LA STRUTTURA DEI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

L'ipotesi di razionalità implica che un decisore cerchi di individuare la migliore tra tutte le alternative a sua disposizione. Un agente economico cercherà di massimizzare una qualche funzione (il profitto, l'utilità , il benessere sociale) o di minimizzare qualcosa (i costi necessari per produrre un certo ammontare di output) dati certi vincoli. Definiamo questi problemi come problemi di ottimizzazione (ossia problemi relativi alla ricerca dell'alternativa migliore tra quelle disponibili).

I problemi di ottimizzazione prevedono tre elementi:

Le variabili decisionali

Queste sono le variabili di cui dobbiamo determinare il valore ottimo. E' l'agente che prende le decisioni a stabilirne il valore. Il consumatore, tra tutte le alternative a lui disponibili, desidera acquistare quel paniere di beni che gli procura la massima soddisfazione. Le variabili decisionali in questo caso sono le quantità dei beni. L'impresa desidera individuare il livello di output che genera il massimo profitto. L'output è la variabile decisionale. Il pianificatore sociale deve decidere quale è il valore di un sussidio alla produzione che max il benessere sociale.

La funzione obiettivo

Ci indica la relazione funzionale tra le variabili decisionali e certe variabili il cui valore debba essere massimizzato o minimizzato. Nel caso del consumatore la funzione obiettivo mette in relazione un indice di soddisfazione del consumatore e le quantità dei beni che egli può acquistare. Nel caso dell'impresa la funzione obiettivo mette in relazione il profitto con il livello di output. Nel caso del pianificatore sociale mette in relazione il benessere sociale con il sussidio.

Se la funzione obiettivo è $y = f(x)$ dobbiamo sviluppare una procedura per trovare il valore di x che renderà massimo o minimo il valore di y.

L'insieme ammissibile

L'insieme delle alternative disponibili per il decisore è definito insieme ammissibile o insieme delle possibilità. La presenza di vincoli (ad esempio il vincolo di bilancio per il consumatore) restringe l'insieme ammissibile a un sottoinsieme dell'intero spazio. Se il problema non possiede vincoli abbiamo un caso di ottimizzazione non vincolata e l'insieme ammissibile consiste nell'intero spazio n-dimensionale dei vettori reali.

QUINDI un problema di ottimizzazione è costituito da variabili decisionali, una funzione obiettivo e un insieme ammissibile. Il problema consiste nello scegliere l'alternativa preferita all'interno dell'insieme ammissibile. Possiamo rappresentare tutto ciò come il problema di trovare il massimo o il minimo della funzione obiettivo rispetto alle variabili decisionali, soggetto a i vincoli. Per questa ragione, l'ottimizzazione è considerata un sinonimo di massimizzazione o minimizzazione vincolata.

SOLUZIONE

Vediamo brevemente alcune definizioni:
La *soluzione* di un problema di ottimizzazione è data da quel vettore di valori delle variabili decisionali x che appartiene all'insieme ammissibile e che da' luogo al valore massimo o minimo della funzione obiettivo.

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ funzione obiettivo

x è vettore degli n elementi delle variabili decisionali
S insieme ammissibile dei vettori x

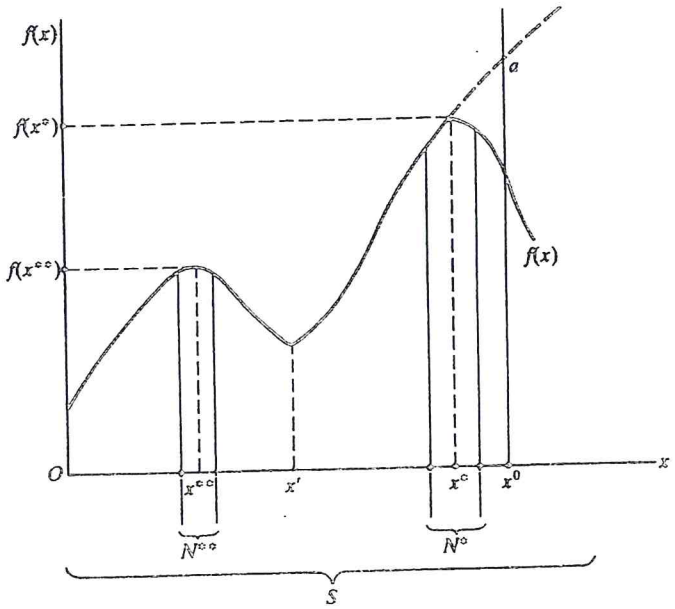
Una soluzione x^* deve avere la proprietà

$f(x^*) \geq f(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{S}, \qquad x^* \in \mathbb{S}$

in questo caso abbiamo una **soluzione globale**. La funzione obiettivo assume in quel punto un valore che non è inferiore ad alcun altro punto all'interno dell'insieme ammissibile.

