

Università di Roma Tre

Complementi di Controlli Automatici

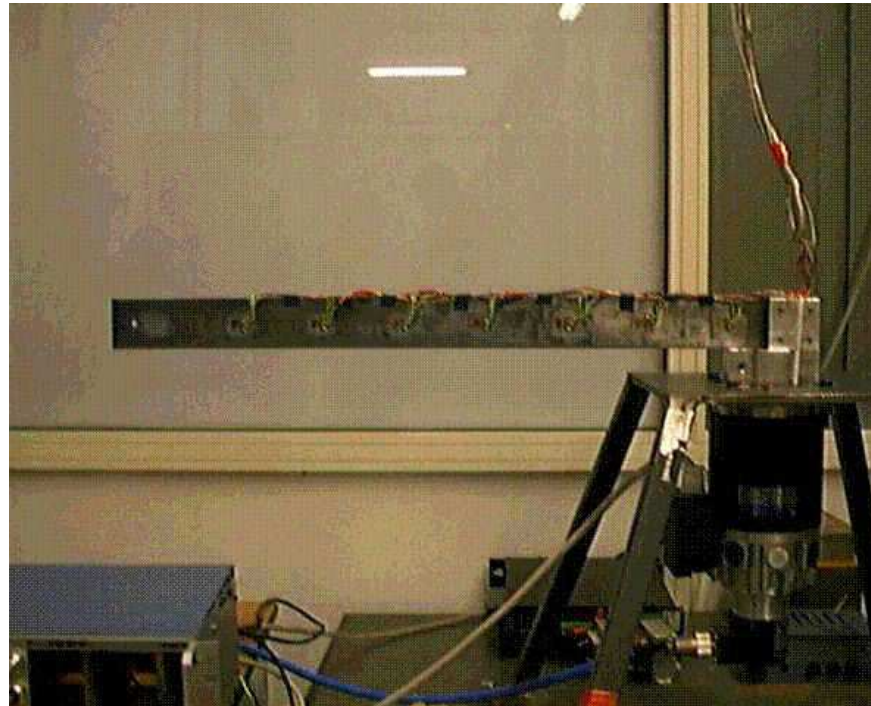
Controllo di un robot flessibile

Prof. Giuseppe Oriolo

DIS, Università di Roma "La Sapienza"

Obiettivo del controllo

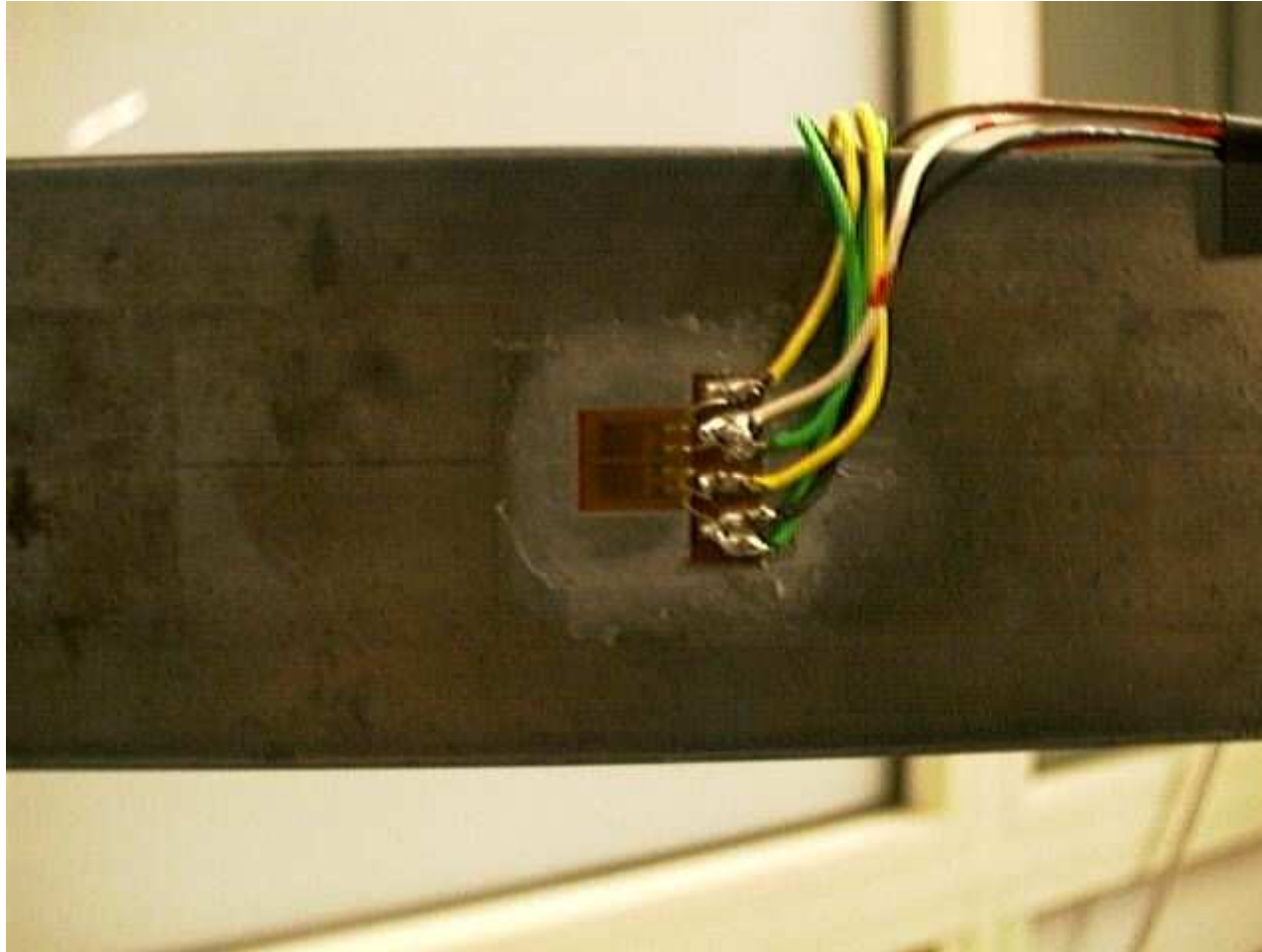
- regolatore asintotico per l'asservimento di traiettorie **di uscita** in posizione per un singolo braccio flessibile



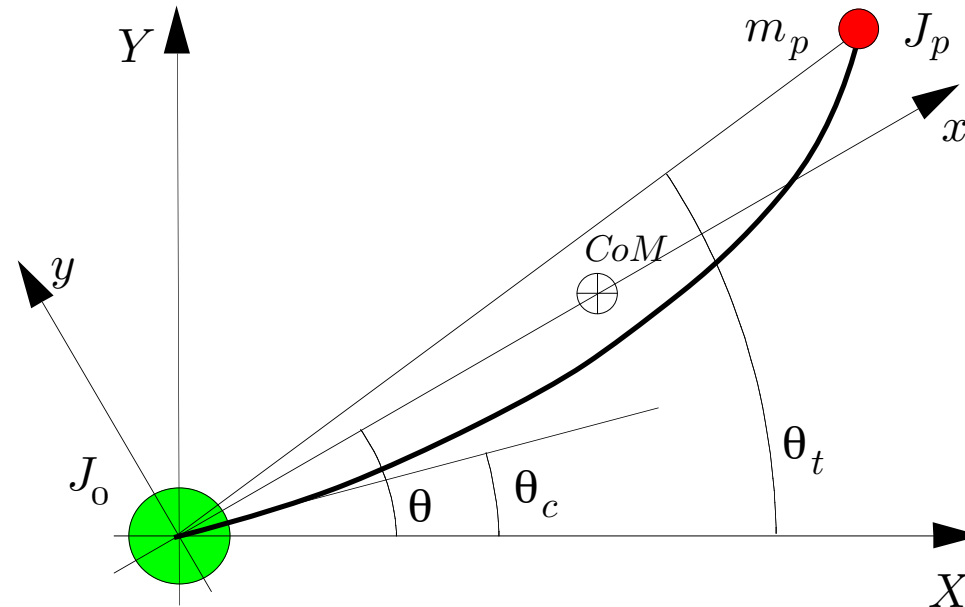
Architettura di controllo

- **parte meccanica:** braccio flessibile (di lunghezza ℓ [m]) in rotazione sul piano orizzontale, costituito da una *barra sottile* di acciaio temperato (di densità di massa uniforme ρ [kg/m]), con determinate caratteristiche elastiche (modulo di Young E di rigidezza flessionale \times inerzia I della sezione trasversale = EI [Nm²])
- **elaborazione dati e controllo:** effettuati su PC, dotato di scheda di interfaccia ingresso-uscita, in modo digitale (ad es., ad una frequenza di campionamento di 4 [KHz])
- **attuatore:** motore CC pilotato in corrente di armatura (con massimo guadagno corrente-coppia [Nm/A]), avente inerzia del rotore J_0 [kg m²] e collegato mediante accoppiamento diretto (*direct-drive*) con il carico

- **sensori:** *encoder ottico* sull'asse del motore (valore tipico: 4000 impulsi/giro $\times 4$ da elettronica di elaborazione) per la misura di posizione angolare; ponti estensimetrici (*strain gauges*) completi (nella figura precedente sono 7) per la misura della deflessione lungo il braccio



Modellistica dinamica



- sistemi di riferimento: assoluto e solidale al centro di massa CoM istantaneo
- eventuale presenza di un *tip payload*, un carico utile in punta di massa m_p [kg] e con inerzia J_p [kg m²], caratterizzato da una posizione angolare θ_t

Trave di Eulero-Bernoulli

- braccio flessibile (solo sul piano orizzontale di moto) modellato come *trave di Eulero-Bernoulli* per **piccole deformazioni**
- posizione angolare $\theta(t)$ dell'asse x passante per CoM (non misurabile tramite il solo encoder al giunto, da cui si legge invece direttamente $\theta_c(t)$)
- la deformazione laterale $w(x, t)$, con $x \in [0, \ell]$, si assume puramente *normale* all'asse x ; è una funzione dello spazio (il punto x lungo la struttura) e del tempo
- !! il modello dinamico sarebbe **infinito-dimensionale** (anche se lineare) per la natura distribuita della deformazione; occorre una opportuna 'discretizzazione' ...

