Università di Roma Tre

Complementi di Controlli Automatici

Regolazione asintotica dell'uscita

Prof. Giuseppe Oriolo
DIS, Università di Roma "La Sapienza"

Obiettivo

progetto di una legge di controllo a retroazione per sistemi lineari MIMO della forma

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ y &= Cx + Qw \end{aligned}}$$

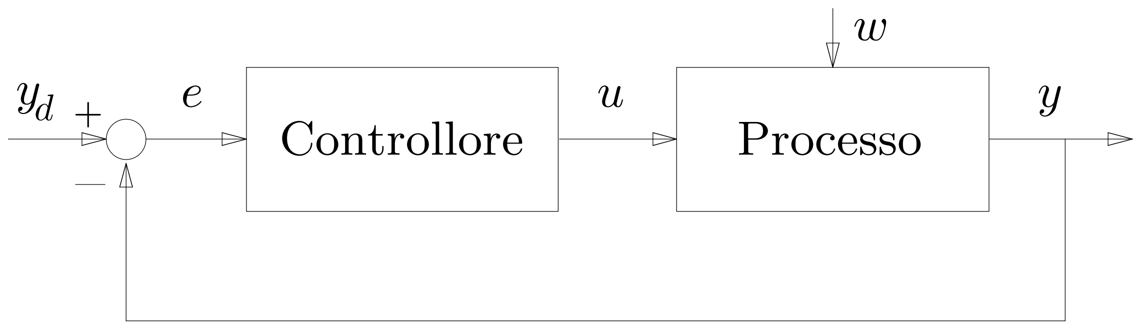
in modo da soddisfare simultaneamente a specifiche su:

- **stabilità** e regime **transitorio** $\iff$ collocazione degli autovalori sul piano complesso
- regime **permanente** $\Rightarrow$ risposta a riferimenti $y_d(t)$ e/o disturbi $w(t)$ canonici

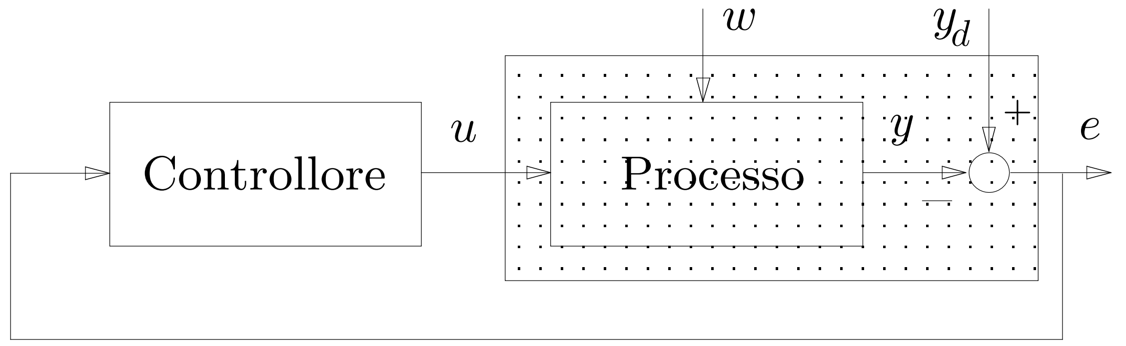
in particolare:

- sistema di controllo ad anello chiuso **asintoticamente stabile**
- comportamento transitorio **soddisfacente** (tempo di salita ridotto, sovraelongazione contenuta, . . .)
- **errore nullo** a regime permanente in risposta a classi di ingressi e/o disturbi

Trattazione unificata di riferimenti e disturbi



$\Updownarrow$



processo soggetto al disturbo $\tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix}$ e privo di riferimento

- processo originario

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ y &= Cx + Qw\end{aligned}$$

- errore di uscita

$$e = y_d - y = y_d - Cx - Qw$$

- processo soggetto al disturbo generalizzato $\tilde{w} = [w \;\; y_d]^T$ (blocco puntinato)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + \tilde{P}\tilde{w} \\ e &= \tilde{C}x + \tilde{Q}\tilde{w}\end{aligned}$$

dove

$$\tilde{P} = [\, P \quad 0 \,], \qquad \tilde{C} = -C, \qquad \tilde{Q} = [\, -Q \quad I \,]$$

Classi di ingressi e/o disturbi

- polinomi canonici di ordine k, sinusoidi, esponenziali, ...

$$\Downarrow$$

sono andamenti temporali associati ai modi naturali (cioè all'evoluzione libera) di un sistema lineare

- disturbi generalizzati $\tilde{w}(t)$ *generati* da un opportuno **esosistema**

$$\dot{\tilde{w}} = S\tilde{w}, \quad w \in \mathbb{R}^r,\ S : r \times r \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{w}(t) = \mathtt{expm}(St)\,\tilde{w}(0)$$

- ad esempio:

– **costante**: $r = 1$, $S = 0 \ \rightarrow \ \dot{\tilde{w}} = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{w}(t) = \tilde{w}(0)$ (autovalore nullo con m. g. $= 1$)

– **esponenziale**: $r = 1$, $S = \alpha \rightarrow \dot{\tilde{w}} = \alpha\tilde{w} \Rightarrow \tilde{w}(t) = e^{\alpha t}\tilde{w}(0)$ (autovalore con m. g. $= 1$)

– **rampa**: $r = 2$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ \rightarrow \ \dot{\tilde{w}}_1 = \tilde{w}_2,\ \dot{\tilde{w}}_2 = 0$ (autovalore nullo con m. g. $= 2$)

$$\Rightarrow \quad \tilde{w}_2(t) = \tilde{w}_2(0), \quad \tilde{w}_1(t) = \tilde{w}_2(0)t + \tilde{w}_1(0)$$

– **polinomi canonici di ordine k**: $\quad r = k + 1$,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(autovalore nullo con m. g. } > 1\text{)}$$

$\Rightarrow$ componenti $\tilde{w}_{k+1-i}(t)$ $(i = 0, \dots, k)$ sono combinazioni di polinomi di ordine fino ad i, con coefficienti che dipendono dalle condizioni iniziali

– **sinusoidi**: $r = 2, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\tilde{w}}_1 = -\omega \tilde{w}_2, \quad \dot{\tilde{w}}_2 = \omega \tilde{w}_1$

$$\Rightarrow \quad \tilde{w}_1(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad \tilde{w}_2(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{\tilde{w}_1(0)^2 + \tilde{w}_2(0)^2}, \quad \phi = \text{ATAN2}\{\tilde{w}_2(0), \tilde{w}_1(0)\}$$

- **attenzione**: gli esempi precedenti mostrano che $\tilde{w}$ contiene, oltre al disturbo vero e proprio w e all'uscita desiderata y_d, anche delle componenti ausiliarie la cui funzione è di completare l'esosistema

  ...nel seguito ometteremo le tilde!

Formulazione del problema

- sia dato il processo MIMO + esosistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ e &= Cx + Qw\end{aligned} \qquad + \qquad \dot{w} = Sw$$

stato $x \in \mathbb{R}^n$, ingresso $u \in \mathbb{R}^m$, uscita $e \in \mathbb{R}^p$ ($\Leftarrow y \in \mathbb{R}^p$) e disturbi/riferimenti $w \in \mathbb{R}^r$

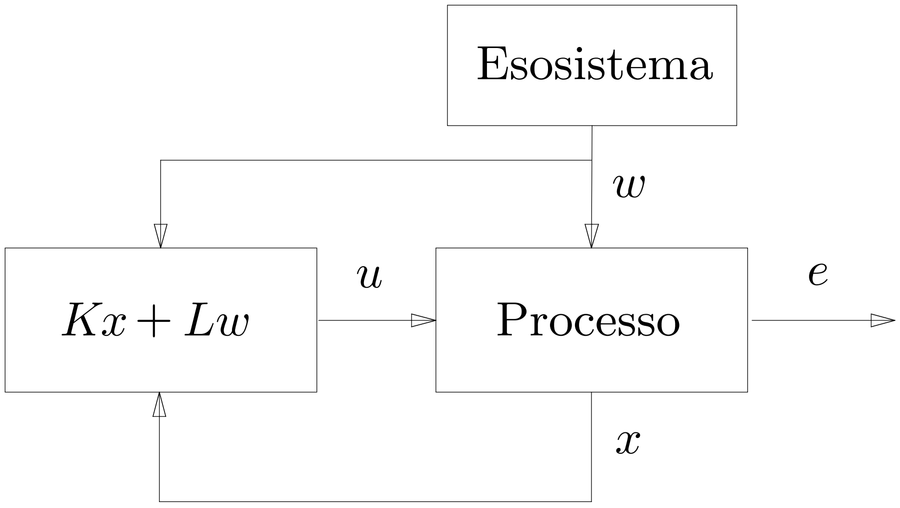
- ad anello chiuso, la regolazione a zero dell'errore di uscita con stabilità asintotica possono ottenersi sotto **due diverse ipotesi di schema di controllo**:

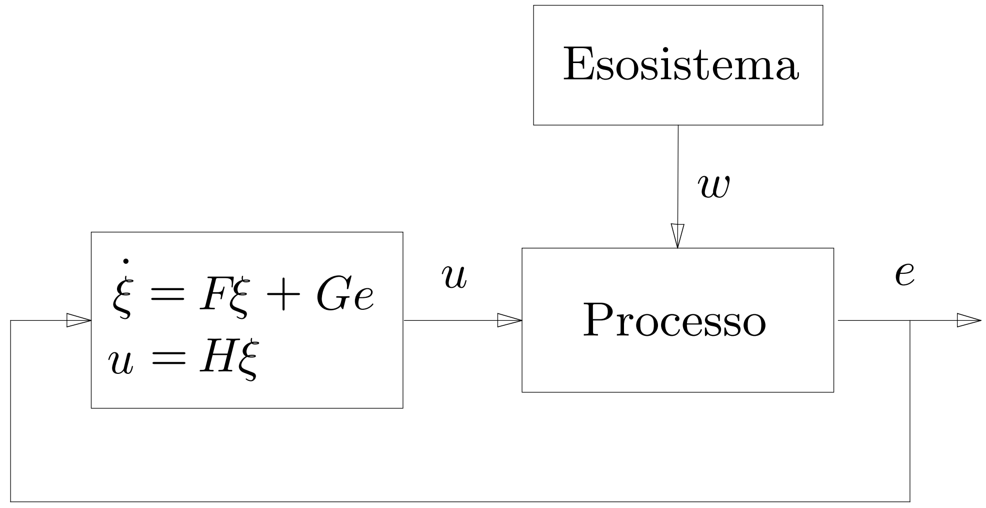
(IC) informazione completa (reazione dallo stato e dai disturbi, supposti misurabili)

$$\boxed{u = Kx + Lw} \qquad \text{feedback } \textbf{istantaneo}$$

(RE) reazione dall'errore di uscita (misura della sola y)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\xi} &= F\xi + Ge \\ u &= H\xi\end{aligned}} \qquad \text{feedback } \textbf{dinamico} \quad (\xi \in \mathbb{R}^\nu)$$





schema con informazione completa

schema con reazione dall'errore

- **obiettivi** (w va considerato come un forzamento)

  (S) stabilizzazione asintotica del sistema ad anello chiuso

  (R) regolazione asintotica a zero dell'errore e

!! per sistemi lineari, asintotico $\equiv$ esponenziale

Regolazione con informazione completa — IC

- dati: A, B, C, P, Q, S
- determinare (**se possibile**) due matrici: K, L in

$$u = Kx + Lw$$

in modo che:

(S)$_{IC}$ $\quad \sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^-$ $\qquad$ (σ = spettro = insieme degli autovalori)

(R)$_{IC}$ $\quad \forall (x^0, w^0)$, le soluzioni $(x(t), w(t))$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \boxed{(A + BK)}\, x + (P + BL)\, w \\ \dot{w} &= S\, w \end{aligned}$$

con $x(0) = x^0$, $w(0) = w^0$, siano tali che

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} Cx(t) + Qw(t) = 0$$

Regolazione con reazione dall'errore — RE

- dati: A, B, C, P, Q, S
- determinare (**se possibile**) tre matrici: F, G, H in

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F\xi + Ge \\ u &= H\xi \end{aligned}$$

in modo che:

(S)$_{RE}$ $\sigma\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^-$

(R)$_{RE}$ $\forall(x^0, \xi^0, w^0,)$, le soluzioni $(x(t), \xi(t), w(t))$ del sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} &= \boxed{\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ GQ \end{pmatrix} w \\ \dot{w} &= S\, w \end{aligned}$$

con $x(0) = x^0$, $\xi(0) = \xi^0$, $w(0) = w^0$, siano tali che

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} Cx(t) + Qw(t) = 0$$

Ipotesi di lavoro

$\boxed{\textbf{H1}}$ la matrice S dell'esosistema è **antistabile** $\quad (\sigma(S) \cap \mathbb{C}^- = \emptyset)$

tale ipotesi non è restrittiva perchè:

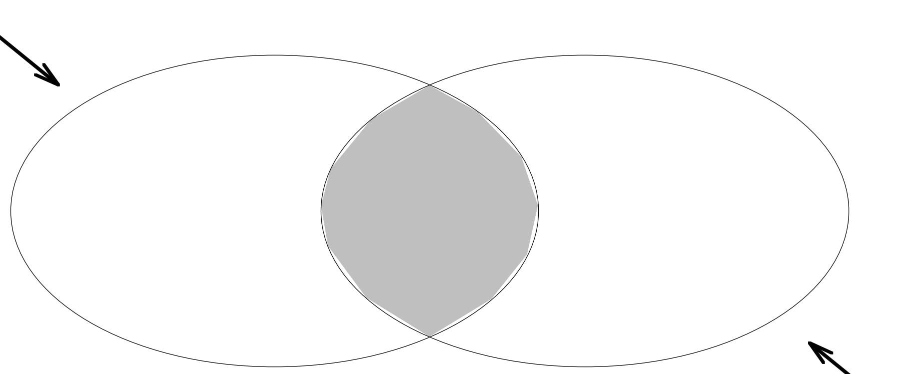
1) quasi tutte le funzioni di interesse viste soddisfano l'ipotesi

2) per esponenziali convergenti si avrebbe $\lim_{t\to\infty} w_i(t) = 0$ e quindi

$$\text{obiettivo } \textbf{(S)}_{IC/RE} \quad \Rightarrow \quad \text{obiettivo } \textbf{(R)}_{IC/RE}$$

Approccio alla soluzione

insieme di tutti i controllori che soddisfano **(S)**



insieme di tutti i controllori che soddisfano **(R)**

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **(IC)**

Sotto l'ipotesi **H1**, *sia* $u = Kx + Lw$ *un controllore che soddisfa* **(S)**$_{IC}$. *Allora è soddisfatta anche* **(R)**$_{IC}$ **se e solo se** *esiste una matrice* Π $(n \times r)$ *tale che:*

$$\Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) \qquad \text{(equazione di Sylvester } *)$$

$$0 = C\Pi + Q \qquad \text{(errore di uscita nullo } **)$$

!! . . . da dove vengono queste equazioni?

a regime: $e(t) = y_d(t) - y(t) = Cx(t) + Qw(t) = 0 \Rightarrow$ lo stato $x(t)$ evolverà come $x_d(t) = -C^r Qw(t) = \Pi w(t)$, dove C^r è una *inversa destra* di C (sono ∞)

si avrà:

$$e = (Cx + Qw)|_{x=x_d} = C\Pi w + Qw = (C\Pi + Q)\, w = 0 \qquad (\forall w)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= \Pi \dot{w} = \Pi S\, w = [(A + BK)x + (P + BL)w]\,|_{x=x_d} \\ &= [(A + BK)\Pi + (P + BL)]\, w \qquad (\forall w) \end{aligned}$$

Dimostrazione

- sotto l'ipotesi **H1**, $\sigma(S) \cap \sigma(A+BK) = \emptyset$ e l'equazione matriciale di Sylvester ha una e una sola soluzione Π

- definendo l'errore di stato $\tilde{x} = x - x_d = x - \Pi w$, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \Pi \dot{w} &= (A+BK)x + (P+BL)w - \Pi S w \\ &= (A+BK)(\tilde{x} + \Pi w) + (P+BL)w - \Pi S w \\ &= (A+BK)\,\tilde{x} \qquad\qquad \text{(dall'eq. di Sylvester } (*)) \end{aligned}$$

oltre alla $\dot{w} = Sw$ dell'esosistema

- le soluzioni sono $\tilde{x}(t) = \mathtt{expm}\,[(A+BK)t]\,\tilde{x}(0)$, $w(t) = \mathtt{expm}(St)w(0)$