Se invece abbiamo una *soluzione locale* x^{**} , varra' che:
$f(x^{**}) \geq f(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{N}^{**} \subset \mathbb{S}$

dove $\mathbb{N}^{**}$ è un insieme di punti in un intorno di x^{**}



$\mathbb{S}$ è definito dalle disuguaglianze
$x \geq 0, \quad x \leq x^0$
f(x) ha due picchi

x^* è un massimo assoluto mentre
x^{**} è un massimo locale.

I metodi di cui disponiamo ci permettono solo di individuare dei massimi locali. Vedremo quali condizioni devono essere soddisfatte perché un massimo locale sia anche un massimo globale.

Trattiamo ora alcune proprietà della funzione obiettivo e dell'insieme ammissibile, che ci saranno utili per esaminare l'esistenza e l'unicità del punto di ottimo.

Proprietà della funzione obiettivo

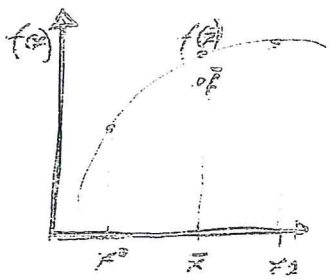
Continuità
una funzione f(x) è continua in x* se per ogni successione (x^i) che converge a x*, anche la successione $(f(x^i))$ converge a f(x*).
In sostanza non vi sono salti o interruzioni nel suo grafico.

Concavità e convessità

Se la funzione è differenziabile in ogni suo punto possiamo descrivere la curvatura in termini di derivata seconda.

Per ovviare al fatto che una funzione puo' non essere differenziabile in qualche suo punto si ricorre ad una definizione più generale.
Si definiscono funzioni concave quelle funzioni aventi la proprietà

$f(\bar{x}) \geq \bar{f}$ altezza dell'arco $\geq$ altezza della corda



dove $\bar{x} = \alpha x^0 + (1-\alpha) x^1$
$\bar{f} = \alpha f(x^0) + (1-\alpha) f(x^1)$

per $\forall \alpha \in (0,1)$. Ovvero, se tracciamo una corda della funzione, questa si trova sempre al di sotto dei (~~e coincide con i~~) valori che la funzione assume tra questi due punti.

Se vi è una disuguaglianza stretta la funzione è detta strettamente concava.

Si definiscono funzioni *convesse* quelle funzioni aventi la proprietà

$f(\bar{x}) \leq \bar{f}$

Se vi è una disuguaglianza stretta la funzione è detta strettamente convessa

Definiamo curva di livello o contorno di una funzione l' insieme dei valori del vettore x che hanno la proprietà:

$$f(x_1, x_2) = c$$

Si puo' dimostrare che la continuita' di una funzione implica la continuita' della curva di livello.

