Ragionamento Automatico
Deduzione Naturale

Lezione 4

La deduzione naturale

Materiale cartaceo distribuito in aula

- ♢ La deduzione naturale nella logica proposizionale
- ♢ La deduzione naturale nella logica predicativa

Riepilogo Tableau

- ♢ Metodo basato sulla refutazione
- ♢ Metodo corretto e completo per la logica del primo ordine
- ♢ Non termina a causa della riapplicabilità della regola γ

Confronto Tableau Risoluzione

- ♢ Entrambi: Metodi basati sulla refutazione
- ♢ Risoluzione lavora su forma normale CNF; Tableau no
- ♢ Entrambi adatti alla meccanizzazione
- ♢ Tableau "globale", "goal oriented", "backward"
- ♢ Risoluzione "locale", "forward"
- ♢ Entrambi devono essere "raffinati" per essere efficienti

Altri sistemi deduttivi

- *Sistema Hilbertiano* Metodo diretto.
  Assiomi e Modus Ponens.
  Non adatto né per uomini né per macchine.
- *Deduzione Naturale* Metodo diretto.
  Molto intuitiva per uomini, ma non facile da usare.
  Non meccanizzabile se non per sistemi interattivi.
- *Calcolo dei sequenti* Un misto tra ded. naturale e tableau.
  Internalizza le assunzioni nella struttura dati.
  Può essere usata nelle due direzioni.
- *Davis/Putnam/Loveland/Logeman*
  Un buon metodo per testare la soddisfacilbilità proposizionale.
- *BDD*
  Un modo efficiente di rappresentare funzioni booleane.

Deduzione Naturale

- introdotta da Gentzen nel 1934
  ma soprattutto da Prawitz in un lavoro del 1965

Si basa su:
- Regole di introduzione e di eliminazione di connettivi
- Regole elementari e condizionali

Regole di inferenza "elementari"

$$(\wedge i)\ \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad (\wedge e_1)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge e_2)\ \frac{A \wedge B}{B}$$

$$(\vee i_1)\ \frac{A}{A \vee B} \qquad (\vee i_2)\ \frac{B}{A \vee B}$$

$$(\rightarrow e)\ \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \qquad (\neg e)\ \frac{A \quad \neg A}{\bot} \qquad (\bot e)\ \frac{\bot}{A}$$

Regole "condizionali"

$$(\vee e)\ \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ C\end{array}}{C}$$

$$(\rightarrow i)\ \frac{\begin{array}{c}[A]\\ B\end{array}}{A \rightarrow B} \qquad (\neg i)\ \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \bot\end{array}}{\neg A} \qquad (RA)\ \frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \bot\end{array}}{A}$$

RA – Reductio ad Absurdum

Regole "derivate"

Modus Tollens

$$(MT)\ \frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

Introduzione della doppia negazione

$$(\neg\neg i)\ \frac{A}{\neg\neg A}$$

Tertium Non Datur

$$(TND)\ \frac{}{A \vee \neg A}$$

Esempi di deduzione

Dimostriamo che: $\vdash_{DN} A \to (B \to A)$.

$$\dfrac{\dfrac{[B]_1 \quad [A]_2}{(B \to A)}\ (\to i)}{A \to (B \to A)}\ (\to i)$$

Esempi di deduzione

Dimostriamo che: $\vdash_{DN} A \to \neg\neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [\neg A]_1}{\perp}\ (\neg e)}{\neg\neg A}\ (\neg i)}{A \to \neg\neg A}\ (\to i)$$

Esempi di deduzione

Scrittura alternativa per le dimostrazioni precedenti

Dimostriamo che: $\vdash_{DN} A \to (B \to A)$.

1.	A	*Assunzione*	(1)
2.	B	*Assunzione*	(2)
3.	$B \to A$	$(\to i)$ *da* 2 *e* 1 *con scarto di* 2	(1)
4.	$A \to (B \to A)$	$(\to i)$ *da* 1 *e* 3 *con scarto di* 1	()

Esempi di deduzione

Scrittura alternativa per le dimostrazioni precedenti

Dimostriamo che: $\vdash_{DN} A \to \neg\neg A$.