- dall'espressione dell'errore in uscita $e = Cx + Qw = C\tilde{x} + (C\Pi + Q)w$

$$e(t) = C\mathtt{expm}\,[(A+BK)t]\,\tilde{x}(0) + (C\Pi + Q)\mathtt{expm}(St)w(0)$$

il primo termine $\to 0$ per $t \to \infty$ per ipotesi, mentre nel secondo $\exists w^0$: $\mathtt{expm}(St)w(0) \not\to 0$; allora $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ $(\forall (x^0, w^0))$ $\iff$ $(**)$ ■

Stabilizzabilità del processo

dipende dalle proprietà strutturali della coppia (A,B); in particolare, è una proprietà meno forte della raggiungibilità; esempi:

- sistema completamente raggiungibile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \rho\,[\,B \quad AB\,] = 2$$

$\Rightarrow$ (A,B) raggiungibile $\Rightarrow$ $\sigma(A+BK)$ **assegnabile** a piacere

tutti i controllori stabilizzanti: $K = [\,k_1 \quad k_2\,]$, con $k_1 < a_0$, $k_2 < a_1$

- sistema non completamente raggiungibile

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho\,[\,B \quad AB\,] = 1$$

$\Rightarrow$ (A,B) **stabilizzabile** $\iff$ l'autovalore non raggiungibile $a_{22} < 0$

$\Rightarrow$ tutti i controllori stabilizzanti: $K = [\,k_1 \quad k_2\,]$, con $k_1 < -a_{11}$, $\forall k_2$

- **CN&S raggiungibilità** di (A, B) $\quad (\rho =$ rango$)$

$$\rho(\mathcal{P}) = \rho\,[\,B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B\,] = n$$

ovvero (PBH test)

$$\rho\,[\,A - \lambda I \;\mid\; B\,]\,|_{\lambda=\lambda_i} = n, \qquad \forall \lambda_i \in \sigma(A)$$

- **CN&S stabilizzabilità** di (A, B)

$$\rho\,[\,A - \lambda I \;\mid\; B\,]\,|_{\lambda=\lambda_i} = n, \qquad \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \mathrm{Re}(\lambda_i) \geq 0$$

allora prenderemo l'ipotesi. . .

$\boxed{\textbf{H2}}$ la coppia (A, B) è stabilizzabile

Teorema **(IC)**

Sotto le ipotesi **H1** *e* **H2***, il problema di regolazione dell'uscita con informazione completa ha soluzione* **se e solo se** *esistono una matrice* Π $(n \times r)$ *ed una matrice* Γ $(m \times r)$ *tali che:*

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P & (\star) \\ 0 &= C\Pi + Q & (\star\star) \end{aligned}$$

Allora <u>*una*</u> *possibile soluzione è*

$$u = \Gamma w + K(x - \Pi w)$$

con K *tale che* $\sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^-$*.*

!! $(\star)$ e $(\star\star)$ sono le condizioni di regime permanente

!! $(\star)$ e $(\star\star)$ sono dette anche **equazioni del regolatore**

!! $(\star)$ e $(\star\star)$ sono $(n+p) \times r$ equazioni lineari scalari in $(n+m) \times r$ incognite

Dimostrazione

- **(necessità)** sia $u = Kx + Lw$ un controllore che soddisfa $(\text{S})_{IC}$ e $(\text{R})_{IC}$ $\Rightarrow$ dal Lemma, $\exists \Pi$ che risolve l'equazione di Sylvester $(*)$ e l'equazione $(**)$ (errore di uscita nullo); ponendo
$$K\Pi + L = \Gamma$$
si ottengono necessariamente $(\star)$ e $(\star\star)$

- **(sufficienza)** dall'ipotesi **H2** $\Rightarrow$ $\exists K$ tale che $(\text{S})_{IC}$ è soddisfatta; dalle $(\star)$ e $(\star\star)$, ponendo
$$\Gamma = K\Pi + L$$
sono soddisfatte automaticamente $(*)$ e $(**)$ del Lemma $\blacksquare$

Commenti

- **nel Lemma** $\exists\, \boldsymbol{\Pi}\ :\ \Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL),\ 0 = C\Pi + Q$
  già in presenza di una $u = Kx + Lw$ stabilizzan te $\Rightarrow$ condizione verificabile ad anello chiuso

- **nel Teorema** $\exists\, \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Gamma}\ :\ \Pi S = A\Pi + B\Gamma + P,\ 0 = C\Pi + Q$
  non compaiono né K né L $\Rightarrow$ condizione verificabile ad anello aperto

- lettura alternativa della struttura del controllore

$$u = Kx + (\Gamma - K\Pi)w = Kx + Lw$$

  – il primo termine è un feedback **stabilizzante a zero**, il secondo è il feedforward opportuno (che dipende dalla parte stabilizzante) per avere l'uscita desiderata

$$u = \Gamma w + K(x - \Pi w)$$

  – il primo termine è un feedforward 'puro', il secondo è il feedback **stabilizzante a** $x_d(t) = \Pi w(t)$, l'andamento naturale dello stato associato all'uscita desiderata

Esempio 1

- doppio integratore, senza disturbi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = 0 \quad Q = 0$$

- riferimento per l'uscita: esponenziale crescente (esosistema antistabile)

$$\dot{w} = a\, w \quad \rightarrow \quad y_d(t) = w(t) = w(0)\exp(at) \qquad (a > 0)$$

- equazione di errore

$$e = y_d - y = w - Cx = \tilde{C}x + \tilde{Q}w = \quad \Rightarrow \quad \tilde{C} = -C, \quad \tilde{Q} = 1$$

!! in alternativa $e = y - y_d = Cx + Qw \Rightarrow \tilde{Q} = -1$ (comunque $e \rightarrow 0 \ldots$)

d'ora in poi omettiamo le tilde...

- ipotesi H1 e H2 soddisfatte (in particolare (A, B) raggiungibile)

- equazioni del regolatore (nelle incognite $\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \gamma$)

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} - 1$$

$\Rightarrow \pi_1 = 1$, $\pi_2 = a$, $\gamma = a^2$

- stabilizzazione (assegnazione di un polinomio caratteristico di Hurwitz)

$$K = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad a_0 > 0,\ a_1 > 0$$

infatti, le radici di $p_{A+BK}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ hanno certamente Re < 0

- controllore risultante (con reazione dallo stato)

$$u = \Gamma w + K(x - \Pi w) = a^2 y_d + \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_d \\ x_2 - a y_d \end{pmatrix}$$

!! essendo $y_d(t) = \mathtt{exp}(at) \;\rightarrow\; \dot{y}_d = a y_d$ e $\ddot{y}_d = a^2 y_d$; inoltre $y = x_1$ e $\dot{y} = x_2$; si può quindi riscrivere la legge di controllo come

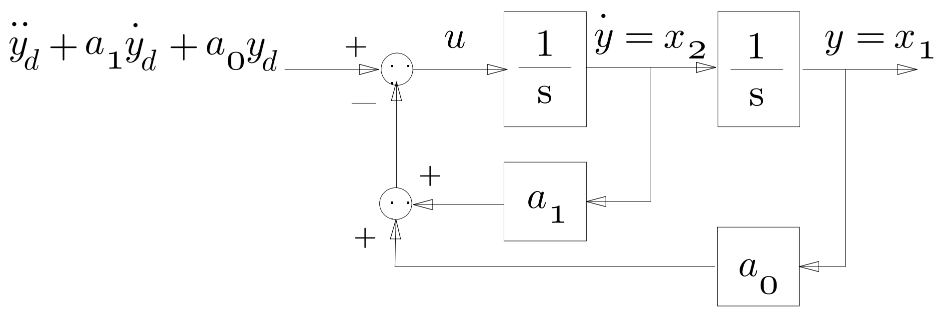
$$u = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} + (\ddot{y}_d + a_1 \dot{y}_d + a_0 y_d) \qquad (1)$$

ovvero

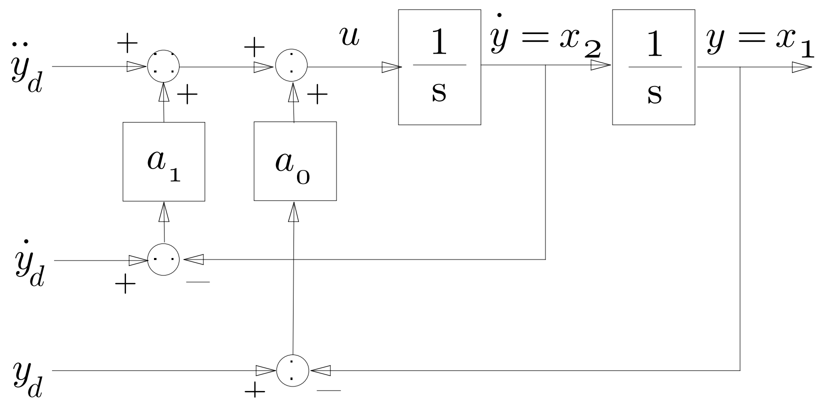
$$u = \ddot{y}_d + a_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + a_0(y_d - y) \qquad (2)$$