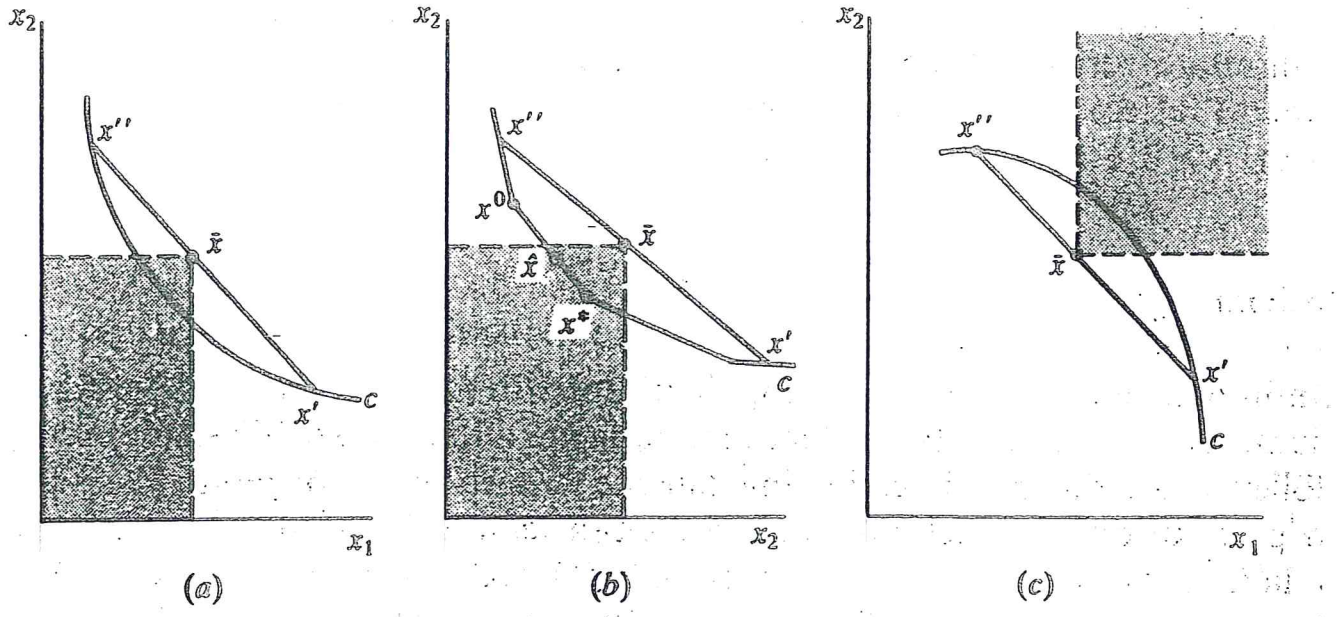
Supponendo che la funzione sia differenziabile, calcoliamo il differenziale totale

$df = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 = 0$

da cui , $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{f_1}{f_2}$

Quindi la pendenza della curva di livello in un punto puo' essere calcolata direttamente attraverso i valori delle derivate parziali della funzione in quel punto.

Possiamo analizzare la quasi concavità di una funzione esaminando la forma delle sue curve di livello



Consideriamo due vettori x' e x'' che si trovano sulla stessa curva di livello, cioe' tali che $f(x') = f(x'') = c$. Sia $\bar{x}$ una combinazione convessa di questi due punti . Una funzione le cui curve di livello soddisfino questa proprieta':

$$f(\bar{x}) \geq f(x') = f(x'') = c$$

è detta *quasi concava*. Se vale la disuguaglianza stretta, allora la funzione e' strettamente quasi concava. Viceversa (caso b) nella figura) se per un tratto la proprieta' e' soddisfatta con segno di uguaglianza la funzione non e' strettamente quasi concava. Da notare che tutte le funzioni che sono concave sono anche quasi concave ma la proposizione inversa non è vera.

Proprietà dell'insieme ammissibile

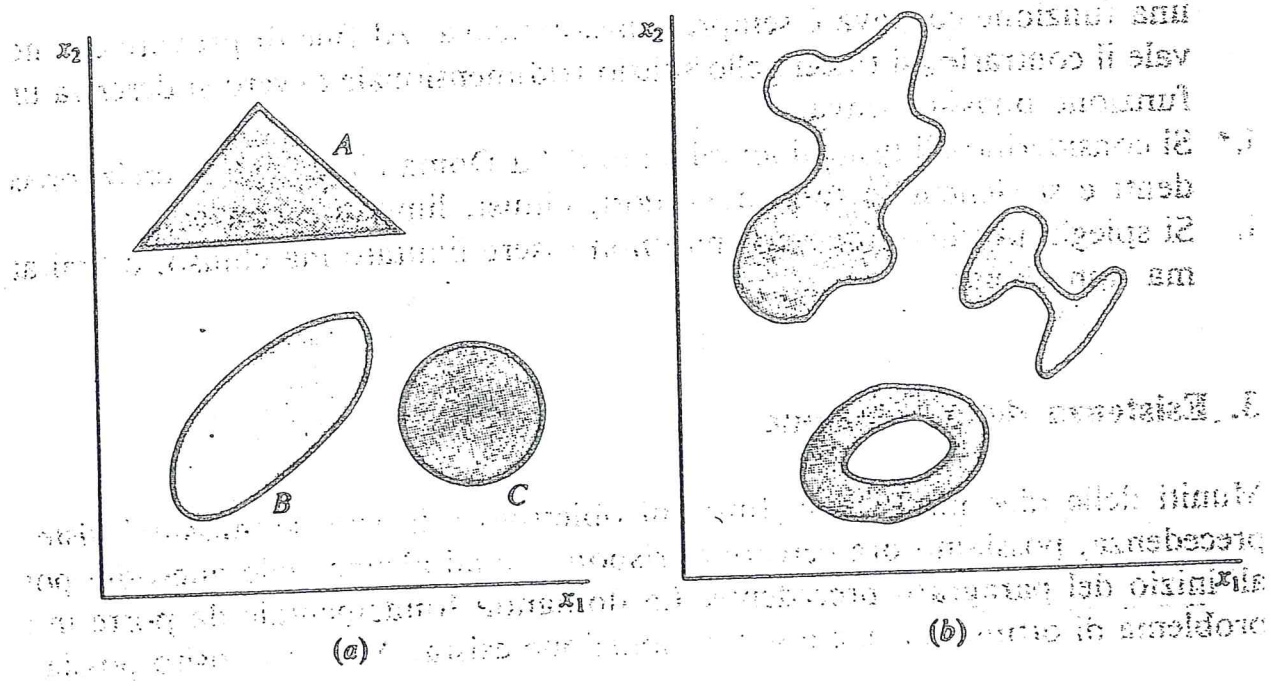
1. insieme non vuoto. (contiene almeno un elemento).