- dal **principio di Hamilton**, la deformazione laterale $w(x, t)$ e la posizione angolare $\theta(t)$ soddisfano la seguente *equazione alle derivate parziali*

[con la notazione: $()' = d()/dx$, $()\dot{ } = d()/dt$]

$$EIw''''(x, t) + \rho(\ddot{w}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) = 0$$

e alla equazione (*del moto rigido*)

$$u(t) - J\ddot{\theta}(t) = 0$$

dove $J = J_0 + (\rho\ell^3)/3 + J_p + m_p\ell^2$ è l'inerzia totale (alla base di rotazione) e u è la coppia prodotta dal motore (ingresso di controllo)

- da risolvere imponendo delle **condizioni al contorno** associate, di tipo geometrico o dinamico (bilanciamento di forze e momenti di taglio)

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ EIw''(0, t) &= J_0(\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}'(0, t)) - u(t) \\ EIw''(\ell, t) &= -J_p(\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}'(\ell, t)) \\ EIw'''(\ell, t) &= m_p(\ell\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(\ell, t)) \end{aligned}$$

- posto $u(t) \equiv 0$ (evoluzione libera), l'equazione alle derivate parziali si risolve con il metodo di **separazione delle variabili**, ponendo per la deformazione laterale

$$w(x, t) = \phi(x)\delta(t) \quad (*)$$

dove

- $\phi(x)$ è il **modo spaziale** di deformazione del braccio
 - $\delta(t)$ è la **variabile temporale** che 'pesa' tale deformazione
- dall'equazione del moto rigido $u(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = 0$, per cui sostituendo la (*) nella equazione alle derivate parziali e separando i termini si ottiene

$$\frac{EI}{\rho} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = - \frac{\ddot{\delta}(t)}{\delta(t)} \triangleq \omega^2$$

in cui l'ultima posizione (ω^2 per ora non definita) è legata al fatto che, dovendo essere uguali quantità indipendenti (una funzione dello spazio, l'altra funzione del tempo), queste non possono che essere costanti (avere assunto tale costante positiva ($\omega^2 > 0$)) ha una motivazione più 'tecnica' —problema *autoaggiunto!*)

- si ottengono allora **due equazioni separate**: la

$$\ddot{\delta}(t) = -\omega^2 \delta(t)$$

che ha soluzione generale

$$\delta(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

con c_1, c_2 dipendenti dalle condizioni iniziali $\delta(0)$ e $\dot{\delta}(0)$ di evoluzione libera, e la

$$\phi''''(x) = \beta^4 \phi(x) \quad \beta^4 = \frac{\rho \omega^2}{EI}$$

che ha soluzione generale (provare per credere!)

$$\phi(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x$$

con A, B, C, D da ottenersi imponendo le 4 condizioni al contorno geometrico/dinamiche sulla $w(x, t)$

- sostituendo in queste la (*), usando la $\ddot{\delta} = -\omega^2 \delta$ e notando che esse devono valere per ogni $\delta(t)$, si ottengono infatti condizioni al contorno solo sulla $\phi(x)$

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ EI\phi''(0) + J_0\omega^2\phi'(0) &= 0 \\ EI\phi''(l) - J_p\omega^2\phi'(l) &= 0 \\ EI\phi'''(l) + m_p\omega^2\phi(l) &= 0 \end{aligned}$$

- sostituendo in queste la soluzione generale $\phi(x)$, si ottiene un sistema di equazioni lineari **omogenee** della forma

$$\left(\mathcal{A}(EI, \rho, \ell, J_0, m_p, J_p, \beta, \omega^2 = \frac{EI\beta^4}{\rho}) \right) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

nel quale, dovendo escludere la soluzione banale ($A = B = C = D = 0$), si deve imporre che il **determinante della matrice \mathcal{A} sia nullo**

- questo avviene in corrispondenza a infinite (ma contabili!) radici, denominate β_i (con $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 \dots$), dell'**equazione caratteristica** (qui, è un'equazione trascendente)

$$\begin{aligned} & (csh - sch) - \frac{2m_p}{\rho}\beta_i s sh - \frac{m_p}{\rho^2}\beta_i^4 (J_0 + J_p)(csh - sch) - \frac{2J_p}{\rho}\beta_i^3 cch \\ & - \frac{J_0}{\rho}\beta_i^3 (1 + cch) + \frac{J_0 J_p}{\rho^2}\beta_i^6 (csh + sch) - \frac{J_0 J_p m_p}{\rho^3}\beta_i^7 (1 - cch) = 0 \end{aligned}$$

dove $s = \sin \beta_i \ell$, $c = \cos \beta_i \ell$, $sh = \sinh \beta_i \ell$, $ch = \cosh \beta_i \ell$

- **ad ogni radice β_i** sono allora associate le seguenti quantità: una $\omega_i^2 = EI\beta_i^4/\rho$; una **soluzione** del sistema (*), ossia i coefficienti (A_i, B_i, C_i, D_i) definiti a meno di un fattore di scala, e quindi un modo spaziale di deformazione $\phi_i(x)$; una variabile temporale di deformazione $\delta_i(t)$ (la cui pulsazione è proprio ω_i)

- si ha allora che la deformazione laterale è descritta dalla

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta_i(t) \approx \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(x) \delta_i(t)$$

dove n_e è il numero di modi che si vogliono includere nel modello approssimato

- di fatto, si è risolto un *problema agli autovalori* con i **modi di deformazione**

$$\phi_i(x) = A_i \sin \beta_i x + B_i \cos \beta_i x + C_i \sinh \beta_i x + D_i \cosh \beta_i x$$

e le **variabili di deformazione**

$$\delta_i(t) = c_{1i} \sin \omega_i t + c_{2i} \cos \omega_i t$$

in cui ϕ_i sono gli autovettori (da normalizzare) e ω_i sono le **autofrequenze di vibrazione** (\leftrightarrow autovalori associati agli autovettori) proprie della struttura flessibile

- grazie alla ortogonalità degli autovettori trovati con questo metodo (e poi normalizzati opportunamente), il **modello dinamico** è particolarmente semplice

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= u \\ \ddot{\delta}_i + \omega_i^2 \delta_i &= \phi_i'(0)u \quad i = 1, \dots, n_e \end{aligned}$$

- il modello mette in evidenza le seguenti proprietà notevoli:
 - il disaccoppiamento tra moto rigido $\theta(t)$ e ciascun moto vibratorio $\delta_i(t)$, in condizioni di evoluzione libera ($u(t) \equiv 0$)
 - l'eccitabilità di tutti i modi da parte di un ingresso $u(t) \neq 0$, pesata dalla $\phi'_i(0)$ — la tangente alla base del braccio di ciascun modo di deformazione
 - la 'rigidezza' della struttura è riassunta dai valori delle autofrequenze ω_i^2
 - ciascun moto vibratorio, se inizialmente eccitato, è persistente in evoluzione libera
- è possibile includere uno **smorzamento modale** nel modello dinamico

$$J\ddot{\theta} = u$$

$$\ddot{\delta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\delta}_i + \omega_i^2\delta_i = \phi'_i(0)u \quad i = 1, \dots, n_e$$

dove $\zeta_i \in [0, 1)$ sono i coefficienti di smorzamento (vedi termine trinomio!)

- versione **matriciale** delle equazioni; posto $q = (\theta \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n_e})^T$ (vettore delle *coordinate generalizzate*) si ha un sistema tipo *massa-molla-smorzatore*

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Hq = Bu$$

con

$$M = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2Z\Omega \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi' \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \text{diag} \{ \omega_1, \dots, \omega_{n_e} \}, \quad Z = \text{diag} \{ \zeta_1, \dots, \zeta_{n_e} \}, \quad \Phi' = (\phi'_1(0) \ \dots \ \phi'_{n_e}(0))^T$$

Scelta dell'uscita controllata

- le possibili uscite y di interesse per il controllo del moto sono almeno due
 - **uscita a livello di giunto:** posizione angolare della base del braccio flessibile

$$\theta_c = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i'(0) \delta_i$$

!! è sempre un'uscita a **fase minima** (la corrispondente funzione di trasferimento I/O ha zeri nel semipiano complesso a parte reale negativa — o nulla, in assenza di smorzamento modale)

- **uscita a livello di tip:** posizione angolare della punta del braccio flessibile

$$\theta_t = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi_i(\ell)}{\ell} \delta_i$$

!! è un'uscita a **fase non minima** (esistono zeri nel semipiano complesso a parte reale positiva (in realtà, coppie reali simmetriche in assenza di smorzamento modale)) almeno in assenza di carico utile in punta

Commenti sulla forma delle uscite

- l'uscita a livello di tip è una approssimazione lineare (**per piccole deformazioni**) della posizione angolare effettiva della punta del braccio flessibile

$$\theta_t = \theta + \arctan \frac{w(\ell, t)}{\ell} \approx \theta + \frac{w(\ell, t)}{\ell} = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi_i(\ell)}{\ell} \delta_i$$

- analogamente, la posizione angolare di un *generico punto* posto lungo la struttura a distanza x dalla base si può approssimare come

$$\theta_x = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi_i(x)}{x} \delta_i$$

- la posizione angolare della base del braccio si può determinare come processo limite $\theta_c = \lim_{x \rightarrow 0} \theta_x$, usando il teorema di De L'Hôpital per la forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi_i(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi_i'(x)}{1} = \phi_i'(0)$$

Equazioni di stato

- posto $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n_e+1)}$ si ha

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}H & -M^{-1}D \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix} \quad C = (C \quad 0)$$

- la matrice C dipende dall'uscita scelta (**giunto** o **tip**)

$$C_g = (1 \quad \Phi'^T) \quad C_t = (1 \quad \Phi_\ell^T)$$

$$\text{con } \Phi_\ell^T = \left(\frac{\phi_1(\ell)}{\ell} \quad \dots \quad \frac{\phi_{n_e}(\ell)}{\ell} \right)$$

Funzioni di trasferimento ingresso-uscita

- ricavabili dalle equazioni di stato come $P(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$, con $\mathcal{C} = C_g$ (**uscita al giunto**) o C_t (**uscita al tip**); è però più immediato trasformare secondo Laplace il modello dinamico (nella forma scalare) del secondo ordine, e poi risolvere per $y(s)/u(s)$
- funzione di trasferimento coppia-posizione angolare **giunto**

$$\begin{aligned}
 P_g(s) &= \frac{1}{Js^2} + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi'_i(0)^2}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{J} \prod_{i=1}^{n_e} (s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2) + s^2 \sum_{i=1}^{n_e} \phi'_i(0)^2 \prod_{j \neq i}^{n_e} (s^2 + 2\zeta_j\omega_j s + \omega_j^2)}{s^2 \prod_{i=1}^{n_e} (s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2)}
 \end{aligned}$$