1.	A	*Assunzione*	(1)
2.	$\neg A$	*Assunzione*	(2)
3.	$\bot$	$(\neg e)$ *da* 1 *e* 2	(1,2)
4.	$\neg\neg A$	$(\neg i)$ *da* 2 *e* 3 *con scarto di* 2	(1)
4.	$A \to \neg\neg A$	$(\to i)$ *da* 1 *e* 4 *con scarto di* 1	()

Esempi di deduzione 2

Dimostriamo che $\vdash_{DN} (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{B} \quad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{A} \quad [A \to (B \to C)]}{B \to C}}{C}}{(A \wedge B \to C)}}{(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)}$$

Esempio di deduzione con uso di ($\vee$e)

Dimostriamo che: $\vdash_{DN} (\neg A \vee B) \to (A \to B)$.

1.	$\neg A \vee B$	*Assunzione*	(1)
2.	$\neg A$	*Assunzione*	(2)
3.	A	*Assunzione*	(3)
4.	$\bot$	$(\neg e)$ *da* 2 *e* 3	(2,3)
5.	B	$(\bot e)$ *da* 4	(2,3)
6.	B	*Assunzione*	(6)
7.	B	$(\vee e)$ *da* 1, 5 *e* 6 *con scarto di* 2 *e* 6	(1,3)
8.	$A \to B$	$(\to i)$ *da* 3 *e* 7 *con scarto di* 3	(1)
9.	$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$	$(\to i)$ *da* 1 *e* 8 *con scarto di* 1	()

Deduzione naturale: regole per $\forall$

Le regole della logica proposizionale, più

$$(\forall e)\ \dfrac{\forall x A}{A[t/x]}$$

$$(\forall i)\ \dfrac{A[y/x]}{\forall x A}$$

dove x, y sono variabili e t è un generico termine.

$(\forall i)$ è una regola condizionale: essa si può applicare purché la variabile y non compaia libera in nessuna delle formule che compaiono nelle foglie non cancellate del sottoalbero la cui radice è $A[y/x]$.

Deduzione naturale: regole per ∃

$$(\exists e)\ \frac{\exists x A \qquad \frac{[A[y/x]]}{C}}{C}$$

$$(\exists i)\ \frac{A[t/x]}{\exists x A}$$

In $(\exists e)$ la variabile y non può comparire in C, né in nessuna delle foglie non cancellate del sottoalbero di radice C, a parte $A[y/x]$.

Deduzione naturale: esempio

Dimostriamo con la deduzione naturale che:

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\forall x P(x)]}{P(y)}\ (\forall e)}{\exists y P(y)}\ (\exists i)}{\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)}\ (\rightarrow i)$$

Esercizio

Dimostriamo, usando la deduzione naturale che:
$\forall x(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x)) \wedge Uomo(S) \vdash Mortale(S)$

1.	$\forall x(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x)) \wedge Uomo(S)$	*Premessa*	(1)
2.	$\forall x(Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$	$(\wedge e1)$ *da* 1	(1)
3.	$Uomo(S)$	$(\wedge e2)$ *da* 1	(1)
4.	$Uomo(S) \rightarrow Mortale(S)$	$(\forall e)$ *da* 2	(1)
5.	$Mortale(S)$	(MP) *da* 3 *e* 4	(1)

Deduzione naturale: dimostrazione errata

Le condizioni per l'applicabilità delle regole $(\forall i)$ ed $(\exists e)$ sono essenziali per la correttezza dell'apparato deduttivo della deduzione naturale; infatti rilassando le condizioni per l'applicabilità di dette regole si possono derivare non teoremi, quali ad esempio:
$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$.

1.	$\exists x P(x)$	*Assunzione*	(1)
2.	$P(x)$	*Assunzione*	(2)
3.	$\forall x P(x)$	$(\forall i)$*da* 2	(2)
4.	$\forall x P(x)$	$(\exists e)$ *da* 1 *e* 3 *con scarto di* 2	(1)
5.	$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$	$(\rightarrow i)$ *da* 1 *e* 4 *con scarto di* 1	()