- le espressioni (1) e (2) corrispondono a due implementazioni ovviamente equivalenti, ma descritte da schemi a blocchi differenti); in particolare, la formulazione (2) è il classico **PD + feedforward di accelerazione**

– stabilizzazione a stato zero + feedforward opportuno

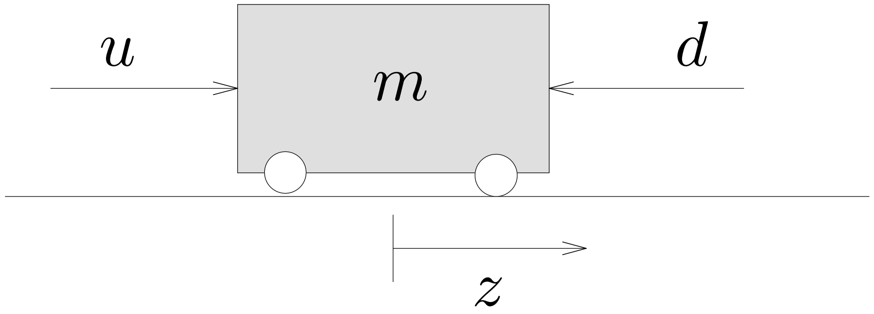


– feedforward puro + stabilizzazione alla traiettoria di stato ($\leftrightarrow e$ in uscita nullo)



- se $x_1(0)[= y(0)] = y_d(0), x_2(0)[= \dot{y}(0)] = \dot{y}_d(0) \Rightarrow e(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$ (**tracking esatto**)
  else $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ (**tracking asintotico**)

Esempio 2



- asservimento di posizione z di un carrello di massa m in moto orizzontale (con attrito viscoso b) e disturbo di forza d (costante); z, $\dot{z}$ e d sono misurabili

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = u - d \quad \rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix},\ y = z$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \qquad \text{(sistema raggiungibile)}$$

- riferimento sinusoidale (con pulsazione ω e ampiezza a) per l'uscita

$$y_d(t) = a \sin(\omega t)$$

- esosistema $\dot{w} = Sw$ (e sue componenti)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \qquad w(0) = \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow w(t) = \begin{pmatrix} d \\ a \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{pmatrix}$$

- equazione di errore

$$e = y_d - y = Cx + Qw \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- matrice del disturbo nell'equazione di stato ($\dot{x} = Ax + Bu + Pw$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- equazioni del regolatore ($\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P$, $C\Pi + Q = 0$) nelle incognite $\Pi : (2 \times 3)$ e $\Gamma : (1 \times 3)$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 9 equazioni scalari in 9 incognite

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b\,\omega & -\omega^2 m \end{pmatrix}$$

- nota: lo stato 'desiderato' è quindi

$$x_d = \Pi w = \begin{bmatrix} a \sin \omega t \\ a\,\omega \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}$$

...com'era ovvio!

- stabilizzazione (con reazione dallo stato): si può procedere ad esempio per assegnazione di due autovalori reali negativi ad $(A+BK)$

$$\sigma^* = \{-\lambda_1, -\lambda_2\} \quad \Rightarrow \quad (\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2) = \lambda^2 + (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$
$$K = [k_1\; k_2] = [\,-m\lambda_1\lambda_2 \quad -m(\lambda_1+\lambda_2)+b\,]$$

- controllore finale

$$u = Kx + Lw = \Gamma w + K(x - \Pi w)$$

e cioè

$$\begin{aligned} u &= (d + ab\omega\cos\omega t - a\omega^2 m \sin\omega t) + k_1(x_1 - a\sin\omega t) + k_2(x_2 - a\omega\cos\omega t) \\ &= (d + b\dot{y}_d + m\ddot{y}_d) + k_1(y - y_d) + k_2(y - \dot{y}_d) \end{aligned}$$

- si osservi come il termine di feedforward contenga, oltre alla forza di regime $m\ddot{y}_d$, due ulteriori termini il cui scopo è rispettivamente quello di **cancellare** il disturbo costante e di **compensare** l'attrito di regime

Lemma **(RE)**

Sotto l'ipotesi **H1***, sia* $\dot{\xi} = F\xi + Ge$*,* $u = H\xi$*, con* $\xi \in \mathbb{R}^\nu$*, un controllore dinamico che soddisfa* **(S)**$_{RE}$*. Allora è soddisfatta anche* **(R)**$_{RE}$ **se e solo se** *esistono due matrici* Π $(n \times r)$ *e* Σ $(\nu \times r)$ *tali che:*

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + BH\Sigma + P && (*) \\ \Sigma S &= F\Sigma && (**) \\ 0 &= C\Pi + Q && (***) \end{aligned}$$

!! se a regime $e(t) = 0$, lo stato x del processo evolverà come $x_d(t) = \Pi w(t)$ e lo stato ξ del controllore dinamico evolverà come $\xi_d(t) = \Sigma w(t)$; ad anello chiuso si trova, posto $\tilde{x} = x - x_d = x - \Pi w$ e $\tilde{\xi} = \xi - \xi_d = \xi - \Sigma w$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} w \right] + \begin{pmatrix} P \\ GQ \end{pmatrix} w - \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} Sw$$

e, se valgono la $(*)$ e la $(**)$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad x \to x_d, \xi \to \xi_d\,!$$

Dimostrazione

- grazie all'ipotesi **H1** e all'ipotesi di soddisfacimento della **(S)**$_{RE}$, la nuova equazione matriciale di Sylvester

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ GQ \end{pmatrix} \qquad (\diamond)$$

  ha <u>una ed una sola soluzione</u> $\begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix}$

- definendo come nuove coordinate gli errori di stato del processo ($\tilde{x} = x - x_d = x - \Pi w$) e del controllore ($\tilde{\xi} = \xi - \xi_d = \xi - \Sigma w$), si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\xi}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} w \right] + \begin{pmatrix} P \\ GQ \end{pmatrix} w - \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} S w \\ &= \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} \qquad \text{[dalla nuova eq. di Sylvester } (\diamond)] \end{aligned}$$

  oltre alla $\dot{w} = Sw$ dell'esosistema

- per l'errore in uscita si ha

$$e = Cx + Qw = C\tilde{x} + (C\Pi + Q)w = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} + (C\Pi + Q)w$$

  dalla stabilità asintotica della dinamica $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ si ha $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \;\forall (x^0, \xi^0, w^0)$ **se e solo se** $C\Pi + Q = 0$, ossia la $(***)$; sostituendo nella $(\diamond)$, si ottengono $(*)$ e $(**)$ ■

Principio del modello interno

la condizione $\Sigma S = F\Sigma$ ha un'interessante interpretazione geometrica:

- sia $\mathcal{V}$ il sottospazio generato dalle $r\,(\leq \nu\,!)$ colonne (indipendenti) di Σ
  - $\mathcal{V}$ è un sottospazio **invariante** rispetto a F (ossia $F\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$)
  - la **restrizione** della dinamica libera di ξ al sottospazio $\mathcal{V}$ (ossia $F|_{\mathcal{V}}$) coincide con S

- esiste un cambiamento di coordinate caratterizzato da una matrice nonsingolare

$$T = (\,\Sigma \quad \Lambda\,) \qquad \text{(con infinite scelte per il completamento } \Lambda)$$

  per cui la dinamica libera del controllore assume la forma equivalente

$$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} S & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

qualsiasi controllore dinamico che risolve il problema di regolazione contiene una copia dell'esosistema!