- in modo analogo, la funzione di trasferimento coppia-posizione angolare **tip**

$$\begin{aligned}
 P_t(s) &= \frac{1}{Js^2} + \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi'_i(0) \frac{\phi_i(\ell)}{\ell}}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{J} \prod_{i=1}^{n_e} (s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2) + s^2 \sum_{i=1}^{n_e} \phi'_i(0) \frac{\phi_i(\ell)}{\ell} \prod_{j \neq i}^{n_e} (s^2 + 2\zeta_j\omega_j s + \omega_j^2)}{s^2 \prod_{i=1}^{n_e} (s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2)}
 \end{aligned}$$

ad esempio, per $n_e = 2$ e senza smorzamento modale

$$P_t(s) = \frac{\frac{1}{J}(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) + s^2 \left(\phi'_1(0) \frac{\phi_1(\ell)}{\ell} (s^2 + \omega_2^2) + \phi'_2(0) \frac{\phi_2(\ell)}{\ell} (s^2 + \omega_1^2) \right)}{s^2 (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$$

Un esempio numerico

- dati:

$$J_0 = 0.002, \quad \ell = 1, \quad \rho = 0.5, \quad EI = 1 \quad (m_p = J_p = 0)$$

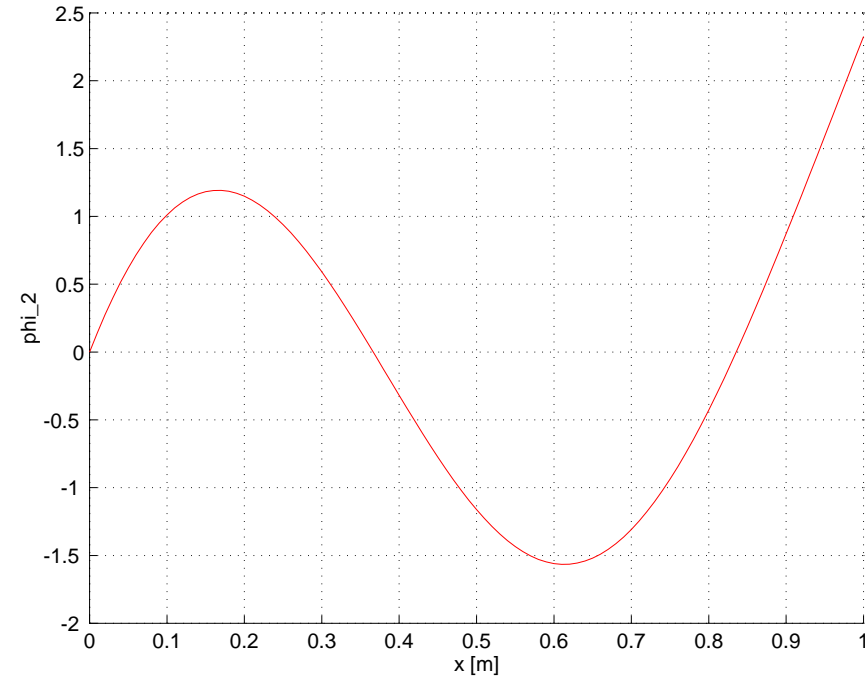
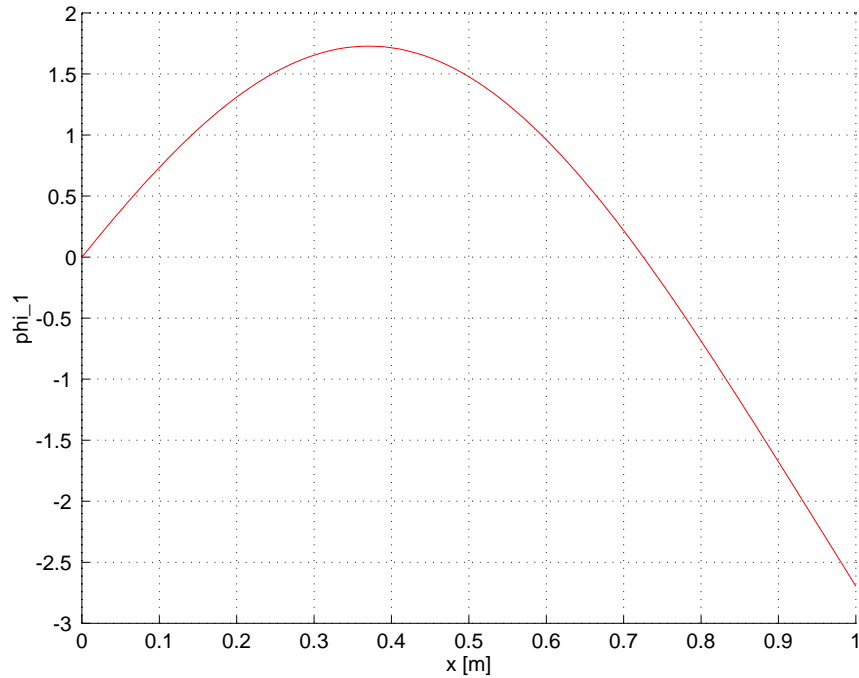
- consideriamo fino a $n_e = 5$ modi; si ha

$$\Omega^2 = \text{diag} \{421.585, 3122.603, 10273.194, 31562.286, 82049.350\}$$

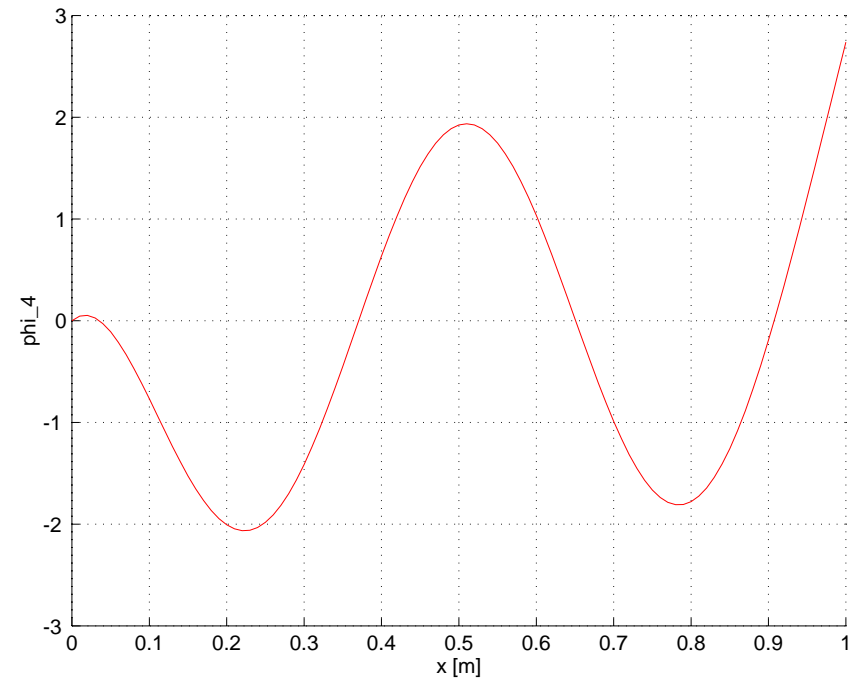
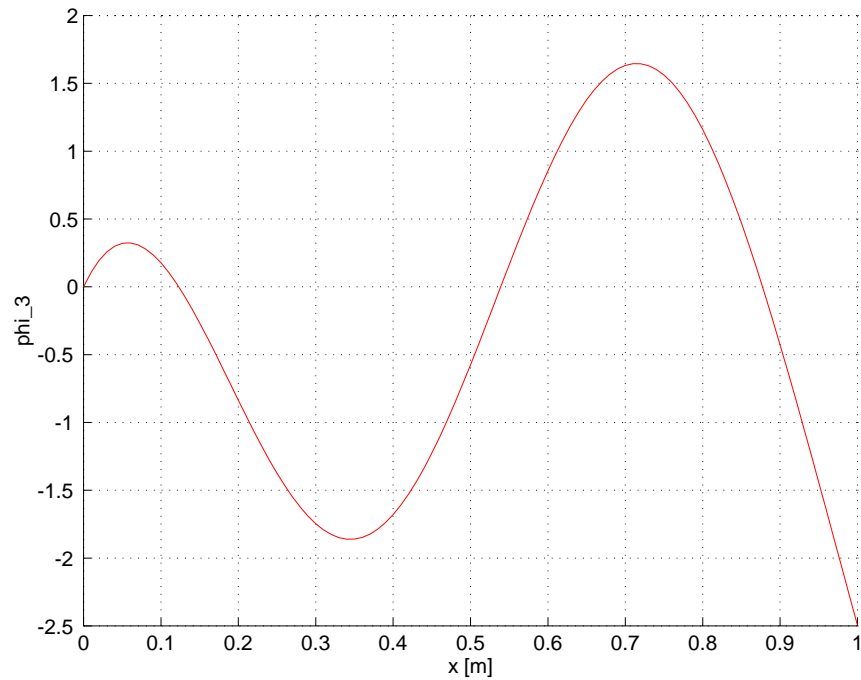
$$\Phi'^T = \begin{pmatrix} 7.8259 & 14.6803 & 12.1284 & 6.4761 & 3.7648 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\ell^T = \begin{pmatrix} -2.6954 & 2.3268 & -2.4970 & 2.7380 & -2.7982 \end{pmatrix}$$

