Ragionamento Automatico

Esercitazione 1

I tableau

- I tableau in logica proposizionale
- Unificazione
- I tableau in logica del primo ordine

1. Logica Proposizionale

Esercizio 1.1

Dimostrare, attraverso i tableau, se

$$\{A \leftrightarrow B, A \lor B\} \vdash_T A \land B$$

$$\cfrac{A \leftrightarrow B}{\cfrac{A \lor B}{\cfrac{\neg(A \land B)}{\cfrac{A}{\neg A\star \qquad \cfrac{\neg B}{\cfrac{A}{B\star} \qquad \cfrac{\neg A}{\neg B\star}}} \qquad \cfrac{B}{\cfrac{\neg A}{\cfrac{A}{B\star} \qquad \cfrac{\neg A}{\neg B\star}} \qquad \neg B\star}}}}$$

Il tableau chiude quindi: $\{A \leftrightarrow B, A \lor B\} \vdash_T A \land B$

Esercizio 1.2

Dimostrare, attraverso i tableau, se

$$\{A \to B, B \to C\} \vdash_T A \to C$$

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \hline B \to C \\ \hline \neg(A \to C) \\ \hline \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \neg A \\ \hline \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \neg B \\ \hline A \\ \hline \neg C\star \end{array} & \begin{array}{c} C \\ \hline A \\ \hline \neg C\star \end{array} \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} B \\ \hline \begin{array}{cc} \neg B\star & \begin{array}{c} C \\ \hline A \\ \hline \neg C\star \end{array} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Il tableau chiude quindi $\{A \to B, B \to C\} \vdash_T A \to C$

Esercizio 1.3

Formalizzare in logica proposizionale le seguenti frasi:

Se parto e vado in vacanza allora sono contento;
Se parto allora vado in vacanza;
Parto;

Posso concludere che: vado in vacanza e sono contento??

$$\Gamma = \{(P \wedge V) \rightarrow C, P \rightarrow V, P\} \vdash_T (V \wedge C)$$

Esercizio 1.3 — soluzione

$\Gamma = \{(P \wedge V) \rightarrow C, P \rightarrow V, P\} \vdash_T (V \wedge C)$

- $(P \wedge V) \rightarrow C$
- $P \rightarrow V$
- P
- $\neg(V \wedge C)$
  - $\neg(P \wedge V)$
    - $\neg P \star$
    - V
      - $\neg V \star$
      - $\neg C$
        - $\neg P \star$
        - $\neg V \star$
  - C
    - $\neg P \star$
    - V
      - $\neg V \star$
      - $\neg C \star$

Il tableau chiude.

2. Unificazione

Algoritmo di unificazione di Robinson

Sia ϵ la sostituzione identica.

let $\sigma := \epsilon$;
while $t_1\sigma \neq t_2\sigma$ do
  begin
    scegli una coppia discordante $\langle d_1, d_2 \rangle$ per $t_1\sigma$, $t_2\sigma$;
    se né d_1 né d_2 sono variabili allora fallisci;
    let $x :=$ quello che tra d_1 e d_2 è una variabile
     (se lo sono entrambi, se ne scelga una);
    let $t := d_2$ se $x = d_1$; $t := d_1$, altrimenti;
    Se x occorre in t allora fallisci (occur check);
    let $\sigma' := \{t/x\}$;
    let $\sigma := \sigma \circ \sigma'$;
  end

Esercizio 2.1

Stabilire quali tra le seguenti coppie unificano, motivando la risposta:
(a,b: costanti; x,y: variabili)

- $P(a, x)$ e $P(x, a)$ ✓
- $P(a, y)$ e $P(x, a)$ ✓
- $P(a, b)$ e $P(x, y)$ ✓
- $P(a, x)$ e $P(a, y)$ ✓
- $P(a, x)$ e $P(b, y)$ X

Esercizio 2.1 — continua

- $P(f(a), x)$ e $P(f(x), y)$ ✓
- $P(f(a), x)$ e $P(f(b), y)$ ✗
- $P(f(a), x)$ e $P(g(x), y)$ ✗
- $P(f(x), x)$ e $P(x, x)$ ✗
- $P(f(x), y)$ e $P(y, y)$ ✓
- $P(f(x), y)$ e $P(y, f(x))$ ✓
- $P(f(a), x)$ e $P(y, f(b))$ ✓
- $P(f(a), y)$ e $P(y, f(b))$ ✗

Esercizio 2.2

Date le seguenti coppie di atomi, in cui a e b sono simboli di costanti, P è un simbolo di predicato, f di funzione, tutti gli altri sono simboli di variabile, dire se unificano o meno. In caso positivo scrivere qual é l'unificatore più generale (mgu), altrimenti spiegare perché.

$$\begin{array}{ll}
P(u, f(x,y), f(y,a), u) & P(v, z, v, z) \\
P(f(x,y), a, u) & P(v, z, v, z) \\
P(u, f(x,t)) & P(z,t) \\
P(u, f(b,y), f(y,a), u) & P(w, z, w, z) \\
P(u, f(b,x), f(y,a), u) & P(w, z, w, z)
\end{array}$$

Esercizio 2.1 — soluzione

- $P(u, f(x, y), f(y, a), u)$ e $P(v, z, v, z)$ unificano:

  $\{u \leftarrow v \leftarrow f(y, a); z \leftarrow f(x, y); x \leftarrow y; y \leftarrow a\}$.

- $P(f(x, y), a, u)$ e $P(v, z, v, z)$ non unificano(aritá diversa).

- $P(u, f(x, t))$ e $P(z, t)$ non unificano(occur check).