Rilevabilità del processo

- per poter ottenere **(S)**$_{RE}$ (e quindi un controllore dinamico dall'errore dall'uscita che stabilizzi asintoticamente il processo) è necessaria, oltre alla ipotesi **H2**, anche una ulteriore ipotesi legata all'osservabilità del sistema

- in particolare, è necessaria la proprietà di **rilevabilità** della coppia (A, C) (una proprietà meno forte dell'osservabilità)

- **CN&S osservabilità** di (A, C)

$$\rho(\mathcal{Q}) = \rho \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \qquad \text{ovvero (PBH test)} \quad \rho \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \Bigg|_{\lambda=\lambda_i} = n, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A)$$

- **CN&S rilevabilità** di (A, C)

$$\rho \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \Bigg|_{\lambda=\lambda_i} = n, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \mathrm{Re}(\lambda_i) \geq 0$$

allora prenderemo l'ipotesi...

H3 la coppia (A, C) è rilevabile

Condizione di rilevabilità ristretta

- per arrivare più direttamente alla sintesi del controllore dinamico che soddisfa **(S)**$_{RE}$ e **(R)**$_{RE}$ si assume una ipotesi **più restrittiva** della **H3** (non necessaria, la rimuoveremo in seguito):

  $\boxed{\textbf{H3}_{rst}}$ è rilevabile la coppia di matrici $\quad C^e = \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix} \quad A^e = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix}$

- si ha **H3**$_{rst}$ $\Rightarrow$ **H3**; infatti dal test sulla rilevabilità di (A, C)

$$\rho \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \Bigg|_{\lambda \in \sigma^+(A)} < n \quad \Rightarrow \quad \rho \begin{bmatrix} A - \lambda I & P \\ 0 & S - \lambda I \\ C & Q \end{bmatrix} \Bigg|_{\lambda \in \sigma^+(A)} < n + r$$

  essendo $\sigma(A) \subset \sigma(A^e)$

- motivazione di **H3**$_{rst}$: la coppia di matrici (A^e, C^e) compare nel problema di costruzione di un **osservatore asintotico** dello stato esteso $x^e = (x, w)$

- per il **principio di separazione**, l'uso di un osservatore che, a partire dall'ingresso u e dall'errore di uscita e, genera stime asintotiche dello stato del processo + esosistema

$$\xi_0(t) \to x(t) \qquad \text{e} \qquad \xi_1(t) \to w(t)$$

  permette di sostituire nella legge di controllo IC lo stato stimato allo stato vero

$$u = Kx + Lw \qquad \Rightarrow \qquad u = K\xi_0 + L\xi_1$$

  senza pregiudicare la stabilità asintotica complessiva

Costruzione del regolatore con reazione dall'errore

- si supponga che il problema di **regolazione IC** sia risolubile; esistono quindi due matrici Π e Γ che soddisfano il **Teorema IC** e si può porre

$$u = Kx + (\Gamma - K\Pi)w \qquad (\dagger)$$

con la matrice K tale che $\sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^-$

- si costruisca un osservatore asintotico di (x, w)

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix} \left(e - \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \right)$$

dove

  - i primi due termini sono **una copia** del processo + esosistema
  - il terzo termine è **un forzamento** basato sulla differenza tra errore e misurato e la sua stima

- la coppia di matrici (G_0, G_1) deve essere tale che

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{C}^-$$

e la loro esistenza è garantita dall'ipotesi **H3**$_{rst}$

- ponendo $\xi_0 \to x, \xi_1 \to w$ in (†), si ottiene un controllore dinamico della forma

$$\begin{pmatrix} \dot\xi_0 \\ \dot\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - G_0 C + BK & P - G_0 Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1 C & S - G_1 Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix} e$$

$$u = \begin{pmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \qquad (\sharp)$$

che risolve il problema (ed è nella forma $\dot\xi = F\xi + Ge,\ u = H\xi$)!

!! Infatti si ha il seguente il risultato . . .

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **(RE)**

Sotto le ipotesi **H1**, **H2** *e* **H3**$_{rst}$, *il problema di regolazione dell'uscita con reazione dall'errore ha soluzione* **se e solo se** *esistono due matrici* Π *e* Γ *che soddisfano le equazioni matriciali* $(\star)$ *e* $(\star\star)$ *del* **Teorema (IC)**.

Se Π *e* Γ *sono due tali matrici, allora una possibile soluzione è fornita dal controllore dinamico* **($\sharp$)**.

!! sotto la sola ipotesi aggiuntiva **H3**$_{rst}$, la risolubilità delle equazioni del regolatore nel caso di **informazione completa** garantisce anche l'esistenza di una soluzione nel caso di **reazione dall'errore**

Dimostrazione

- **(necessità)** è una conseguenza immediata del **Lemma (RE)**
- **(sufficienza)** mostriamo che il controllore **(♯)** soddisfa sia **(S)**$_{RE}$ che **(R)**$_{RE}$

– il controllore **(♯)** è caratterizzato dalla terna di matrici (F, G, H) seguente

$$F = \begin{pmatrix} A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1C & S - G_1Q \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix} K & \Gamma - K\Pi \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK & B(\Gamma - K\Pi) \\ G_0C & A - G_0C + BK & P - G_0Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ G_1C & -G_1C & S - G_1Q \end{pmatrix}$$

– trasformando le coordinate con la matrice

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

si mette in evidenza una struttura diagonale <u>a blocchi</u>

$$T \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} A + BK & BK & B(\Gamma - K\Pi) \\ 0 & A - G_0C & P - G_0Q \\ 0 & -G_1C & S - G_1Q \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono in $\mathbb{C}^-$ per costruzione $\Rightarrow$ **(S)**$_{RE}$ è soddisfatta

– per provare che anche **(R)**$_{RE}$ è soddisfatta, basta verificare che esiste una coppia di matrici (Π, Σ) che risolvono le $(*)$-$(**)$-$(***)$ del **Lemma (RE)**; si prendano

$$\Pi \text{ usata nella costruzione del controllore,} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix}$$

– per la $(*)$ $\Pi S = A\Pi + BH\Sigma + P$ si ha

$$\Pi S = A\Pi + B \begin{pmatrix} K & (\Gamma - K\Pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} + P = A\Pi + B\Gamma + P$$

che è vera perchè (Π, Γ) risolvono già l'equazione $(\star)$ del **Teorema (IC)**

– per la $(**)$ $\Sigma S = F\Sigma$ si ha

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} A - G_0 C + BK & P - G_0 Q + B(\Gamma - K\Pi) \\ -G_1 C & S - G_1 Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix}$$

che è vera perchè, sfruttando l'equazione $(\star\star)$ del **Teorema (IC)** (ossia $C\Pi + Q = 0$), le due equazioni si trasformano ancora in $(\star)$ e in un'identità

– infine, la $(***)$ $C\Pi + Q = 0$ coincide con la $(\star\star)$ del **Teorema (IC)** ed è automaticamente vera

$\Rightarrow$ **(R)**$_{RE}$ è soddisfatta ■

Rimozione della ipotesi restrittiva H3$_{rst}$

l'ipotesi **H3$_{rst}$** **non comporta perdita di generalità**; vale infatti la seguente proposizione (dimostrazione nel libro, p. 62)

Proposizione **(riduzione di S)**

Si supponga valida l'ipotesi **H3**, *ma non la* **H3$_{rst}$**. *Allora per il sistema esteso*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^e & = & A^e x^e + B^e u \\ e & = & C^e x^e \end{array} \qquad \text{con } C^e = \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix},\ A^e = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix},\ B^e = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

esiste una trasformazione di coordinate $\tilde{x}^e = T^e x^e$ *tale che*

$$\tilde{A}^e = T^e A^e (T^e)^{-1} = \begin{pmatrix} A & \tilde{P} \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} P_1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}^e = C^e (T^e)^{-1} = \begin{pmatrix} C & \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}^e = T^e B^e = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

in cui la coppia di matrici $\begin{pmatrix} C & Q_1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & P_1 \\ 0 & S_{11} \end{pmatrix}$ *è rilevabile (ossia, soddisfa la condizione* **H3$_{rst}$**). ■

- riscrivendo il sistema nelle nuove coordinate $\tilde{x}^e = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = T^e \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$ e poi partizionando $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix}$ (secondo le decomposizioni nella proposizione), si può verificare che le componenti $\tilde{w}_2$ dell'esosistema **non influenzano l'errore** e

