ALCUNI ESERCIZI DI SINTESI
DI SISTEMI DI CONTROLLO

per il corso di CONTROLLI AUTOMATICI – II modulo

Prof. G. Oriolo

22 novembre 2002

1 Sintesi basata sul luogo delle radici

In questo capitolo vengono proposti vari problemi di sintesi di sistemi di controllo basati sull'uso del luogo delle radici o comunque delle funzioni di trasferimento.

Esercizio 1.1

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$$

si progetti un controllore di dimensione *minima* tale che il sistema ad anello chiuso soddisfi le seguenti specifiche:

a) errore nullo a regime permanente per ingressi a gradino;

b) stabilità asintotica.

Si tracci il luogo delle radici prima e dopo la compensazione.

Esercizio 1.2

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2(s-1)}$$

si progetti un controllore di dimensione 2 tale che il sistema ad anello chiuso soddisfi le seguenti specifiche:

a) risposta nulla a regime permanente per un disturbo costante agente sull'ingresso del processo;

b) stabilità asintotica.

Si tracci il luogo delle radici prima e dopo la compensazione.

Esercizio 1.3

Si consideri il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s-5)}$$

a) Si progetti un controllore di dimensione *minima* tale che il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile e astatico rispetto a un disturbo agente sull'ingresso del processo.

b) Si progetti un controllore *strettamente proprio* e di dimensione *minima* tale che il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile e astatico rispetto a un disturbo agente sull'ingresso del processo, e inoltre presenti un errore a regime non superiore a 0.01 in presenza di un riferimento a rampa unitaria.

Si traccino i vari luoghi delle radici di interesse.

Esercizio 1.4

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

si progetti un controllore $G(s)$ di dimensione minima e tale da garantire le seguenti specifiche:

a) risposta nulla a regime permanente per un disturbo d costante agente sull'ingresso del processo;

b) stabilità asintotica.

Si tracci il luogo delle radici prima e dopo la compensazione.

Esercizio 1.5

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+2}{s(s-2)}$$

si progetti un controllore $G(s)$ *di dimensione minima* e tale da garantire le seguenti specifiche:

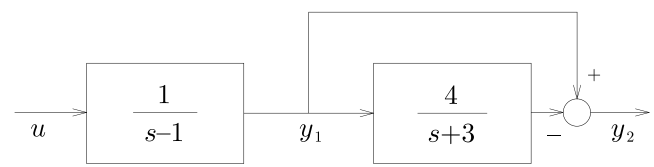
a) risposta nulla a regime permanente per un disturbo costante agente sull'ingresso del processo;

b) tutti i poli ad anello chiuso con parte reale non superiore a -1.

Durante la soluzione, si traccino i vari luoghi delle radici di interesse.

Esercizio 1.6

Si consideri il processo composito in figura.



Supponendo che entrambe le grandezze y_1 e y_2 siano misurabili, si progetti uno schema di controllo a *dimensione complessiva unitaria* in grado di garantire la stabilità asintotica ad anello chiuso e la riproduzione asintoticamente esatta di segnali di riferimento costanti.

Esercizio 1.7

Si consideri il processo descritto dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s-5}{s^2+as+5}.$$

Posto $a = 6$, si progetti uno schema di controllo a retroazione tale da soddisfare le seguenti specifiche:

a) errore a regime non superiore a 0.5 per un riferimento a rampa unitaria;

b) stabilità asintotica ad anello chiuso;

c) controllore $G(s)$ di dimensione minima.

Al termine, tenendo fisso il controllore $G(s)$ progettato, si studi la collocazione dei poli ad anello chiuso al variare del parametro a del processo (*Suggerimento*: si utilizzi opportunamente il metodo del luogo delle radici).

Esercizio 1.8

Per un processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$$

si determini un controllore di dimensione minima che garantisca stabilità asintotica ed astatismo rispetto a un disturbo sull'uscita. Si tracci il luogo delle radici prima e dopo la compensazione.