2. insieme chiuso.
Si definisca, dato un vettore $x \in R^n$ ed un numero positivo reale *e*, una PALLA APERTA di raggio *e* in x:
$B_e(x) = \{y \in R^n : |y - x| < e\}$. Un insieme di punti A e' aperto se per ogni x in A esiste un qualche
$B_e(x)$ che e' contenuta in A. Denotando il complemento di A con $R^n \backslash A$, un insieme si definisce CHIUSO se $\in R^n \backslash A$ e' aperto.
Se x appartiene all'insieme ed esiste un $e>0$ tale che $B_e(x)$ e' in A, allora x e' detto essere nell'interno di A.
Piu' semplicemente, tutti i punti della frontiera $\in \mathbb{S}$. (Es.:$0 \leq x \leq 1$)

3. insieme limitato:
Un insieme A e' limitato se esiste un qualche x in A e un qualche $e>0$ tale che A e' contenuto in $B_e(x)$. Ovvero, sarà sempre possibile includerlo in una sfera di dimensioni sufficientemente ampie. L'insieme $0<x<1$ è limitato ma non è chiuso. L'insieme $x \geq 0$ è non limitato e chiuso.
DEF: Un insieme non vuoto che sia anche chiuso e limitato e' detto COMPATTO.

4. insieme convesso.
Un insieme di punti $A \in R^n$ è convesso se
- $x \in A, y \in A \Rightarrow t\,x + (1-t)\,y \in A$ per tutti i *t* tali che $0 \leq t \leq 1$
- L'insieme A e' detto strettamente convesso se t x +(1-t) y appartiene all'interno di A per tutti i *t* tali che $0<t<1$.

In sostanza ogni coppia di punti appartenenti all'insieme può essere congiunta da una linea retta che giace interamente all'interno dell'insieme stesso. Se esistono due punti tali che la linea che li unisce coincide almeno in parte con la frontiera dell'insieme questo non è strettamente convesso.



Ottimo : Esistenza

Teorema dell' Esistenza (Weierstrass)
Un problema di ottimizzazione possiede sempre una soluzione se :

1. la funzione obiettivo è *continua* e l'insieme ammissibile è COMPATTO, ovverosia:
2. *non-vuoto*
3. *chiuso*
4. *limitato*

Si noti che 1., 3., 4., sono condizioni sufficienti ma non necessarie. In altri termini possono esistere delle soluzioni anche se tali condizioni non sono soddisfatte cosi' come possono non esistere soluzioni. La 2. è invece una condizione necessaria.

.