- il problema di regolazione **è equivalente** a quello per il processo

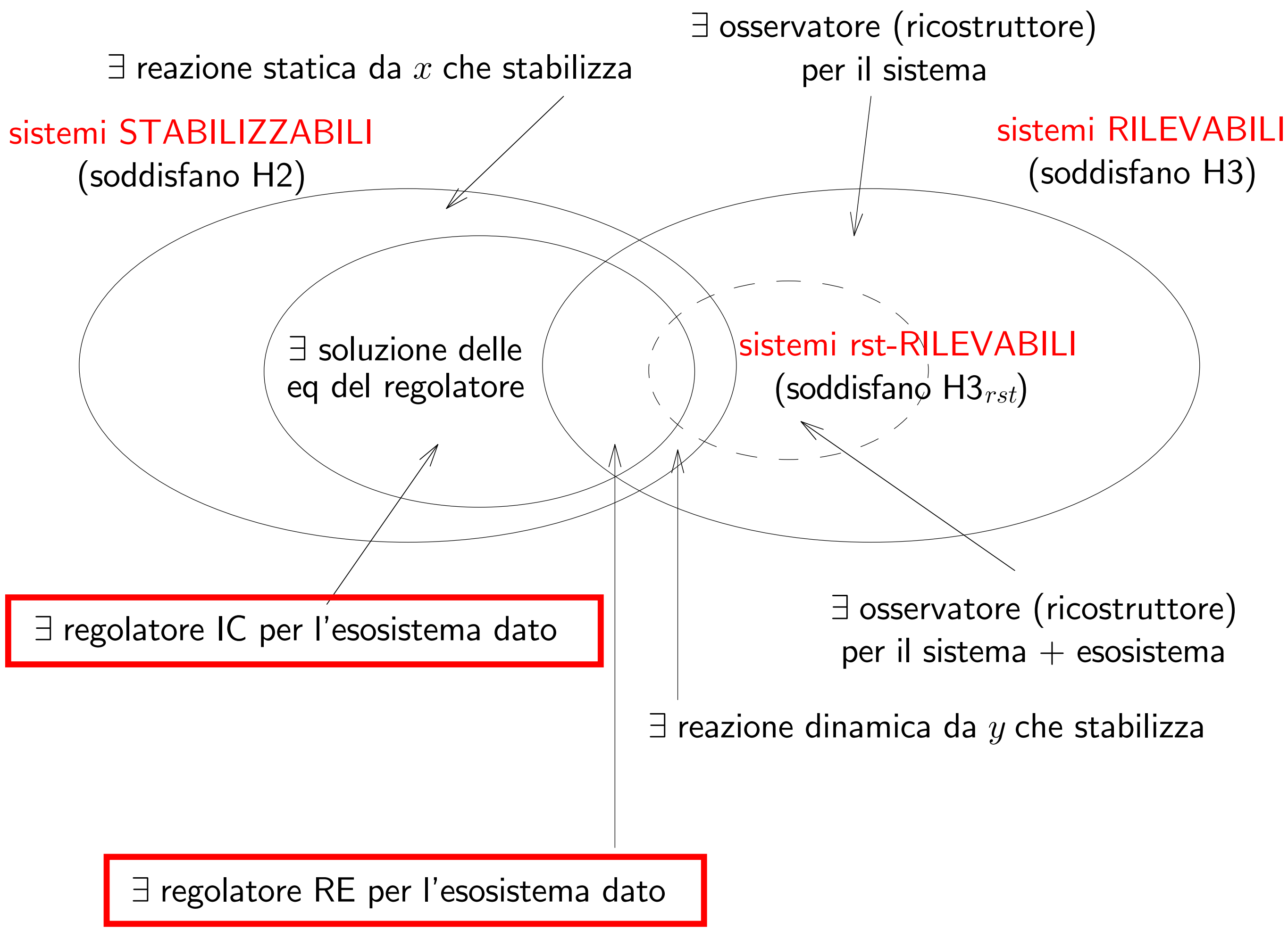
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + P_1\tilde{w}_1 \\ e &= C\tilde{x} + Q_1\tilde{w}_1 \end{aligned}$$

  con l'esosistema **ridotto** $\dot{\tilde{w}}_1 = S_{11}\tilde{w}_1$

- per quest'ultimo problema, è automaticamente soddisfatta l'ipotesi **H3**$_{rst}$

!! a seguito di questa decomposizione, la parte relativa a $\tilde{w}_1$ **potrebbe anche svanire** (ossia $\tilde{P} = \tilde{Q} \equiv 0$); in tal caso il problema diventa banale (**(S)**$_{IC} \Rightarrow$ **(R)**$_{IC}$)

riassumendo, dato un *particolare* esosistema S che soddisfa **H1** (cioè antistabile) . . .



Esempio 3

- riprendiamo l'Esempio 2 (asservimento su traiettoria di posizione sinusoidale per un carrello di massa m in moto orizzontale, con attrito viscoso b e disturbo di forza d costante) ... ma ora solo con **reazione dall'errore**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

- ipotesi **H1** e **H2** soddisfatte ed equazioni del regolatore (caso **IC**) risolubili con

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b\,\omega & \omega^2 m \end{pmatrix}$$

e $K = [\,-m\lambda_1\lambda_2 \quad -m(\lambda_1 + \lambda_2) + b\,] \iff$ autovalori $-\lambda_1, -\lambda_2 \in \mathbb{C}^-$

- occorre verificare se è soddisfatta l'ipotesi **H3** (rilevabilità), o meglio la **H3**$_{rst}$ (rilevabilità ristretta; in questo caso possiamo costruire il regolatore **direttamente**, senza procedere alla riduzione dell'esosistema)

- coppia (A, C) **osservabile** $\Rightarrow$ ipotesi **H3** vera; per quanto riguarda la **H3**$_{rst}$, la coppia (A^e, C^e) che caratterizza il sistema esteso è

$$A^e = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{m} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^e = \begin{pmatrix} C & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q}^e = \begin{pmatrix} C^e \\ C^e A^e \\ C^e A^{e2} \\ C^e A^{e3} \\ C^e A^{e4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \frac{b}{m} & \frac{1}{m} & 0 & -\omega^2 \\ 0 & -\left(\frac{b}{m}\right)^2 & -\frac{b}{m^2} & -\omega^3 & 0 \\ 0 & \left(\frac{b}{m}\right)^3 & \frac{b^2}{m^3} & 0 & \omega^4 \end{pmatrix}$$

- si ha $\det \mathcal{Q} \neq 0 \Rightarrow$ coppia (A^e, C^e) **osservabile** $\Rightarrow$ **H3**$_{rst}$ è soddisfatta

- esiste allora una matrice

$$G = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{01} \\ g_{02} \\ g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma\left(A^e - GC^e\right) = \sigma^{**}$$

con lo spettro σ^{**} sufficientemente più 'rapido' di $(-\lambda_1, -\lambda_2)$ (**dato σ^{**}, G è unica!**)

- il regolatore **con informazione completa** era

$$u = Kx + (\Gamma - K\Pi)\,w = (\,k_1 \;\; k_2\,)\,x + (\,1 \quad \omega\,(b-k_2) \quad -a(k_1+m\omega^2)\,)\,w$$

- il regolatore dinamico **con reazione dall'errore** è quindi (vedi la **(♯)**)

$$\begin{pmatrix} \dot\xi_{01} \\ \dot\xi_{02} \\ \dot\xi_{11} \\ \dot\xi_{12} \\ \dot\xi_{13} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} g_{01} & 1 & 0 & 0 & -g_{01} \\ g_{02}+\frac{k_1}{m} & \frac{k_2-b}{m} & 0 & -\frac{\omega}{m}(b-k_2) & -\left(g_{02}+\frac{k_1+m\omega^2}{m}\right) \\ \hline g_{11} & 0 & 0 & 0 & -g_{11} \\ g_{12} & 0 & 0 & 0 & -(g_{12}+\omega) \\ g_{13} & 0 & 0 & \omega & -g_{13} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \\ \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{01} \\ g_{02} \\ g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix} e$$

$$u = (\;k_1 \quad k_2\;) \begin{pmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{pmatrix} + (\;1 \quad \omega\,(b-k_2) \quad -\left(k_1+m\omega^2\right)\;) \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \end{pmatrix}$$

Una condizione sufficiente per la risolubilità

Corollario **(CS)**

Sotto le ipotesi **H1**, **H2** *e* **H3**, *il problema di regolazione dell'uscita con reazione dall'errore ha soluzione* **se** *le righe della matrice*

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{('system matrix')}$$

sono linearmente indipendenti per ogni $\lambda \in \sigma(S)$. ■

- di semplice verificabilità, comprende l'ipotesi 'naturale' **H3**, cioè la **rilevabilità** della coppia (A, C)
- garantisce la risolubilità delle 'equazioni del regolatore'
- la dimostrazione è basata su un criterio algebrico più generale (vedi appendice B.1 nel libro)