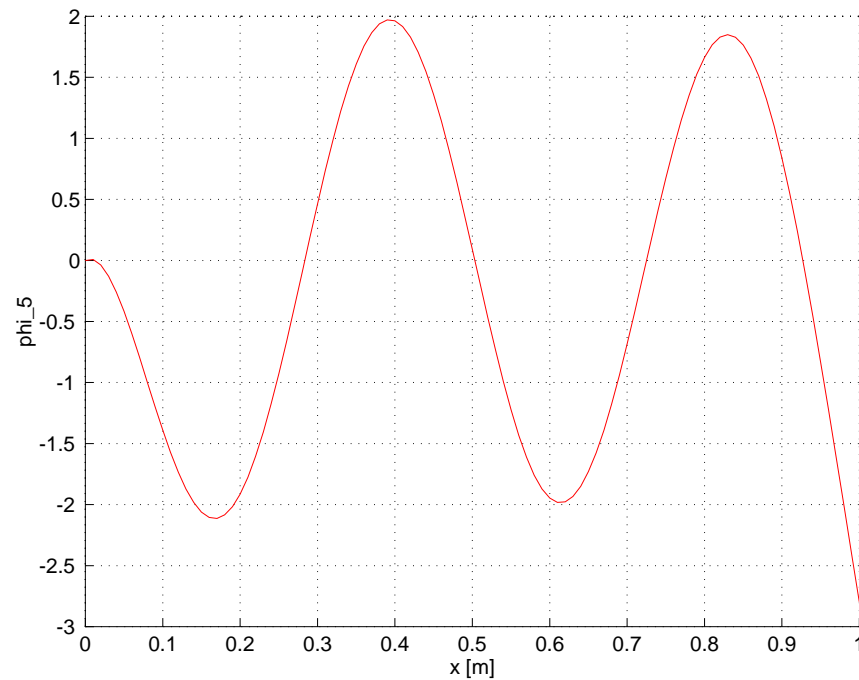
Modi flessionali



primo e **secondo** modo di vibrazione, a frequenze $f_1 = 3.2678$ e $f_2 = 8.8936$ [Hz]



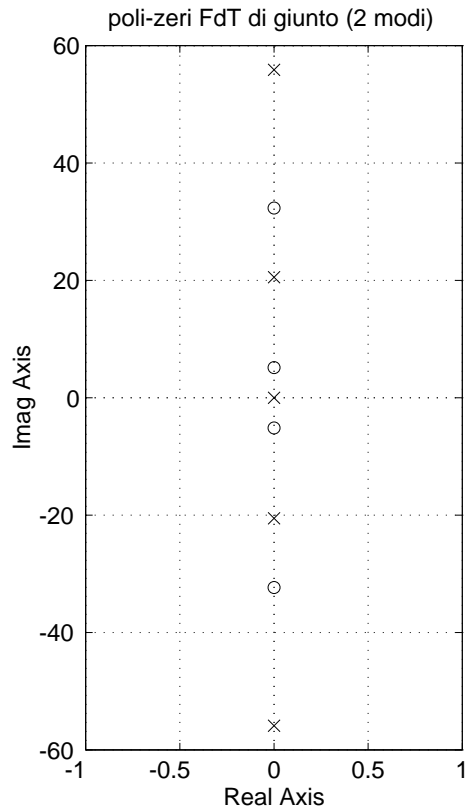
terzo e **quarto** modo di vibrazione, a frequenze $f_3 = 16.1314$ e $f_4 = 28.2751$ [Hz]



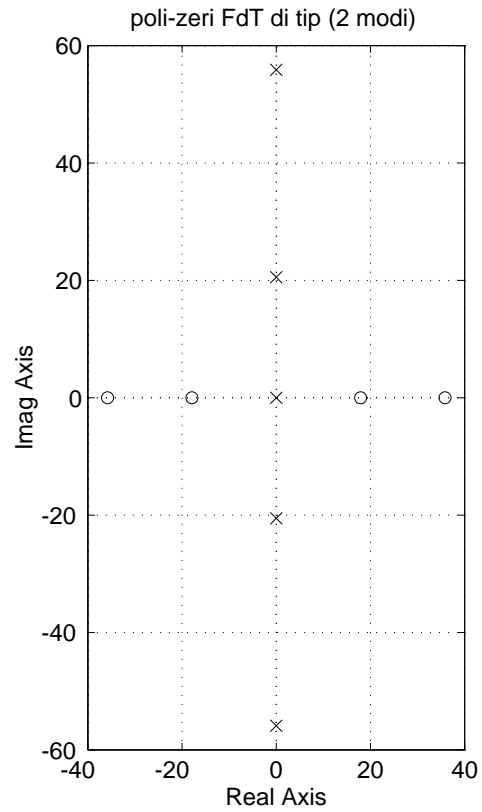
quinto modo di vibrazione, a frequenza $f_5 = 45.5887$ [Hz]

- il modo i -esimo ha un numero i di **nodi**, ossia di punti $\tilde{x} \in (0, l]$ con $\phi_i(\tilde{x}) = 0$; questi nodi appaiono ‘fermi’ quando il solo modo i è in vibrazione persistente
- nei grafici mostrati, le ampiezze relative dei modi sono ininfluenti (dipendono dalle normalizzazioni fatte)

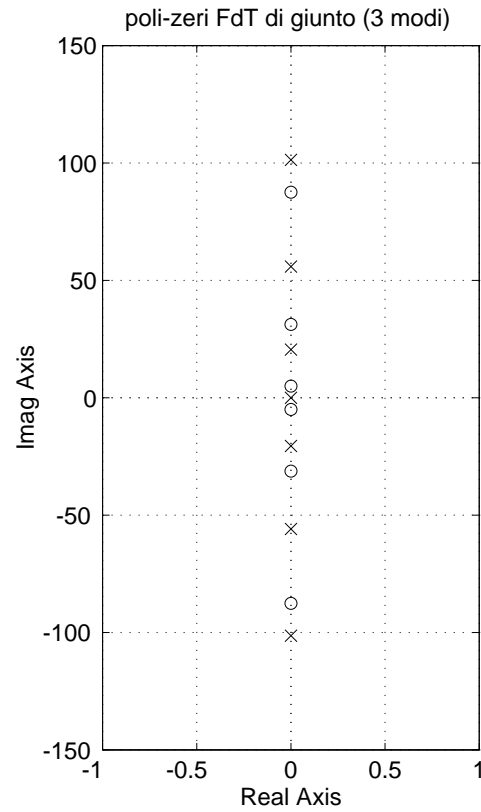
Pattern di poli e zeri delle $P_g(s)$ e $P_t(s)$