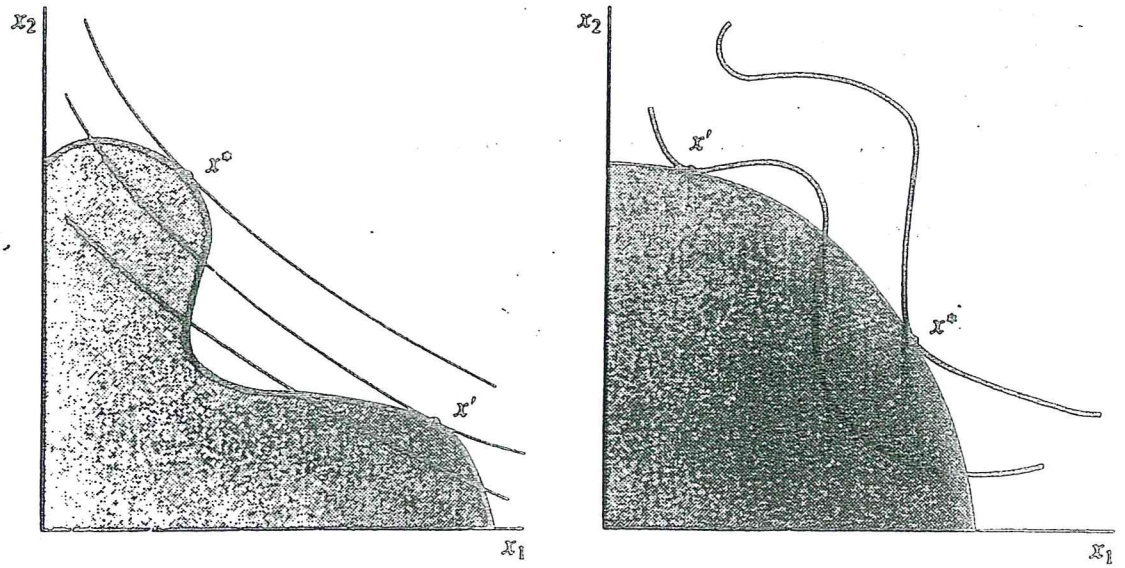
Ottimo Locale o Globale

Se queste condizioni sono soddisfatte vi sarà una soluzione al problema di ottimizzazione. Consideriamo un problema di massimizzazione vincolata

$max\ f(x_1, x_2)$ $\qquad f_1, f_2 > 0.$

$x \in S$

Ci interessa determinare in quali circostanze un massimo relativo è anche un massimo assoluto.



Consideriamo un insieme ammissibile e delle curve di livello della funzione obiettivo da massimizzare. Sia in a) che in b) abbiamo due ottimi locali uno dei quali è un ottimo globale.

In a) funzione obiettivo strettamente quasi concava
insieme ammissibile non convesso

In b) funzione obiettivo non quasi concava
insieme ammissibile convesso

Definiamo le condizioni sufficienti affinche' ogni ottimo relativo sia anche assoluto.

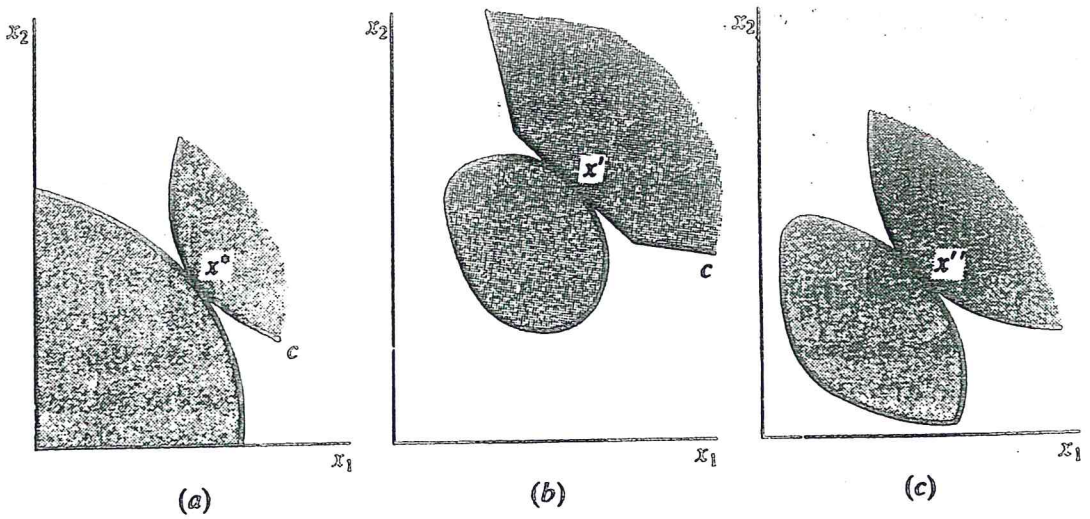
Teorema

Un massimo relativo è anche un massimo assoluto se :
1. la funzione obiettivo è *quasi concava* e
2. l'insieme ammissibile è *convesso*

Unicità della soluzione
La questione e' rilevante se un certo modello economico viene impiegato a scopo positivo o di previsione.

