1. Si dimostri che l'origine è un l'unico punto di equilibrio del sistema.
2. Usando il criterio indiretto di Lyapunov, si dimostri che l'origine è asintoticamente stabile.
3. La stabilità asintotica dell'origine è globale?

Esercizio 11

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_2^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 - x_3^3 \end{aligned}$$

Usando il metodo di Krasovskii, si studi la stabilità dell'origine per tale sistema.

Esercizio 12

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\,\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2) \\ \dot{x}_3 &= x_3\,\mathrm{sat}(x_2^2 - x_3^2) \end{aligned}$$

1. Si dimostri che l'origine è un l'unico punto di equilibrio del sistema.
2. Usando il criterio diretto di Lyapunov, si dimostri che l'origine è globalmente asintoticamente stabile.