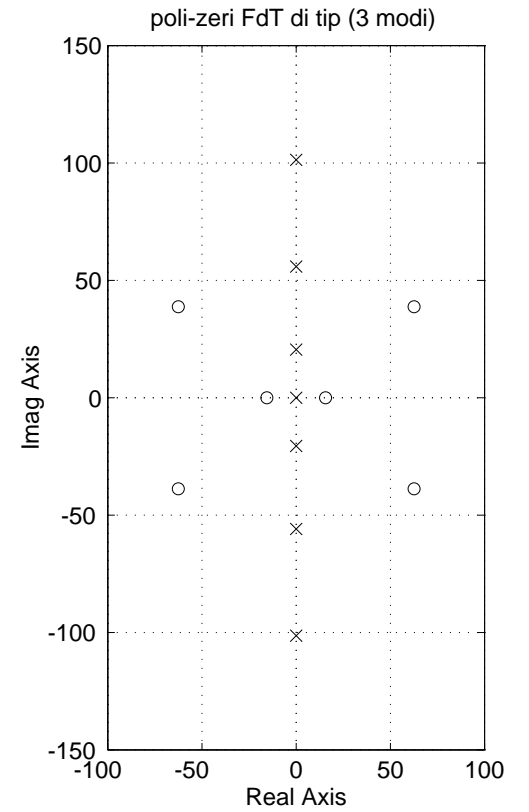
2 modi

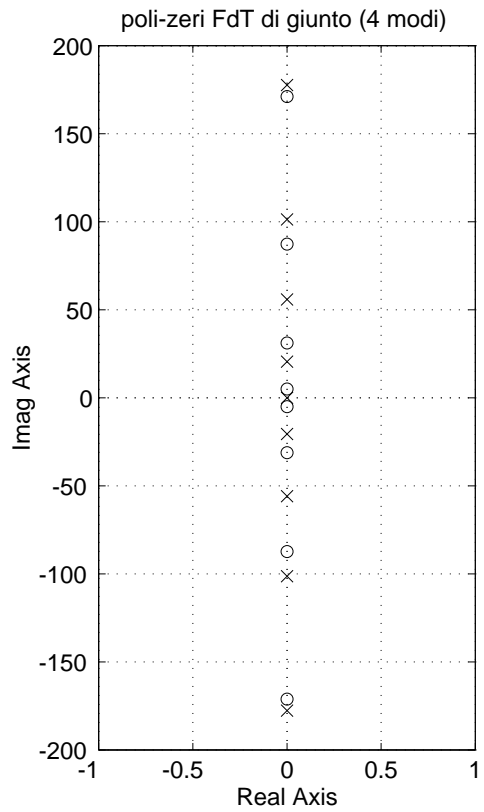


uscita al giunto e al tip

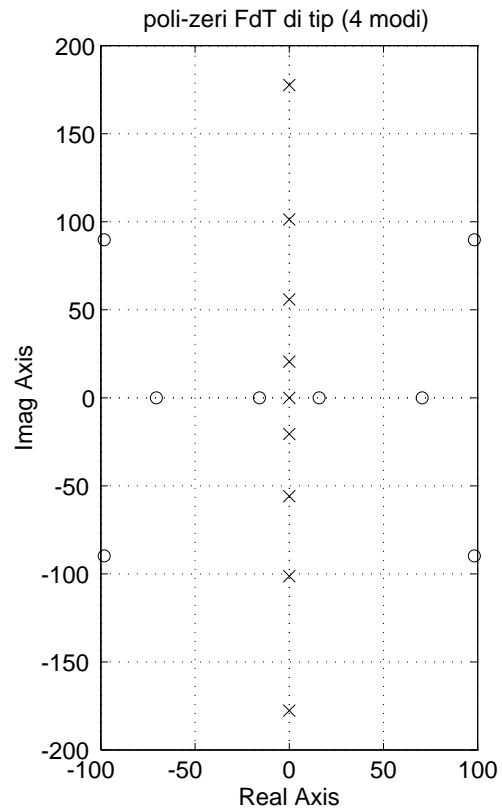


3 modi

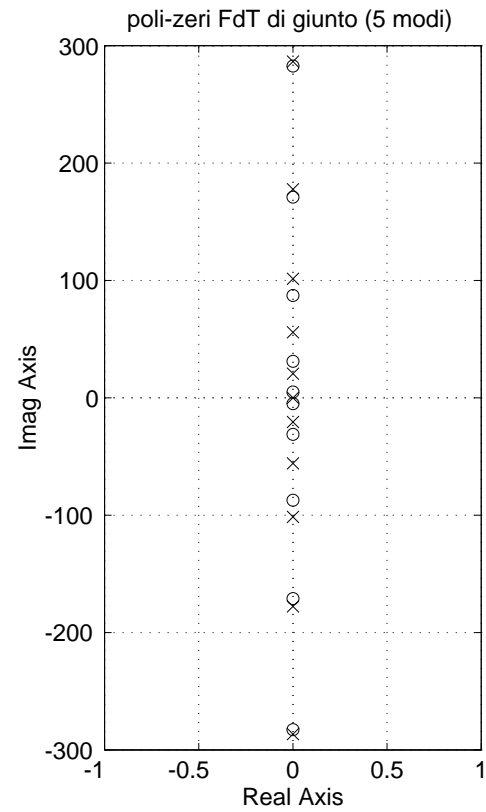




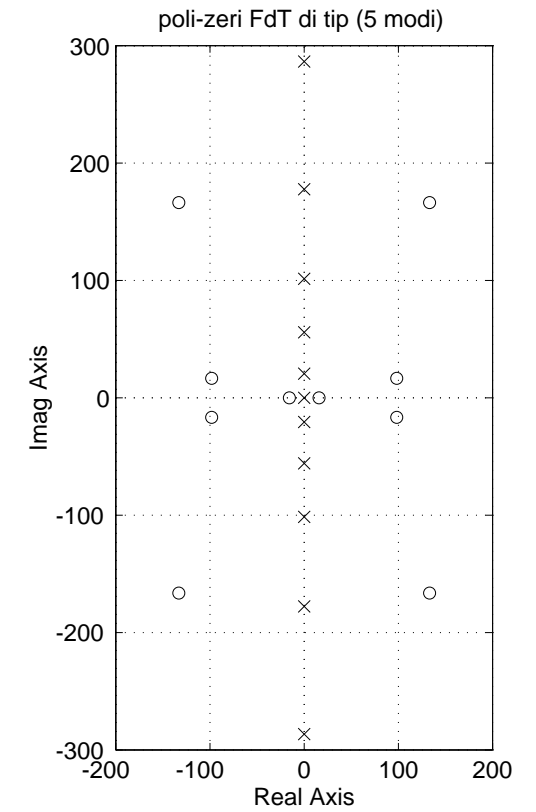
4 modi



uscita al giunto e al tip



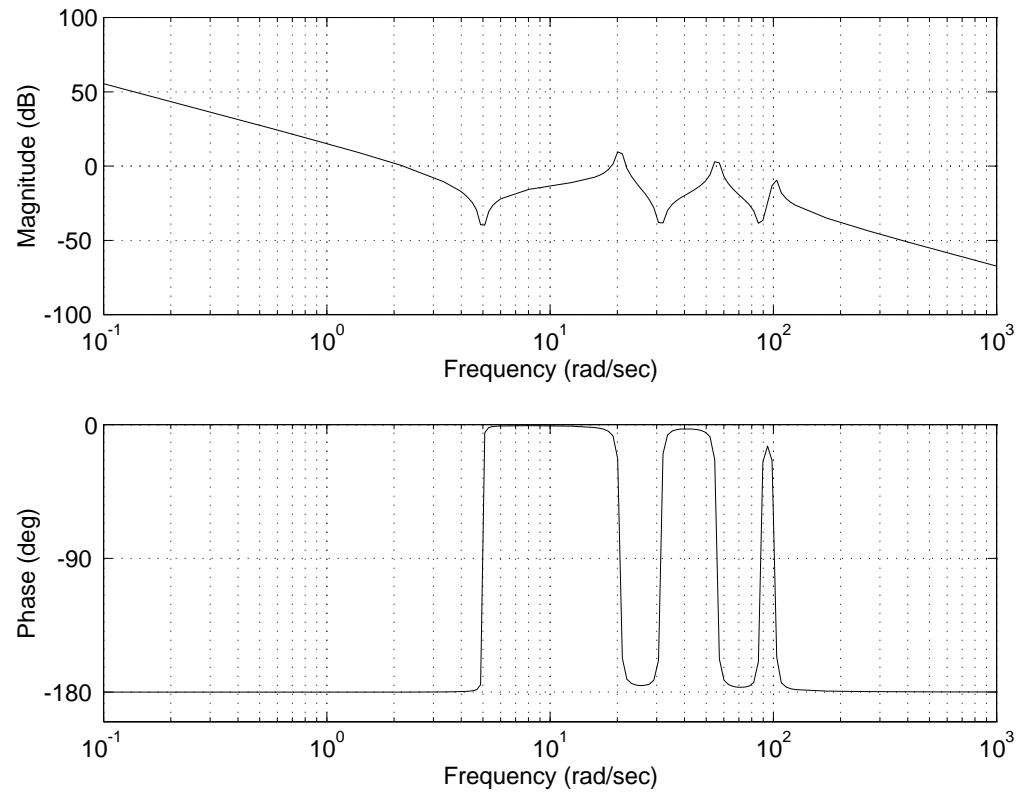
5 modi



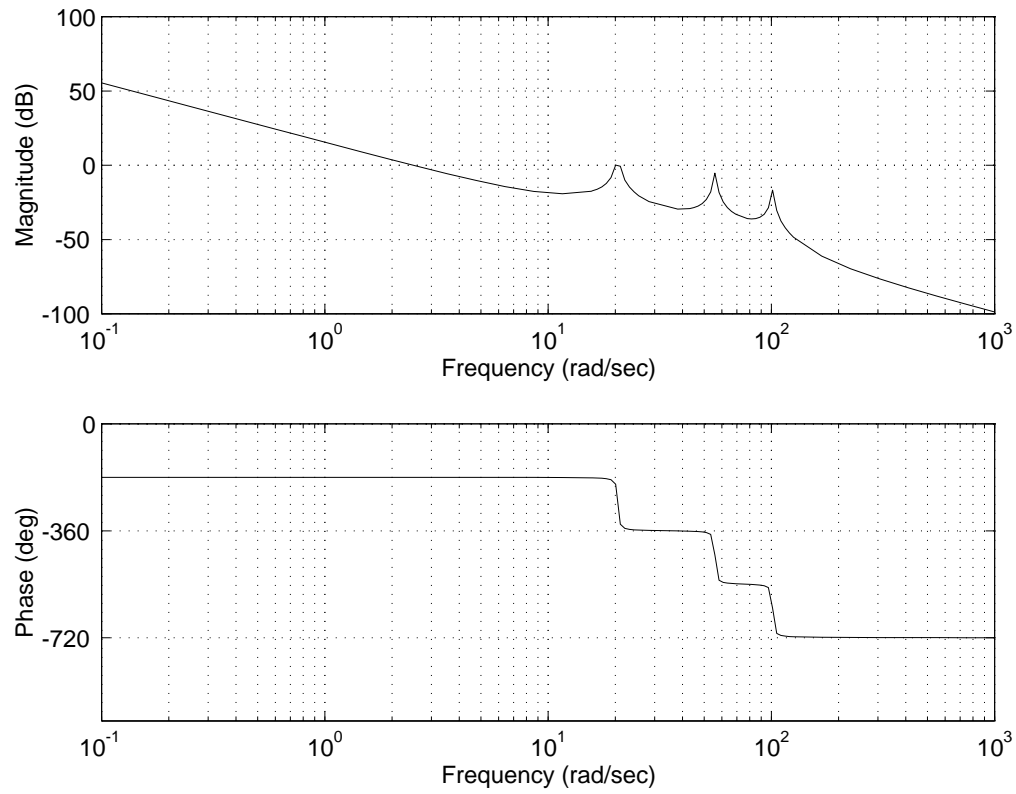
Commenti

- in tutti i pattern è presente il **doppio polo nell'origine** legato al moto rigido d'insieme
- è confermata la natura di **fase non minima** (presenza di zeri a parte reale non negativa) della $P_t(s)$ per qualsiasi numero di modi; gli zeri sono disposti simmetricamente rispetto all'asse immaginario
- nei pattern relativi alla $P_g(s)$, ciascuna coppia di zeri precede (in termini di ω) una coppia di poli lungo l'asse immaginario; questo tipo di alternanza è legata alla proprietà di **passività** di questa funzione di trasferimento
- in presenza di smorzamento modale, i pattern **non sono simmetrici** rispetto all'asse immaginario (in particolare, i poli sono complessi coniugati a parte reale negativa)

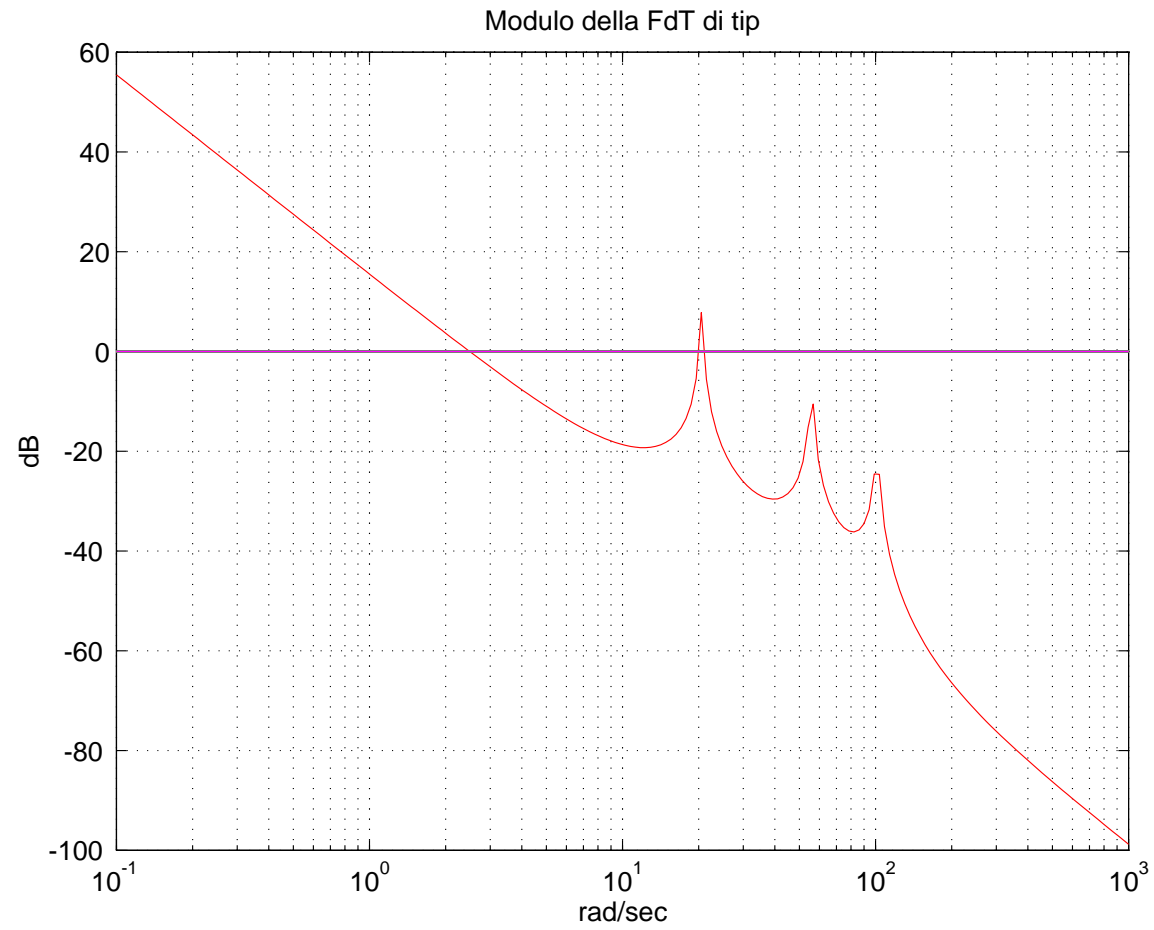
Risposte armoniche $P_g(j\omega)$ e $P_t(j\omega)$