Se la soluzione non è unica abbiamo una corrispondenza.

Se la soluzione ottimale è unica per ogni dato insieme ammissibile (ossia per ogni dato valore dei parametri dei vincoli) possiamo esprimere i valori ottimi delle variabili decisionali come funzione del valore dei parametri dei vincoli.



Teorema dell'unicità

Dato un problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è quasi concava e l'insieme ammissibile è convesso una soluzione è unica se:

1. la funzione obiettivo è *strettamente quasi concava* oppure
2. l'insieme ammissibile è *strettamente convesso* oppure
3. l'insieme ammissibile è *strettamente convesso* e la funzione obiettivo è *strettamente quasi concava*

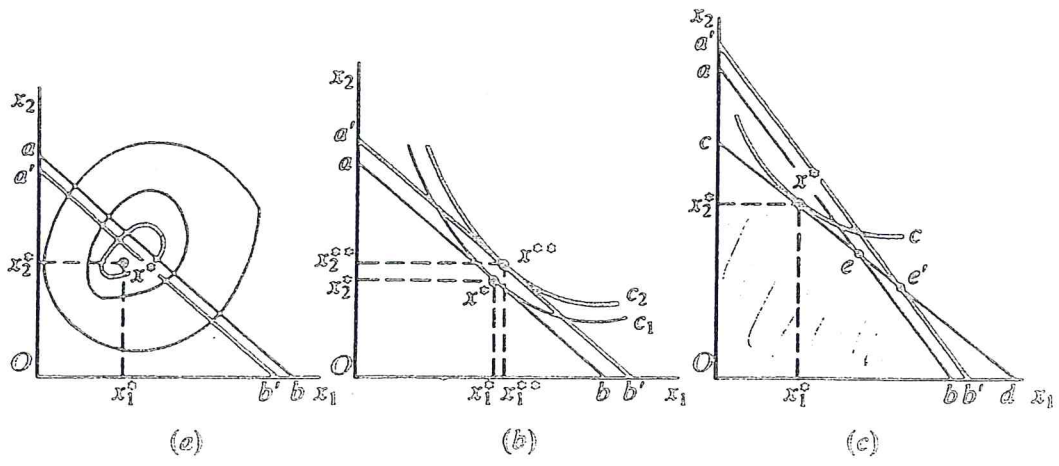
Ottimi Interni o di Frontiera

Consideriamo l'insieme ammissibile e suddividiamo idealmente, dato che l'insieme è chiuso, i suoi punti in due insiemi che si escludono a vicenda :

1. insieme dei punti interni.
2. insieme dei punti di frontiera

Un punto interno è caratterizzato dal fatto che possiamo trovare un intorno del punto che contenga solo punti dell'insieme. Un punto di frontiera ha la proprietà che tutti gli intorni vicini contengono punti che appartengono all'insieme e punti che non appartengono all'insieme.

La distinzione e' rilevante poiche' una soluzione che giaccia sulla frontiera sarà sensibile a variazioni seppur piccole in almeno un vincolo.



Se il massimo globale risiede all'interno dell'insieme ammissibile abbiamo un massimo interno. Il caso a) rappresenta un vincolo non attivo nel punto di ottimo ed un ottimo interno. Il caso b) un vincolo attivo ed un massimo di frontiera.

OTTIMO: COME SI INDIVIDUA LA SOLUZIONE

Consideriamo il caso in cui tutte le variabili siano positive nel punto di ottimo cosicché i vincoli di non negatività non sono attivi. In altre parole $x_i^* > 0 \ \forall$ i. Ipotizziamo quindi che il problema non presenti soluzioni d'angolo, in cui il valore estremo si trova al limite del campo di variazione della funzione. Non consideriamo quindi le condizioni di Kuhn-Tucker.

OTTIMIZZAZIONE IN ASSENZA DI VINCOLI

Consideriamo un problema di ottimizzazione in assenza di vincoli con una

funzione ad una sola variabile $y = f(x)$

Condizioni necessarie che devono essere soddisfatte da un punto di ottimo.