Esercizio 1.9

Per il processo avente funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+2}{s-1}$$

si determini un controllore strettamente proprio e di dimensione minima che garantisca ad anello chiuso:

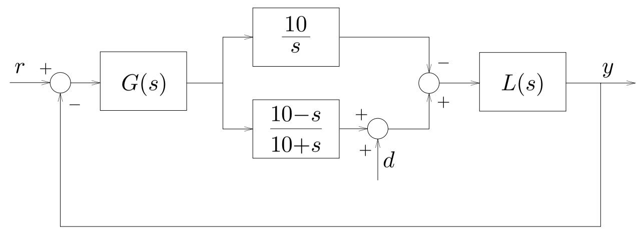
a) stabilità asintotica;

b) errore nullo a regime in presenza di un disturbo $d(t) = \sin t$ additivo sull'uscita.

Si tracci il luogo delle radici prima e dopo la compensazione.

Esercizio 1.10

Si consideri il sistema di controllo in figura



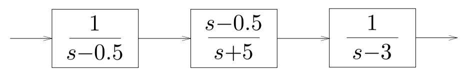
nel quale sia

$$L(s) = -\frac{1}{10+s}.$$

Si progetti un controllore di dimensione *minima* in modo da garantire stabilità asintotica ed errore a regime nullo per un ingresso a rampa. Si tracci il luogo delle radici qualitativo prima e dopo la compensazione.

Esercizio 1.11

Si consideri il processo composito in figura



Disponendo di due sensori ideali (in grado di misurare qualsiasi segnale del processo e aventi funzione di trasferimento unitaria) e di due amplificatori (a guadagno costante ma modificabile a piacere), oltre che di sommatori, si progetti uno schema di controllo in grado di stabilizzare il processo.

2 Sintesi basata sullo spazio di stato

In questo capitolo sono proposti problemi di sintesi di sistemi di controllo basati sull'uso delle rappresentazioni con lo spazio di stato.

Esercizio 2.1

Si consideri il processo descritto nello spazio di stato dalla terna di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Assumendo che lo stato del sistema sia misurabile, determinare un controllore a retroazione dallo stato tale che il sistema ad anello chiuso abbia tutti gli autovalori in -2.

b) Assumendo che la sola uscita del sistema sia misurabile, determinare mediante il principio di separazione un controllore a retroazione dall'uscita in modo tale che il sistema ad anello chiuso abbia tutti gli autovalori in -2, e ricavare la corrispondente funzione di trasferimento del controllore $G(s)$.

Esercizio 2.2

Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

in cui

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di b_2 e c_1 è possibile ricostruire lo stato del sistema osservandone l'uscita?

b) Per il caso $b_2 = c_1 = 1$, si *imposti* la costruzione di un osservatore dello stato con dinamica dell'errore di osservazione arbitraria.

Esercizio 2.3

Si consideri il processo descritto nello spazio di stato dalla terna di matrici

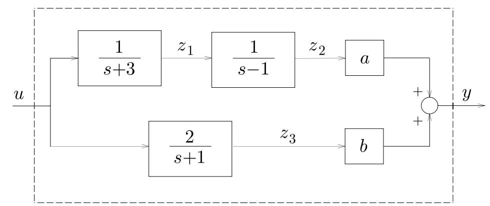
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Assumendo che lo stato del sistema sia misurabile, determinare un controllore a retroazione dallo stato tale che il sistema ad anello chiuso abbia tutti gli autovalori in -2.

b) Assumendo che la sola uscita del sistema sia misurabile, determinare un controllore a retroazione dall'uscita in modo tale che il sistema ad anello chiuso abbia tutti gli autovalori in -2, e ricavare la corrispondente funzione di trasferimento del controllore $G(s)$.

Esercizio 2.4

Per il processo in figura, nel quale a e b sono costanti, si analizzino le proprietà di raggiungibilità, osservabilità, stabilizzabilità e rilevabilità al variare di a e b.