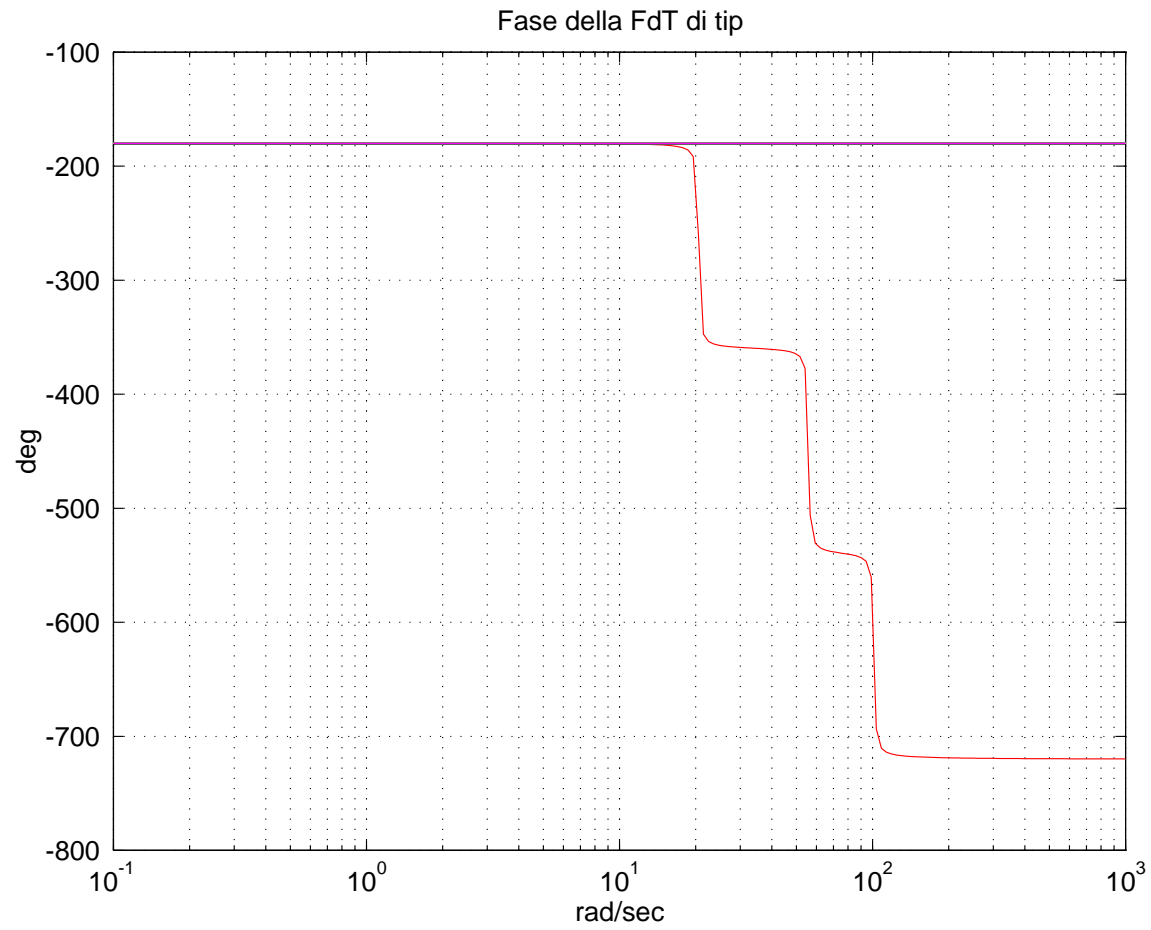
uscita al giunto, 3 modi



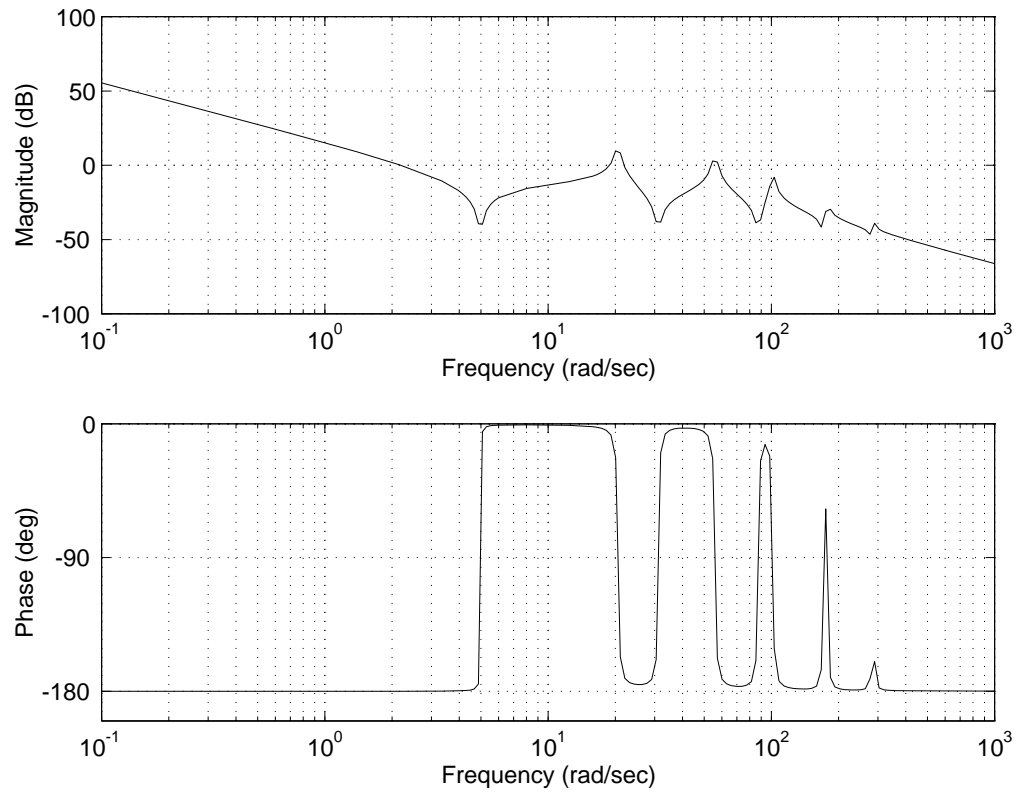
uscita al tip, 3 modi



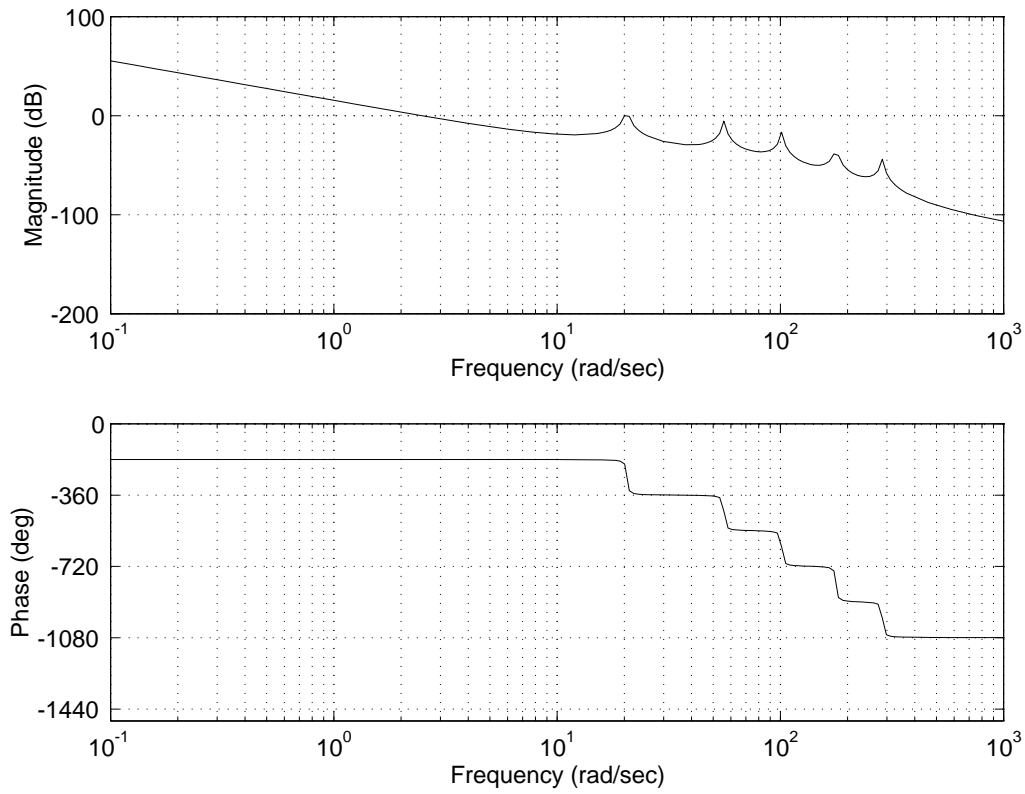
uscita al tip, 3 modi: zoom sul diagramma del modulo