Massimo

$f(x)$ ha un massimo nel punto x^* se:

a)----condizione (necessaria) di primo ordine : $f'(x^*) = 0$

b)----condizione (sufficiente) di secondo ordine : $f''(x^*) < 0$
(ossia la funzione è concava in un intorno di x^*).

Minimo

f(x) ha un minimo nel punto x^* se:
vale a) e
b)----condizione di secondo ordine : $f''(x^*) > 0$

Funzione a due variabili: $y = f(x_1,x_2)$

Ipotizziamo che la funzione $y = f(x_1,x_2)$ sia continua e derivabile in ogni punto e non dia luogo a soluzioni d'angolo (in cui il valore estremo si trova al limite del campo di variazione della funzione).

a) --condizione del primo ordine:

$\max y = f(x_1,x_2)$ richiede $f_1(x_1,x_2) = 0$

$f_2(x_1,x_2) = 0$

Le condizioni del secondo ordine identificano se un punto stazionario è un massimo o un minimo. Esse hanno a che fare con la curvatura della superficie attorno al punto stazionario.

Consideriamo il differenziale totale di secondo ordine

$d^2y < 0$ massimo

} condizioni sufficienti

$d^2y > 0$ minimo

dove $d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$

Se le variabili sono >2: condizione necessaria

$f_1 = f_2 = \ldots\ldots = f_n = 0$

condizione sufficiente, espressa in termini dei minori principali del determinante Hessiano :

$| H_1 | < 0, | H_2 | > 0, |H_3| < 0, \ldots\ldots, (-1)^n | H_n | > 0$ massimo

$| H_1 |, | H_2 |, |H_3|, \ldots\ldots, | H_n | > 0$ minimo

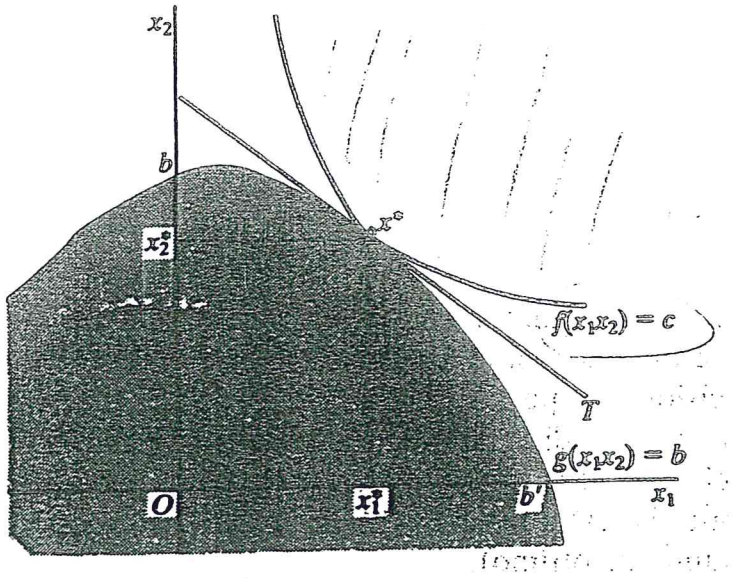
E' possibile non considerare le condizioni di secondo ordine se la funzione obiettivo ha la configurazione appropriata. Nel caso di un problema di ottimizzazione libera:

----se la funzione è strettamente concava un punto estremo è un massimo assoluto unico.
----se la funzione è strettamente convessa un punto estremo è un minimo assoluto unico.

Quindi se la condizione necessaria di primo ordine è soddisfatta la concavità (convessità) della funzione obiettivo sostituisce le condizione sufficiente di secondo ordine. Ogni punto estremo è un massimo assoluto (minimo assoluto). Se poi è strettamente concava (convessa) si tratta di un massimo (minimo) assoluto unico.

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Supponiamo di dovere trovare il massimo di una funzione obiettivo $y = f(x_1,x_2)$ nel caso in cui le variabili indipendenti non sono libere di assumere valori qualsiasi ma possono assumere solo determinati valori, ad esempio i valori che soddisfano la condizione $g(x_1,x_2) \leqq b$.