- $P(u, f(b, y), f(y, a), u)$ e $P(w, z, w, z)$ non unificano(costanti differenti).

- $P(u, f(b, x), f(y, a), u)$ e $P(w, z, w, z)$ unificano:

  $\{u \leftarrow w \leftarrow f(y, a); z \leftarrow f(b, x); y \leftarrow b; x \leftarrow a\}$.

Esercizio 2.3

- $f(g(v), h(u, v))$ e $f(g(w), h(w, j(x, y)))$ ✓
- $f(g(v), h(u, v))$ e $f(g(w), h(w, j(x, u)))$ ✗
- $f(x, f(u, x))$ e $f(f(y, a), f(z, f(b, z)))$ ✓
- $f(h(x_1, x_2, x_3), h(x_6, x_7, x_8), x_3, x_6)$ e

  $f(h(g(x_4, x_5), x_1, x_2), h(x_7, x_8, x_6), g(x_5, a), x_5))$ ✓
- $f(x_1, g(x_2, x_3), x_2, b)$ e $f(g(h(a, x_5), x_2), x_1, h(a, x_4), x_4)$ ✓
- $j(f(x, g(x, y)), h(z, y))$ e $j(z, h(f(u, v), f(a, b)))$ ✓

Esercizio 2.4 (per casa)

Verificare se le seguenti coppie unificano (mostrando l'mgu), altrimenti spiegare perché:

- $grande(x)$ e $grande(macchina - di(john))$
- $avvocato(john)$ e $grande(macchina - di(john))$
- $avvocato(padre - di(john))$ e $avvocato(padre - di(x))$
- $avvocato(padre - di(john))$ e $avvocato(x)$
- $avvocato(padre - di(x))$ e $avvocato(john)$
- $avvocato(padre - di(x))$ e $avvocato(x)$

3. Logica del Primo Ordine

Esercizio 1

Verificare che $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \forall x Q(x))$ è un teorema.

$$
\begin{array}{c}
\forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
\hline
\neg(\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \\
\hline
\neg P(v_1) \\
\hline
\neg Q(c) \\
\hline
P(v_2) \vee Q(v_2) \\
\hline
\begin{array}{c|c}
P(v_2) & Q(v_2) \\
\star\sigma = \langle v_1, v_2 \rangle & \star\sigma = \langle v_2, c \rangle
\end{array}
\end{array}
$$

Esercizio 2

Verificare che $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$ è un teorema.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x \forall y P(x,y)}{\neg \forall y \exists x P(x,y)}}{P(c_1, v_1)}}{\neg P(v_2, c_2)}}{\star \sigma = \{\langle v_1, c_2\rangle, \langle v_2, c_1\rangle\}}$$

Esercizio 3

Verificare che $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$ invece non è un teorema.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x \forall y P(x,y)}{\neg \forall x \exists y P(x,y)}}{P(c_1, v_1)}}{\neg P(c_2, v_2)}$$

Esercizio 4

Verificare che $\exists x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \land \forall x Q(x)$ non è un teorema

$$
\begin{array}{c}
\exists x P(x) \land \forall x Q(x) \\
\hline
\neg \exists x (P(x) \land Q(x)) \\
\hline
P(c_1) \\
\hline
Q(v_1) \\
\hline
\begin{array}{ccc}
\neg P(v_2) & \mid & \neg Q(v_2) \\
\star & & \star
\end{array}
\end{array}
$$

chiude per $v_1 = v_2 = c_1$

Esercizio 4 — continua

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x(P(x) \wedge Q(x))}{\neg(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))}}{P(c_1)}}{Q(c_1)}}{\neg P(v_1) \quad | \quad \neg Q(c_2)}$$

non chiude

Esercizio 5

Verificare che $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ non è un teorema

$$
\begin{array}{c}
\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \\
\hline
\neg(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \\
\hline
P(c_1) \\
\hline
Q(c_1) \\
\hline
\neg P(v_1) \quad | \quad \neg Q(v_2) \\
\star \qquad\qquad\qquad \star
\end{array}
$$

chiude per $v_1 = v_2 = c_1$

Esercizio 5 — continua

$$\dfrac{\dfrac{\exists x P(x) \land \exists x Q(x)}{\neg \exists x (P(x) \land Q(x))}}{\dfrac{\dfrac{P(c_1)}{Q(c_2)}}{\neg P(v_1) \quad | \quad \neg Q(v_1)}}$$

non chiude

Esercizi

Verificare, utilizzando i tableau, quali dei seguenti enunciati è valido:

1. $\forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x)$
2. $\forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x) \rightarrow \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x))$
3. $\forall x \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\ P(x,y)$
4. $\exists x \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\ P(x,y)$
5. $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$
6. $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \forall y Q(y)$
7. $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$
8. $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \forall y Q(y)$

Ancora esercizi

1. $(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \exists y \neg P(x,y)) \rightarrow (\exists x \forall y (P(x,y) \vee \exists z \neg P(x,z)))$

2. $(\forall x \exists y \forall z (P(x,z) \wedge Q(y,z)\ ) \rightarrow \exists y R(y)\ ) \rightarrow$
$(\ (\exists x P(x,x) \rightarrow \exists z R(z)) \vee (\exists z Q(z,z) \rightarrow \exists y R(y))\ )$

3. $(\forall x \exists y \forall z (P(x,z) \wedge Q(y,z)\ ) \rightarrow \exists y R(y)\ ) \rightarrow (\ (\exists xy\ P(x,y) \rightarrow$
$\exists z R(z)) \vee (\exists zw\ Q(z,w) \rightarrow \exists y R(y))\ )$