CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 12 aprile 2006

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

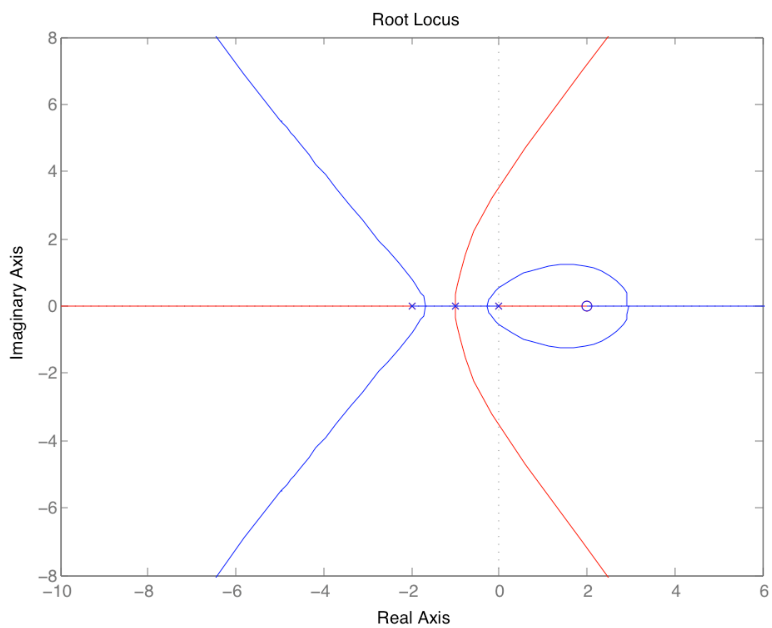
La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = \frac{s-2}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{s-2}{(s+1)^2(s+2)}$$

(*nota: la fattorizzazione del denominatore è stata suggerita in aula*). La specifica sulla riproduzione del riferimento a gradino in presenza di un disturbo costante richiede l'introduzione nel controllore di polo nell'origine. La funzione di trasferimento del processo modificato diviene dunque

$$F(s) = k\frac{s-2}{s(s+1)^2(s+2)}$$

Il sistema ha fase non minima ed eccesso poli-zeri pari a 3. Ciò nonostante, il tracciamento del corrispondente luogo delle radici, riportato in figura, indica che il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile per $k^* < k < 0$ (luogo negativo, in blu).



Per verificare tale circostanza e determinare il valore di k^*, è sufficiente applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso, ovvero $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + (2+k)s - 2k$. Si trova, come previsto, che il sistema è asintoticamente stabile per $-0.73 < k < 0$. Il controllore richiesto è dunque

$$G(s) = \frac{k}{s} \qquad \text{con} \quad -0.73 < k < 0$$

Problema 2

a) Per individuare i punti di equilibrio, si cercano le radici comuni delle equazioni

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_1x_2 &= 0 \\ -3x_2 - x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

La seconda fornisce $x_2 = -x_1^2/3$, che sostituita nella prima dà $-x_1(x_1^2/3 - 2x_1/3 + 1) = 0$. Poiché le radici del polinomio di secondo grado sono complesse, l'unico punto di equilibrio si ha per $x_1 = x_2 = 0$.

b) Il calcolo della matrice jacobiana della dinamica del sistema nel punto di equilibrio fornisce

$$J(0) = \left. \begin{pmatrix} -1 + x_2 & -2 + x_1 \\ -2x_1 & -3 \end{pmatrix} \right|_{(x_1=0, x_2=0)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono evidentemente -1 e -3. Ne consegue che l'origine è asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

c) Si consideri la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

che è definita positiva in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata. La sua derivata lungo le traiettorie del sistema è

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 = -(x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2$$

che è definita negativa in qualsiasi intorno dell'origine. Ne consegue che l'origine è globalmente asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Problema 3

Affinché la risposta indiciale sia costituita dalla sovrapposizione di un gradino, di un modo aperiodico convergente e di un modo pseudoperiodico divergente, la funzione di trasferimento del sistema dovrà avere un polo reale negativo (che darà luogo al modo aperiodico convergente) e una coppia di poli complessi con parte reale positiva (che daranno luogo al modo pseudoperiodico divergente). Il gradino nella risposta sarà naturalmente dovuto al gradino in ingresso.

Il sistema dovrà dunque avere una funzione di trasferimento con tre poli. Poiché la dimensione del sistema è 3, ne consegue che esso dovrà essere completamente raggiungibile e osservabile, in modo che tutti gli autovalori divengano poli. Ciò constrasta con la terza proprietà assegnata.

È dunque *impossibile* fornire una rappresentazione che goda di tutte le proprietà richieste.