L'insieme ammissibile è l'insieme dei punti che soddisfano il vincolo $g(x_1,x_2) \leq b$. I punti sulla curva soddisfano $g(x_1,x_2) = b$. Se f_1, f_2 >0 l'ottimo si troverà sulla curva di livello più elevata raggiungibile dato l'insieme ammissibile.

x* e' l'unico ottimo assoluto (di frontiera). E' anche un punto di tangenza: in x* il curva di livello della funzione obiettivo f e la curva di livello della funzione di vincolo g hanno pendenza uguale a quella della comune tangente T.

La pendenza del curva di livello di f è:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

la pendenza del curva di livello di g è:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_1}{g_2}$$

La soluzione ottimale x^* soddisfa quindi le condizioni necessarie :

(i) $$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}$$

(ii) $$g(x_1,x_2) = b$$

Dalla (i):

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \lambda^* > 0$$

da cui : $f_1 = \lambda^* g_1$

$f_2 = \lambda^* g_2$

quindi le condizioni necessarie per un ottimo sono:

$$f_1 - \lambda^* g_1 = 0$$

$$f_2 - \lambda^* g_2 = 0$$

$$g(x_1^*, x_2^*) = b$$

Possiamo risolvere questo problema di massimizzazione vincolata trasformandolo in un problema di massimizzazione non vincolata di una funzione ausiliaria detta funzione di Lagrange o Lagrangiana:

Si costruisce la Lagrangiana

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[\, b - g(x_1, x_2)]$$

Risolvendo la massimizzazione non vincolata della Lagrangiana rispetto alle tre variabili (x_1, x_2, λ) otteniamo esattamente le condizioni necessarie viste prima.

Data la Lagrangiana

$$L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda[\, b - g(x_1,x_2)]$$

$$L_1 = f_1(x^*) - \lambda\, g_1(x^*) = 0$$
$$L_2 = f_2(x^*) - \lambda\, g_2(x^*) = 0$$
$$L_\lambda = g(x_1^*,x_2^*) - b = 0$$

si risolve poi il sistema nelle tre equazioni e nelle tre incognite x_1, x_2, e λ.

Le condizioni necessarie che derivano dall'applicazione della procedura di Lagrange sono valide solamente nel caso particolare dove tutti i vincoli risultano essere attivi nel punto di ottimo e i vincoli di non negatività non vengono considerati.

Il teorema di Lagrange (vincoli di eguaglianza) e il teorema di Kuhn-Tucker (vincoli di non negatività e di disuguaglianza) ci danno le condizioni necessarie di primo ordine per un problema di ottimizzazione vincolata.

IL SIGNIFICATO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

I moltiplicatori di Lagrange hanno una interpretazione di rilievo per le applicazioni economiche.

Date le condizioni necessarie derivanti dal problema di massimizzazione vincolata:

$$f_1(x^*) - \lambda\, g_1(x^*) = 0$$
$$f_2(x^*) - \lambda\, g_2(x^*) = 0$$
$$g(x_1^*, x_2^*) - b = 0$$

possiamo considerarle come 3 equazioni in 3 incognite, mentre b e' un parametro, ovvero possiamo scrivere:

$$x_1^* = h_1(b)$$
$$x_2^* = h_2(b)$$
$$\lambda^* = h_\lambda(b)$$

Definiamo con v* il valore che la funzione obiettivo assume nel punto di ottimo:

$$v^* = f(x_1^*, x_2^*) = f(h_1(b), h_2(b)) = v^*(b)$$

Adesso ricaviamo:

$$\frac{dv^*}{db} = f_1 \frac{dx_1^*}{db} + f_2 \frac{dx_2^*}{db}$$

Poiche' $f_1 = \lambda^* g_1$, $f_2 = \lambda^* g_2$

$$\frac{dv^*}{db} = \lambda^* \left(g_1 \frac{dx_1^*}{db} + g_2 \frac{dx_2^*}{db} \right)$$

Inoltre dalla:

$$g(x_1^*, x_2^*) - b = 0$$

calcolando il differenziale totale, si avra':

$$\frac{dg}{db} = g_1 \frac{dx_1^*}{db} + g_2 \frac{dx_2^*}{db} = 1$$

da cui:

$$dv^*/db = \lambda^*$$

Questa disuguaglianza sta a significare che λ^* costituisce la variazione marginale nel valore ottimizzato della funzione obiettivo ad una variazione infinitesima nel vincolo.
Ad es. se f(x) = utilita' del consumatore e b= reddito, λ^* rappresenta l'utilita' marginale del reddito.