CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Soluzione della prova intermedia di autovalutazione

Problema 1

La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = 1 - \frac{11}{s+10} = \frac{s-1}{s+10}$$

Le prime due specifiche richiedono rispettivamente l'introduzione in $G(s)$ di un polo nell'origine e di due poli immaginari in $\pm j$. Si ha perciò

$$G(s) = \frac{R(s)}{s(s^2+1)},$$

dove $R(s)$ va scelta in modo tale da garantire la stabilità asintotica.

Per individuare un compensatore a dimensione minima, conviene valutare dapprima la possibilità di scegliere $R(s) = K$. Tuttavia, il tracciamento del corrispondente luogo delle radici (Fig. 1) mostra immediatamente che non è possibile scegliere K in modo tale da ottenere stabilità asintotica. La stessa conclusione si ottiene applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 10s^3 + s^2 + (K+10) - K.$$

Si ottiene infatti la seguente tabella

1	1	$-K$
10	$10+K$	
$-K$	$-10K$	
$K(90-K)$		
$-10K$		

ed è impossibile scegliere K in modo da rendere positivi tutti gli elementi della prima colonna.

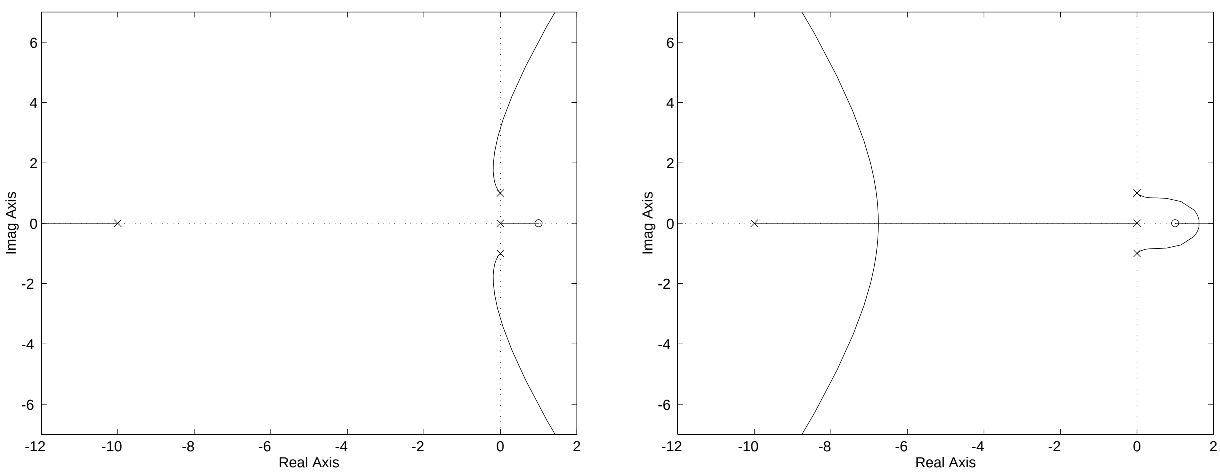

Figura 1: Luogo positivo e negativo per $R(s) = K$

Il passo successivo nella ricerca di una soluzione di dimensione minima consiste nel porre $R(s) = K(s+z)$, con $z < 0$. La scelta di uno zero a parte reale positiva appare obbligata poiché uno zero a parte reale negativa non altererebbe in modo significativo il luogo delle radici nel semipiano destro. A conferma di tale intuizione, conviene applicare il criterio di Routh al nuovo denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 10s^3 + (K+1)s^2 + (K(z-1)+10)s - Kz.$$

La tabella corrispondente è

1	$K+1$	$-Kz$
10	$K(z-1)+10$	
a	$-10Kz$	
b		
$-10Kz$		

Semplici calcoli forniscono

$$a = K(11-z) \qquad b = K\big[10(11+9z) + K(-z^2+12z-11)\big].$$

Devono perciò essere verificate contemporaneamente le condizioni

$$K(11-z) > 0 \qquad K\big[10(11+9z) + K(-z^2+12z-11)\big] > 0 \qquad Kz < 0.$$

Posto $K > 0$ e $z < 0$, la prima e la terza condizione sono sempre soddisfatte. La seconda implica

$$10(11+9z) + K(-z^2+12z-11) > 0$$

ovvero

$$K < \frac{10(11+9z)}{z^2-12z+11}, \tag{1}$$

dove si è tenuto conto del fatto che per $z < 0$ si ha certamente $z^2 - 12z + 11 > 0$. In conclusione, per avere un intervallo ammissibile di valori positivi di K si deve scegliere

$$-\frac{11}{9} < z < 0.$$

Ad esempio, una scelta possibile è $z = -0.1$, cui corrisponde un sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile per $0 < K < 8.27$. Il luogo positivo delle radici corrispondente è riportato in Fig. 2.

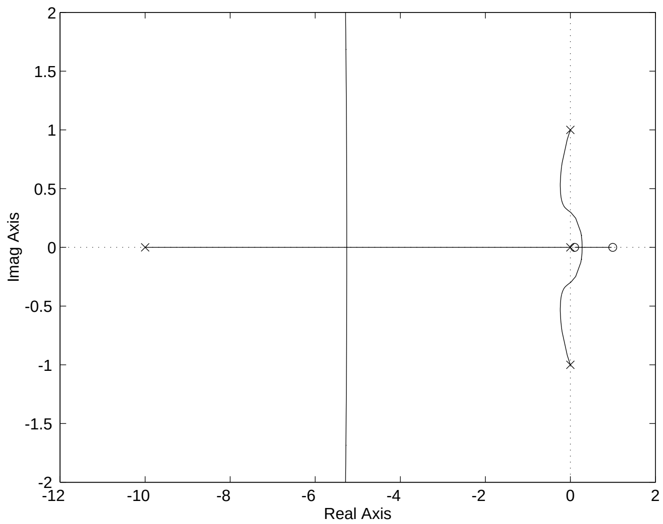

Figura 2: Luogo positivo per $R(s) = K(s-0.1)$

Soluzione alternativa È possibile procedere per assegnazione dei poli. Posto

$$G(s) = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{s(s^2+1)},$$

con a, b, c e d costanti da determinare, il polinomio caratteristico $p(s)$ ad anello chiuso è di quarto grado e risulta non monico. Imponendo ad esempio l'identità tra $p(s)$ e

$$p^*(s) = e(s+1)^4,$$

con e costante da determinare, si ottiene un sistema di 5 equazioni in 5 incognite, la cui soluzione è

$$a = \frac{3}{8} \qquad b = -\frac{33}{8} \qquad c = \frac{25}{8} \qquad d = -\frac{11}{8} \qquad e = \frac{11}{8}.$$

Il controllore risultante ha ancora dimensione 3.

Problema 2

○ (vedi risposta successiva)

● (infatti, è sempre possibile assegnare arbitrariamente i poli dell'anello chiuso con un controllore proprio di tale dimensione)

● (dal luogo delle radici per sistemi a fase minima e aventi $n - m = 1$)

● (almeno un ramo converge sullo zero a parte reale positiva)

○ (ad esempio, la funzione di trasferimento $P(s) = K \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$ dà un sistema retroazionato asintoticamente stabile per $5 < K < 6$)