Caso particolare: Regolazione asintotica di sistemi SISO

- consideriamo processi **SISO** ($u \in I\!R$, $y \in I\!R$) e in **assenza di disturbi** ($P = 0$)

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \qquad (x \in I\!R^n)$$

- l'esosistema genera **solo** il riferimento desiderato $y_d(t)$ per l'uscita

$$\dot{w} = Sw \qquad y_d = -Qw \qquad (w \in I\!R^r)$$

$\Rightarrow$ è comodo in questo caso definire l'errore e in uscita con il *segno opposto*

$$e = y - y_d = Cx + Qw$$

- i risultati precedenti possono essere semplificati e resi più stringenti

- formuliamo un'ipotesi ulteriore, che risulterà **sufficiente** per risolvere il problema di regolazione (assieme alle **H2** e **H3**, oltre alla solita **H1**) ma anche **necessaria** sotto opportune condizioni

H4 la funzione di trasferimento del processo

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

non si annulla per nessun numero (complesso) $s \in \sigma(S)$

!! gli autovalori dell'esosistema non devono essere **zeri di trasmissione** del processo

$\boxed{\text{Lemma}}$ (SISO)

Sia dato un processo SISO ($m = p = 1$). Sotto le ipotesi **H2** *(stabilizzabilità di (A,B)) e* **H3** *(rilevabilità di (A,C)), per ogni $\alpha \in \overline{\mathbb{C}^+}$ si ha:*

$$\rho\begin{pmatrix} A-\alpha I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = n+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(\alpha) \neq 0$$

Dimostrazione

- ($\rho(\ldots) < n+1 \Rightarrow P(\alpha) = 0$): essendo le righe della 'system matrix' linearmente dipendenti, esistono $\gamma \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}$ (non entrambi nulli) tali che

$$\begin{aligned} \gamma^T(A-\alpha I) - \delta\, C &= 0^T \\ \gamma^T B &= 0 \end{aligned}$$

con $\delta \neq 0$ (else, **H2** violata) e $(A-\alpha I)$ non singolare (else, per ogni $x \in \ker(A-\alpha I)$, cioè x autovettore di A corrispondente all'autovalore α, si ha $Cx = 0$ e quindi **H3** violata)

si ha allora $\gamma^T = \delta C(A-\alpha I)^{-1}$ e quindi

$$0 = \gamma^T B = \delta C(A-\alpha I)^{-1}B \qquad \text{(ossia } P(\alpha) = 0\text{)}$$

- ($P(\alpha) = 0 \Rightarrow \rho(\ldots) < n+1$): α, che non è polo di $P(s)$, non può essere neanche un autovalore di A (else, **H2** e/o **H3** violate)

posto $\tilde{\gamma}^T = C(A-\alpha I)^{-1}$, si ha

$$(\,\tilde{\gamma}^T \quad -1\,)\begin{pmatrix} A-\alpha I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = (\,0^T \quad 0\,) \qquad \text{(ossia } \rho(\ldots) < n+1\text{)} \qquad \blacksquare$$

!! questo **Lemma (SISO)**, usato con il **Corollario (CS)**, permette immediatamente di concludere la **sufficienza** delle ipotesi **H2**, **H3** e **H4** per la risoluzione del problema del regolatore

Proposizione **(SISO)**

Sia dato un processo SISO ($m=p=1$) *con* $P=0$ *(assenza di disturbi). Si supponga la coppia* (Q,S) *(dell'esosistema) osservabile e sia valida l'ipotesi* **H1**. *Il problema di regolazione dell'uscita con reazione dall'errore ha soluzione* **se e solo se** *sono valide le ipotesi* **H2**, **H3** *e* **H4**. ■

- l'ipotesi di osservabilità dell'esosistema non è restrittiva (else, decomposizione di Kalman rispetto all'osservabilità $\Rightarrow$ la parte non osservabile non influenzerà l'errore e, quindi ci si può ridurre alla sola parte osservabile dell'esosistema . . .)

- una conseguenza importante della Proposizione: sotto le ipotesi **H1**, **H2** e **H3**, i processi SISO **a fase minima** ammettono **certamente** soluzione al problema del regolatore RE

Esempio 4

- dato il processo SISO e senza disturbi descritto da $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

si vuole regolare l'uscita ad un valore costante w^0 mediante **reazione dall'errore**

$$\dot{w} = 0 \quad (S = 0) \qquad\qquad y_d = w^0 \quad (Q = -1)$$

- verifica ipotesi **H2**: (A, B) <u>non</u> raggiungibile poiché

$$\rho \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

essendo $\sigma(A) = \{1, 2, -1\}$, conviene fare il PBH test solo su $\lambda = -1$

$$\rho \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix}\Big|_{\lambda=-1} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \lambda = -1$ è l'unico autovalore non raggiungibile $\Rightarrow (A, B)$ **<u>stabilizzabile</u>**

- verifica ipotesi **H3**: (A, C) <u>non</u> osservabile poiché

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 1.5 \\ -1 & 2.5 & 2.5 \\ -1 & 4.5 & 4.5 \end{pmatrix} = 2$$

- dal PBH test su $\lambda = -1 \Rightarrow (A, C)$ **rilevabile**

$$\rho \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} \Bigg|_{\lambda=-1} = \rho \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ -1 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} = 2$$

- **H1, H2** e **H3** soddisfatte; inoltre, l'esosistema è ovviamente osservabile

- in queste condizioni (vedi **Proposizione (SISO)**), il problema è risolubile se e solo se è soddisfatta l'ipotesi **H4**

- proviamoci comunque. . .

- equazioni del regolatore IC ($\Pi S = A\Pi + B\Gamma$, $0 = C\Pi + Q$) nelle incognite $\Pi : (3 \times 1)$ e $\Gamma : (1 \times 1)$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma$$

$$0 = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} - 1$$

- dalla quarta equazione scalare si ha $\pi_1 = 1.5(\pi_2 + \pi_3) - 1$ che sostituito nella prima fornisce

$$0 = 2(\pi_2 + \pi_3) - 1 + 2\gamma$$

mentre sommando la seconda e la terza equazione si ha **inconsistenza** poichè

$$0 = 2(\pi_2 + \pi_3) + 2\gamma$$

$\Rightarrow$ le equazioni del regolatore IC **non** sono risolubili $\Rightarrow$ $\nexists$ **neanche** il regolatore RE

- infatti, calcolando la funzione di trasferimento del processo si ha

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s}{(s-2)(s-1)}$$

e quindi

$$P(s)|_{s=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda = 0 \in \sigma(S) \text{ !!}$$

violando l'ipotesi **H4**

Confronto con la teoria 'elementare' per sistemi SISO

- si consideri un processo SISO, descritto nello spazio di stato e avente funzione di trasferimento $P(s)$

- si vuole determinare uno schema di controllo a retroazione unitaria tale da

  (i) stabilizzare asintoticamente il sistema ad anello chiuso

  (ii) annullare asintoticamente l'errore $y - y_d$, con

$$y_d(t) = \exp(\alpha t) w^0 \qquad \alpha \geq 0$$

  (generato dall'esosistema $\dot{w} = \alpha w$; poiché $(Q, S) = (-1, \alpha)$, l'esosistema è osservabile!)