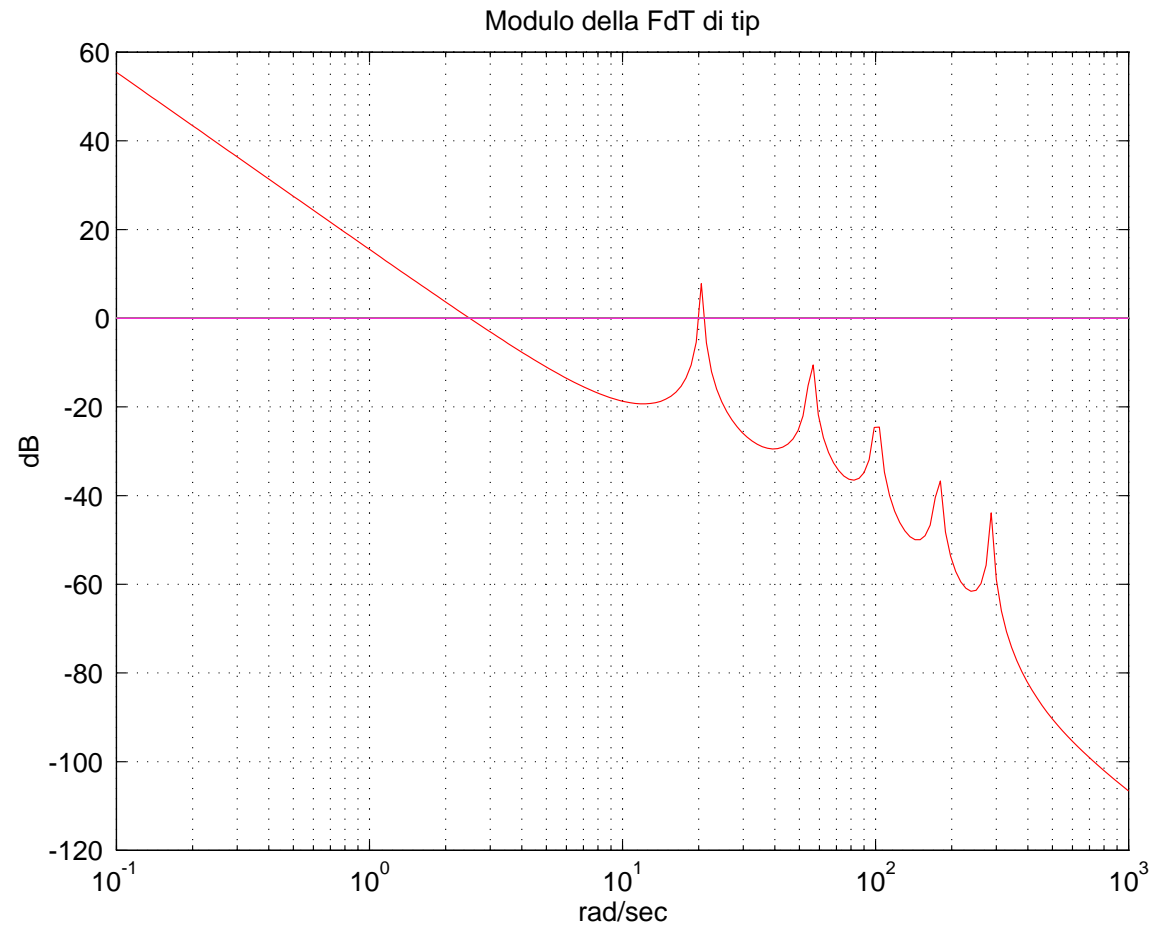
uscita al tip, 3 modi: zoom sul diagramma della fase



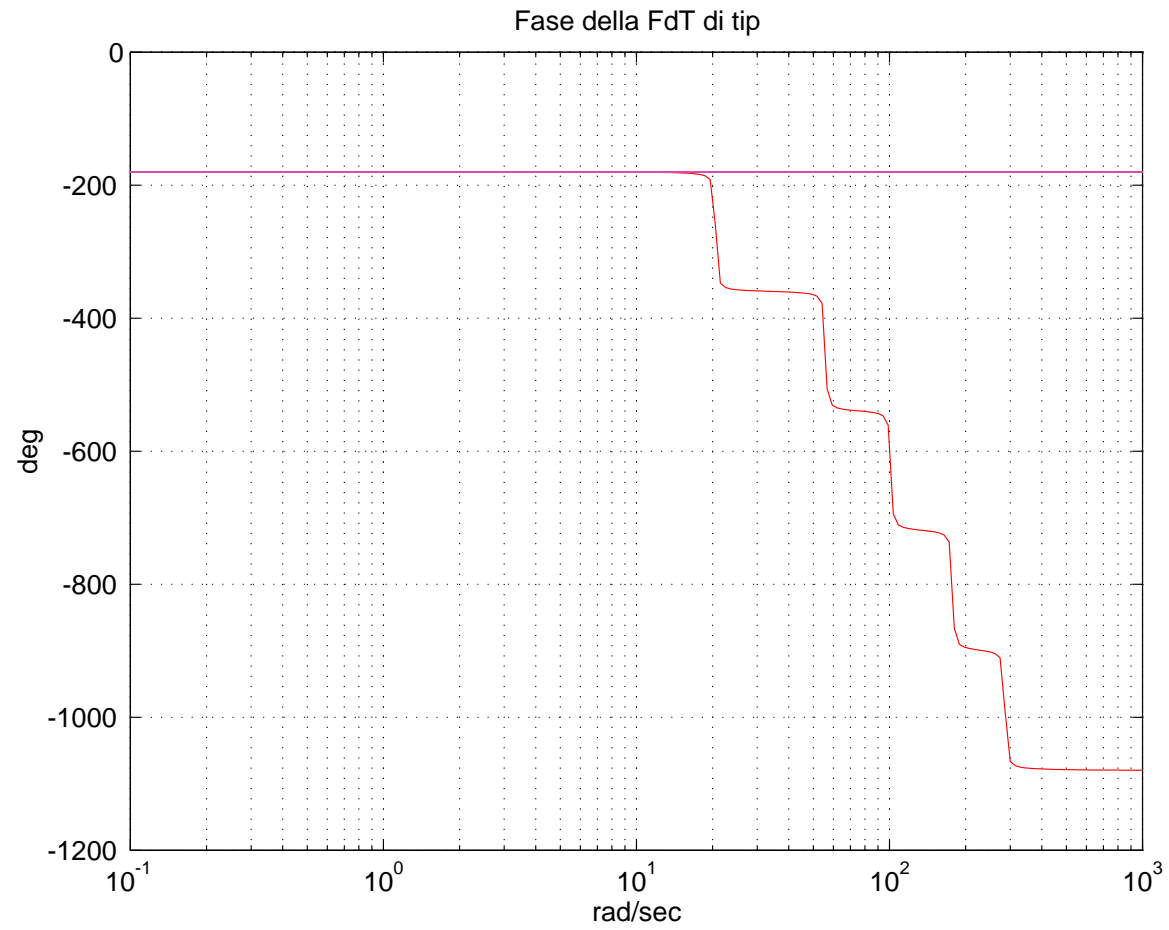
uscita al giunto, 5 modi



uscita al tip, 5 modi



uscita al tip, 5 modi: zoom sul diagramma del modulo



uscita al tip, 5 modi: zoom sul diagramma della fase

Commenti

- l'andamento della risposta armonica mostra una maggiore criticità del problema di controllo dell'uscita in punta (**tip**) al braccio flessibile rispetto a quella di giunto, se affrontato con tecniche classiche ingresso-uscita
- si hanno infatti attraversamenti multipli dell'asse a 0 dB da parte del diagramma dei moduli della $P_t(j\omega)$ (specie per un aumento del guadagno del controllore) e progressivi ritardi di fase al crescere del numero dei modi considerati
- !! ai soli fini del tracciamento delle risposte armoniche con MATLAB, si è aggiunto un piccolo smorzamento modale ($\zeta_i = 0.01$, uguale per tutti i modi)



- come esemplificazione della tecnica della regolazione asintotica, verrà considerato il problema del **controllo della posizione del tip** per traiettorie di riferimento **sinusoidali** nel solo caso di **informazione completa**, in assenza di smorzamento modale e di disturbi esogeni

Stabilizzabilità

- occorre anzitutto verificare la stabilizzabilità del processo (proprietà indipendente dalla uscita considerata!)
- è possibile mostrare (con diverse tecniche) che il processo è di fatto **raggiungibile** per un qualsiasi numero di modi
- per illustrazione, si consideri il caso di $n_e = 2$ modi (con stato $x \in \mathbb{R}^6$): le matrici A e B sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \\ \phi_1'(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix}$$

- la matrice di raggiungibilità $\mathcal{P} = (\mathcal{B} \ A\mathcal{B} \ \dots \ A^5\mathcal{B})$ è

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1'(0) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1'(0) & 0 & \omega_1^4 \phi_1'(0) \\ 0 & \phi_2'(0) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2'(0) & 0 & \omega_2^4 \phi_2'(0) \\ 1/J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1'(0) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1'(0) & 0 & \omega_1^4 \phi_1'(0) & 0 \\ \phi_2'(0) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2'(0) & 0 & \omega_2^4 \phi_2'(0) & 0 \end{pmatrix}$$

- con semplici scambi di colonne, si può verificare che $\det \mathcal{P} \neq 0$ **se e solo se**

$$\det \begin{pmatrix} 1/J & 0 & 0 \\ \phi_1'(0) & -\omega_1^2 \phi_1'(0) & \omega_1^4 \phi_1'(0) \\ \phi_2'(0) & -\omega_2^2 \phi_2'(0) & \omega_2^4 \phi_2'(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \det \left[\begin{pmatrix} \phi_1'(0) & 0 \\ 0 & \phi_2'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1^4 \\ \omega_2^2 & \omega_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \neq 0$$

si ha allora $\det \mathcal{P} \neq 0$ in quanto quest'ultimo determinante è pari a

$$\frac{-1}{J} (\phi_1'(0) \phi_2'(0)) \omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \neq 0$$

essendo $\phi_i'(0) \neq 0$ ($\forall i$), $\omega_i > 0$ ($\forall i$), e $\omega_i \neq \omega_j$ (per $i \neq j$)

- questa dimostrazione si estende al caso n_e generico, sfruttando la non singolarità (per $\omega_i \neq \omega_j$) della **matrice di Vandermonde** (costruita per colonne)