Successivamente, si ponga $a = 1$ e $b = 0$.

a) Assumendo che i segnali interni z_1, z_2 e z_3 siano misurabili, determinare un sistema di controllo puramente istantaneo tale che ad anello chiuso tutti gli autovalori siano collocati in -1.

b) Assumendo che la sola uscita y del sistema sia misurabile, determinare un sistema di controllo di dimensione minima tale che ad anello chiuso tutti gli autovalori siano collocati in -1.

Esercizio 2.5

Si consideri il processo avente la seguente equazione di stato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (u + d)$$

in cui $x \in I\!R^2$ rappresenta lo stato, $u \in I\!R$ l'ingresso e $d \in I\!R$ un disturbo.

a) Si supponga di disporre di un sensore in grado di misurare una delle componenti dello stato (ma non entrambe). Quale di esse deve essere misurata affinché il processo sia stabilizzabile mediante una retroazione dall'uscita? Qual è la corrispondente equazione di uscita?

b) Nell'ipotesi che l'equazione di uscita sia quella determinata al punto a), si progetti uno schema di controllo a retroazione dall'uscita avente *dimensione unitaria* e tale da garantire *(i)* astatismo rispetto al disturbo d *(ii)* stabilità asintotica *(iii)* pulsazione di attraversamento pari a 1 rad/sec *(iv)* margine di fase prossimo a 45°.

c) Con riferimento al punto b), si tracci il diagramma di Nyquist prima (ma avendo già soddisfatto la specifica *(i)*) e dopo la compensazione.

Esercizio 2.6

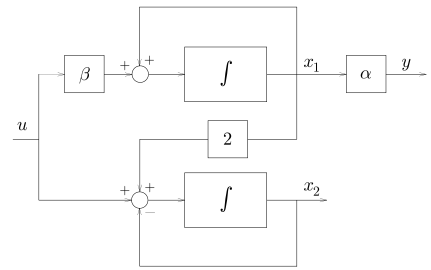
Si consideri un sistema meccanico descritto dall'equazione differenziale

$$\ddot{z} - z = u + d$$

in cui z indica una posizione, u una forza esterna manipolabile e d un disturbo costante. Prendendo z come uscita, si progetti uno schema di controllo tale che il sistema complessivo sia astatico rispetto a d e abbia autovalori $\{-1, -1 \pm j, -2, -2, -2\}$.

Esercizio 2.7

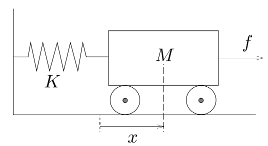
Si consideri il sistema in figura, nel quale α e β sono numeri reali.



Utilizzando i metodi basati sullo spazio di stato, si stabilisca per quali valori di α e di β è possibile costruire un controllore a retroazione dall'uscita tale che tutti gli autovalori del sistema ad anello chiuso valgano -1, e si determinino le equazioni di tale controllore. Infine, si determini la funzione di trasferimento del corrispondente compensatore dinamico.

Esercizio 2.8

Un carrello di massa $M > 0$ è vincolato a un muro da una molla di costante elastica $K > 0$; x denota lo scostamento rispetto alla posizione di riposo (molla indeformata). Sul carrello, che si muove in assenza di attrito, è possibile esercitare una forza di trazione f. Il carrello è equipaggiato con un unico sensore, in grado però di misurarne a scelta la posizione x oppure la velocità $\dot{x}$ (ma non entrambe).



a) Disponendo soltanto di un amplificatore (scalare), si costruisca uno schema di controllo che renda il sistema asintoticamente stabile. In particolare, per il caso $M = 1$, $K = 2$ si dimensioni l'amplificatore in modo da avere modi naturali con costanti di tempo $\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 1$.

b) Si costruisca un dispositivo che fornisca una stima asintoticamente esatta dello stato del sistema, in grado di funzionare anche nel caso limite $K = 0$.

In entrambi gli schemi proposti, si indichi chiaramente quale grandezza si è scelto di misurare col sensore.

3 Riferimenti

Un'ampia raccolta di esercizi con relativo svolgimento è presente in

Lanari, Oriolo, *Controlli Automatici – Esercizi di Sintesi*, EUROMA – La Goliardica, Roma, 1997 (capitoli 3–4).