CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Soluzione della prova finale di autovalutazione

8 gennaio 2003

Problema 1

La rappresentazione del sistema nello spazio di stato è

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -u \\ \dot{w} &= v + u\end{aligned}$$

cui corrisponde la coppia di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che la rappresentazione è completamente raggiungibile.

Per quanto riguarda il punto a), posto $K = (k_1 \;\; k_2)$, il polinomio caratteristico di $A + BK$ assume la forma

$$\lambda^2 + (k_1 - k_2)\lambda + k_2.$$

Di conseguenza, per avere stabilità asintotica deve essere $k_1 > k_2 > 0$.

Venendo al punto b), una semplice costruzione geometrica mostra che i poli richiesti si trovano in $-1 \pm j\sqrt{3}$. Imponendo l'identità tra il polinomio caratteristico di $A + BK$ e quello desiderato

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4,$$

si ottiene facilmente la matrice richiesta $K = (6 \;\; 4)$.

Il quesito c) richiede la costruzione di un dispositivo che ricostruisca l'intero stato $(v \;\; w)$ a partire dalla misura di u e di

$$w = C \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dinamica di tale dispositivi può essere assegnata arbitrariamente perché la rappresentazione è completamente osservabile. Poichè gli autovalori del processo controllato sono in $-1 \pm j\sqrt{3}$, l'enunciato del problema richiede in sostanza che gli autovalori della dinamica di osservazione abbiano parte reale pari a -2. Per semplicità, conviene sceglierli appunto in -2, cioè reali e coincidenti.

Le equazioni del controllore risultante sono le seguenti

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A + BK - GC)\xi + Gw \\ u &= K\xi\end{aligned}$$

con la matrice K individuata in precedenza e

$$G = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La funzione di trasferimento del corrispondente compensatore è

$$G(s) = K(sI - A - BK + GC)^{-1}G = \frac{40s + 16}{s^2 + 5s + 6}.$$

Problema 2

Dal bilanciamento delle forze che agiscono sul carrello si ha

$$M\ddot{z} = u - Kz.$$

Definendo il vettore di stato come segue

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

l'equazione di stato del sistema assume la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \ & \dot{z} \ = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ & \ddot{z} \ = -\frac{K}{M}x_1 + \frac{u}{M} \end{aligned}$$

ovvero, in forma matriciale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}.$$

La matrice C dipende da quale grandezza si decide di misurare. In particolare, si ha

$$C = C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nel caso in cui il sensore misuri la posizione $z = x_1$, e

$$C = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nel caso in cui il sensore misuri la velocità $\dot{z} = x_2$.

Si noti che la matrice A è in forma compagna; in particolare, il suo polinomio caratteristico vale $\lambda^2 + K/M$, e quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{K/M}$.

Per quanto riguarda il punto a), l'equazione di stato ad anello chiuso diviene

$$\dot{x} = Ax + B\alpha y = Ax + \alpha BCx = (A + \alpha BC)x.$$

È facile verificare che il polinomio caratteristico della matrice $(A + \alpha BC_1)$ manca sempre del termine di primo grado; di conseguenza, non esiste nessun valore di α che stabilizzi il sistema se si usa una retroazione di posizione. Al contrario, la matrice $(A + \alpha BC_2)$ ha due autovalori a parte reale negativa purché sia $\alpha < 0$; una retroazione negativa di velocità $u = -\alpha x_2 = -\alpha\dot{z}$) risolve perciò il problema di stabilizzazione (si noti che ciò corrisponde ad iniettare attrito viscoso nel sistema attraverso l'azione di controllo).

Venendo al punto b), è necessaria l'osservabilità (o almeno la rilevabilità) della coppia (A, C) per $K = 0$. Semplici calcoli indicano che ponendo $C = C_1$ il sistema è osservabile per qualsiasi valore di K, e quindi è sempre possibile costruire un osservatore dell'intero stato a partire dalla misura della posizione del carrello. Se invece si misura la velocità del carrello, si vede immediatamente che la matrice di osservabilità ha rango 1 nel caso $K = 0$. Poiché entrambi gli autovalori di A hanno parte reale nulla, si può senz'altro concludere che per $K = 0$ il sistema non è rilevabile a partire dalla misura della velocità del carrello.