- come visto (**Proposizione (SISO)**), tale problema ha soluzione se e solo se il processo è **stabilizzabile**, **rilevabile** e $P(\alpha) \neq 0$; prendiamo queste ipotesi

- per la costruzione pratica di un controllore (descritto nello spazio di stato e con funzione di trasferimento $C(s)$) che risolve il problema, si distinguono **due casi**

- $P(s)$ **con polo in** α**:** l'ipotesi **H3**$_{rst}$ non può essere soddisfatta in quanto

$$\begin{array}{l} A^e = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ C^e = \begin{pmatrix} C & -1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \rho \begin{bmatrix} A^e - \lambda I \\ C^e \end{bmatrix} \Bigg|_{\lambda=\alpha} = \rho \begin{bmatrix} A - \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \\ C & -1 \end{bmatrix} < n+1$$

essendo $\alpha \geq 0$ anche autovalore di A (PBH test violato)

dalla **Proposizione** sulla riduzione di S (da effettuarsi quando vale la **H3** ma non la **H3**$_{rst}$), la decomposizione indicata porterà ad un esosistema ridotto di **dimensione zero** (essendo S già uno scalare)

$\Rightarrow$ il problema viene risolto da un **qualsiasi controllore che stabilizza** il processo mediante retroazione dall'errore

!! consistente con quanto si fa nell'approccio ingresso-uscita: il polo in α è già nel processo $\rightarrow$ non introduco **nessuna azione** specifica per il **regime permanente** nel controllore $C(s)$

- <u>$P(s)$ **senza polo in α**</u>**:** l'ipotesi **H3**$_{rst}$ è soddisfatta

$\Rightarrow$ si segue la costruzione già vista (osservatore + retroazione dallo stato stimato con Π, Γ dal caso **IC**) essendo le **equazioni del regolatore** risolubili

!! la soluzione (**più semplice** in questo caso particolare) ottenibile con l'approccio ingresso-uscita **si può rileggere** in termini di spazio di stato/regolatore

1. l'aggiunta di $C_{rp}(s) = 1/(s - \alpha)$ a monte del processo equivale a considerare il **processo esteso**
$$\dot{x} = Ax + B\xi_1 \qquad \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + v \qquad y = Cx$$
ancora stabilizzabile e rilevabile (poiché valevano **H2**, **H3** e **H4**)

2. esiste allora un **controllore dinamico** (con in ingresso l'errore e, in uscita v)
$$\dot{\xi}_2 = F\xi_2 + Ge \qquad v = H\xi_2$$
che stabilizza asintoticamente il sistema ad anello chiuso

3. il controllore dinamico complessivo
$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \alpha\xi_1 + H\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= F\xi_2 + Ge \\ u &= \xi_1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{1}{s-\alpha} H(sI - F)^{-1}G$$
risolve il problema di regolazione (verificabile utilizzando il **Lemma (RE)**)

Esempio 5

- per il processo costituito dal doppio integratore senza disturbi (vedi Esempio 1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  si vuole regolare l'uscita ad un valore costante w^0 mediante **reazione dall'errore**

$$\dot{w} = 0 \quad (S = 0) \qquad\qquad y_d = w^0 \quad (Q = -1)$$

- (A, B) è **raggiungibile** e (A, C) è **osservabile**

- essendo $a = 0$, le equazioni del regolatore forniscono...

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \gamma = 0$$

- il regolatore (**con informazione completa**) è

$$u = Kx + (\Gamma - K\Pi)\, w = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_0 w$$

  dove $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ è un polinomio di Hurwitz

- il processo esteso è certamente **non osservabile** (il processo ha già un polo nell'origine, coincidente con l'autovalore dell'esosistema!); per verifica, si ha

$$A^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \rho\begin{pmatrix} C^e \\ C^e A^e \\ C^e A^{e2} \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

- occorre allora procedere ad un cambio di coordinate che metta in evidenza la rilevanza solo di un esosistema ridotto (vedi **Proposizione** sulla riduzione di S) e quindi ricondursi ad un **problema equivalente** che soddisfi l'ipotesi **H3**$_{rst}$

  qui: l'esosistema ha dimensione $r = 1$, 'ridurlo' vuol dire poterlo 'eliminare' (in modo opportuno) dalla formulazione . . . allora **(S)**$_{RE}$ $\Rightarrow$ **(R)**$_{RE}$

- utilizzando la trasformazione di coordinate $\tilde{x}^e = T^e x^e$ con

$$(T^e)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad T^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  si ottiene una partizione (in cui Q_1, S_{11}, S_{12} svaniscono e $S_{22} = S = 0$)

$$\tilde{A}^e = T^e A^e (T^e)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^e \qquad \tilde{B}^e = T^e B^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B^e$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^e = C^e (T^e)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

- nelle nuove coordinate

$$\tilde{x}^e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = T^e x^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - w \\ x_2 \\ w \end{pmatrix}$$

l'espressione del regolatore (**con informazione completa**) si riscrive come

$$u = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_0 w = -a_0 \tilde{x}_1 - a_1 \tilde{x}_2 = K\tilde{x}$$

che mostra come basti stabilizzare $\tilde{x}$ per avere anche la regolazione a zero di e

- per determinare un regolatore (**con reazione dall'errore**) è sufficiente costruire un **osservatore per** $\tilde{x}$ ($\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu$, $e = C\tilde{x}$, con (A, C) **osservabile**)

$$\dot{\xi}_0 = A\xi_0 + Bu + G_0(e - C\xi_0) \qquad \sigma(A - G_0 C) \in \mathbb{C}^-$$

e poi utilizzare **la stima dello stato** in $u = -a_0\xi_{01} - a_1\xi_{02} = K\xi_0$

Considerazioni sulla robustezza del regolatore

- caso realistico: del processo è noto un **modello nominale**

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + P_0 w \qquad e = C_0 x + Q_0 w$$

  in base al quale si progetta un regolatore dell'uscita, mentre il **modello effettivo**, a causa di **variazioni parametriche** (perturbazioni, incertezze, ...), è caratterizzato da un insieme di matrici

$$\{A, B, C, P, Q\} = \{A_0 + \delta A, B_0 + \delta B, C_0 + \delta C, P_0 + \delta P, Q_0 + \delta Q\}$$

  con valori in un intorno $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ contenente $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$

- l'esosistema $\dot{w} = Sw$ è invece noto **con certezza** (benché...)

- tre quesiti:

  a) cosa garantisce l'**esistenza di soluzioni** al variare dei valori effettivi in $\mathcal{P}_0$?

  b) è possibile ottenere la regolazione dell'uscita con **un fissato controllore** al variare dei valori effettivi in $\mathcal{P}_0$?

  c) in tal caso, quanto può essere ampio l'intorno $\mathcal{P}_0$?

Buona posizione

- un problema di regolazione dell'uscita è **ben posto** in $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ se esiste un intorno aperto $\mathcal{P}_0$ di $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ tale che il problema è risolubile per ogni $\{A, B, C, P, Q\}$ in $\mathcal{P}_0$

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **(BP)**

Siano valide l'ipotesi **H1** *per l'esosistema e le ipotesi* **H2** *e* **H3** *per il processo in condizioni nominali (ossia per $\{A, B, C, P, Q\} = \{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$). Il problema di regolazione dell'uscita con reazione dall'errore è ben posto in $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$* **se e solo se** *le righe della matrice*

$$\begin{pmatrix} A_0 - \lambda I & B_0 \\ C_0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti per ogni $\lambda \in \sigma(S)$. ■

Dimostrazione per continuità. . .

- la buona posizione, pur essendo un requisito indispensabile, **appare ancora insufficiente** in pratica: se il regolatore dipende dai valori effettivi dei parametri, che non sono noti, non è possibile costruirlo $\Rightarrow$ l'ideale sarebbe che il **medesimo** regolatore funzionasse in tutto l'intorno di valori dei parametri

Regolazione robusta

- un fissato controllore dinamico della forma

$$\dot{\xi} = F\xi + Ge \qquad u = H\xi$$

è un **regolatore robusto** in $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ se:

(i) risolve il problema di regolazione dell'uscita mediante reazione dall'errore per il processo nominale con $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$

(ii) risolve il problema di regolazione dell'uscita mediante reazione dall'errore per il processo perturbato con $\{A_0 + \delta A, B_0 + \delta B, C_0 + \delta C, P_0 + \delta P, Q_0 + \delta Q\}$ per **qualsiasi perturbazione** $\{\delta A, \delta B, \delta C, \delta P, \delta Q\}$ tale che il corrispondente sistema ad anello chiuso **mantenga la stabilità asintotica**, ossia tale che

$$\sigma \begin{pmatrix} A_0 + \delta A & (B_0 + \delta B)H \\ G(C_0 + \delta C) & F \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^-$$

- ovviamente, la proprietà di buona posizione è **necessaria** per l'esistenza di un regolatore robusto in $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$; ma è anche **sufficiente**! Infatti...

Proposizione **(RR)**

Siano valide l'ipotesi **H1** *per l'esosistema e le ipotesi* **H2** *e* **H3** *per il processo in condizioni nominali (ossia per* $\{A, B, C, P, Q\} = \{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$*). Esiste un regolatore robusto in* $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ **se e solo se** *il problema è ben posto, ovvero* **se e solo se** *le righe della matrice*

$$\begin{pmatrix} A_0 - \lambda I & B_0 \\ C_0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti per ogni $\lambda \in \sigma(S)$*.* ■

!! il fatto che il problema sia **ben posto** è tutto quello che serve per sapere che la regolazione robusta è possibile

!! per l'effettiva costruzione di un regolatore robusto (non in programma), si veda il libro, cap. II.7