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1^4 & \omega_1^6 & \dots & \omega_1^{2n_e} \\ \omega_2^2 & \omega_2^4 & \omega_2^6 & \dots & \omega_2^{2n_e} \\ & & \dots & & \\ \omega_{n_e}^2 & \omega_{n_e}^4 & \omega_{n_e}^6 & \dots & \omega_{n_e}^{2n_e} \end{pmatrix}$$

che compare nell'espressione del determinante

Commenti

- è dunque possibile **assegnare arbitrariamente**, mediante una matrice \mathcal{K} (unica!), uno spettro desiderato di autovalori per la matrice $\mathcal{A} + \mathcal{BK}$
- ciò equivale in generale a fare una reazione $u = \mathcal{K}x$ dall'intero stato $x = (q, \dot{q})$ del braccio flessibile (misurando quindi sia il moto rigido θ —indirettamente, tramite l'encoder al giunto e gli estensimetri— che le variabili di deformazione δ , nonchè le loro derivate $\dot{\theta}$ e $\dot{\delta}$)
- si dimostra però che è anche possibile **stabilizzare** il processo (in particolare, avere uno spettro $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{BK}) \subset \mathcal{C}^-$ ma con autovalori non tutti arbitrari) con una reazione **dalle sole variabili θ_c e $\dot{\theta}_c$** misurabili dall'encoder posto sul motore; la legge di controllo stabilizzante ha la forma (con $K_p > 0$ e $K_d > 0$)

$$u = K_p \theta_c + K_d \dot{\theta}_c = \begin{pmatrix} K_p & K_p \Phi'^T & K_d & K_d \Phi'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \delta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \mathcal{K}_c x$$

Equazioni del regolatore per sistemi meccanici

- risulta conveniente sfruttare la natura di equazioni del secondo ordine del modello dinamico dei sistemi meccanici

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Hq = Bu \quad y = Cq$$

con $q \in \mathbb{R}^{n_q}$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, per formulare le equazioni del regolatore in modo più diretto (ossia, **senza passare nella forma con lo spazio di stato**)

- è sufficiente determinare l'evoluzione nominale delle **sole coordinate generalizzate** $q (= \Pi_q w)$ oltre a quella dell'ingresso $u (= \Gamma_q w)$, in corrispondenza ad un esosistema $\dot{w} = Sw$, $y_d = -Qw$ (con $w \in \mathbb{R}^r$)

Proposizione

se e solo se esistono una matrice Π_q ($n_q \times r$) ed una matrice Γ_q ($m \times r$) tali che

$$M\Pi_q S^2 + D\Pi_q S + H\Pi_q = B\Gamma_q \quad (1)$$

$$C\Pi_q + Q = 0 \quad (2)$$

allora esistono una matrice Π ($n \times r$) ed una matrice Γ ($m \times r$) tali che

$$\Pi S = \mathcal{A}\Pi + \mathcal{B}\Gamma \quad (3)$$

$$0 = \mathcal{C}\Pi + Q \quad (4)$$

dove $n = 2n_q$ e

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}H & -M^{-1}D \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = (C \quad 0)$$

Dimostrazione

- **(sufficienza)** con Π_q e Γ_q soluzioni di (1) e (2), si pone $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_q \\ \Pi_q S \end{pmatrix}$ e $\Gamma = \Gamma_q$; la (4) è $C\Pi + Q = C\Pi_q + Q = 0$, verificata per la (2); la (3)

$$\begin{pmatrix} \Pi_q \\ \Pi_q S \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}H & -M^{-1}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_q \\ \Pi_q S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix} \Gamma_q$$

si spezza (per righe) nella $\Pi_q S^2 = -M^{-1}H\Pi_q - M^{-1}D\Pi_q S + M^{-1}B\Gamma_q$ che, premoltiplicata per $M > 0$, coincide con la (1) e nell'identità $\Pi_q S = \Pi_q S$

- **(necessità)** siano $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}$ e Γ soluzioni di (3) e (4); dalla (3) si ha

$$\Pi_1 S = \Pi_2 \quad \Pi_2 S = -M^{-1}H\Pi_1 - M^{-1}D\Pi_2 + M^{-1}B\Gamma$$

eliminando $\Pi_2 \rightarrow M\Pi_1 S^2 + D\Pi_1 S + H\Pi_1 = B\Gamma$; dalla (4), $C\Pi_1 + Q = 0$; queste coincidono con (1) e (2), avendo posto $\Pi_q = \Pi_1$ (quindi $\Pi_2 = \Pi_q S$) ■

Risoluzione delle equazioni del regolatore

- sfruttando la precedente Proposizione, impostiamo le equazioni del regolatore **per l'uscita al tip** nel caso $n_e = 2$ per semplicità (ricaveremo quindi la soluzione generale per ispezione)
- per una traiettoria di riferimento sinusoidale (con pulsazione ω e ampiezza a), l'esosistema $\dot{w} = Sw$, $y_d = -Qw$ è caratterizzato dalle matrici

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \left[\text{N.B. } S^2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \right]$$

e ha condizione iniziale $w_0 = (a \ 0)^T$.

- dal modello dinamico (in assenza di smorzamento modale $\leftrightarrow D = 0$) si ha

$$\begin{aligned} M &= \text{diag} \{J, 1, 1\} \\ H &= \text{diag} \{0, \omega_1^2, \omega_2^2\} \end{aligned} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1'(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\phi_1(\ell)}{\ell} & \frac{\phi_2(\ell)}{\ell} \end{pmatrix}$$

- posto allora

$$\Pi_q = \begin{pmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} \\ \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \quad \Gamma_q = \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

si hanno 8 equazioni scalari in 8 incognite

$$\begin{aligned} -J\pi_{01}\omega^2 &= \gamma_1 \\ -J\pi_{02}\omega^2 &= \gamma_2 \\ -\pi_{11}\omega^2 + \omega_1^2\pi_{11} &= \phi_1'(0)\gamma_1 \\ -\pi_{12}\omega^2 + \omega_1^2\pi_{12} &= \phi_1'(0)\gamma_2 \\ -\pi_{21}\omega^2 + \omega_2^2\pi_{21} &= \phi_2'(0)\gamma_1 \\ -\pi_{22}\omega^2 + \omega_2^2\pi_{22} &= \phi_2'(0)\gamma_2 \\ \pi_{01} + \frac{\phi_1(\ell)}{\ell}\pi_{11} + \frac{\phi_2(\ell)}{\ell}\pi_{21} &= 0 \\ \pi_{02} + \frac{\phi_1(\ell)}{\ell}\pi_{12} + \frac{\phi_2(\ell)}{\ell}\pi_{22} &= 1 \end{aligned}$$

- esaminiamo per prima il caso (generico) in cui $\omega \neq \omega_1$ e $\omega \neq \omega_2$; dalle prime sei equazioni si ha

$$\begin{aligned}\pi_{01} &= -\frac{\gamma_1}{J\omega^2} \\ \pi_{02} &= -\frac{\gamma_2}{J\omega^2} \\ \pi_{11} &= \frac{\phi_1'(0)\gamma_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \pi_{12} &= \frac{\phi_1'(0)\gamma_2}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \pi_{21} &= \frac{\phi_2'(0)\gamma_1}{\omega_2^2 - \omega^2} \\ \pi_{22} &= \frac{\phi_2'(0)\gamma_2}{\omega_2^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

che sostituite nelle ultime due forniscono

$$\left(\frac{\phi_1'(0)\phi_1(\ell)}{(\omega_1^2 - \omega^2)\ell} + \frac{\phi_2'(0)\phi_2(\ell)}{(\omega_2^2 - \omega^2)\ell} - \frac{1}{J\omega^2} \right) \gamma_1 = 0 \quad \left(\dots \text{idem} \dots \right) \gamma_2 = 1$$

- la **risolubilità delle equazioni** è legata dunque alla condizione

$$\left(\frac{\phi_1'(0)\phi_1(l)}{(\omega_1^2 - \omega^2)l} + \frac{\phi_2'(0)\phi_2(l)}{(\omega_2^2 - \omega^2)l} - \frac{1}{J\omega^2} \right) \neq 0$$

- è immediato verificare che questa espressione è proprio pari al valore $P_t(j\omega)$ ossia della funzione di trasferimento coppia-posizione angolare del tip valutata per $s = j\omega$ (con ω pari alla pulsazione della traiettoria sinusoidale di riferimento)
- dall'analisi dei diagrammi di Bode, la $P_t(j\omega)$ non si annulla per nessun valore finito di ω (è sempre un numero reale, positivo o negativo); in alternativa dal pattern poli-zeri, la $P_t(s)$ non ha mai zeri sull'asse immaginario (quindi non si può annullare per nessun valore immaginario $s = \pm j\omega$)
- !!** ciò può invece accadere nel problema di regolazione relativo all'uscita di giunto; la funzione di trasferimento $P_g(s)$ ha gli zeri sull'asse immaginario $\rightarrow P_g(j\omega) = 0$ per un insieme discreto di pulsazioni ω

- la soluzione delle equazioni del regolatore nel caso in esame è dunque

$$\Gamma_q = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \frac{1}{\frac{\phi'_1(0)\phi_1(l)}{(\omega_1^2 - \omega^2)l} + \frac{\phi'_2(0)\phi_2(l)}{(\omega_2^2 - \omega^2)l} - \frac{1}{J\omega^2}}$$

$$\Pi_q = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{02} \\ 0 & \pi_{12} \\ 0 & \pi_{22} \end{pmatrix} \quad \pi_{02} = -\frac{\gamma_2}{J\omega^2} \quad \pi_{12} = \frac{\phi'_1(0)\gamma_2}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad \pi_{22} = \frac{\phi'_2(0)\gamma_2}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

- le suddette formule sono generalizzabili ad un numero n_e arbitrario di modi di deformazione inclusi nel modello; si avrà (per $i = 0, 1, \dots, n_e$, $j = 1, \dots, n_e$)

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_e} \frac{\phi'_i(0)\phi_i(l)}{(\omega_i^2 - \omega^2)l} - \frac{1}{J\omega^2}}, \quad \pi_{i1} = 0, \quad \pi_{02} = -\frac{\gamma_2}{J\omega^2}, \quad \pi_{j2} = \frac{\phi'_j(0)\gamma_2}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

- rimane da considerare il caso in cui $\omega = \omega_i$; nel caso $n_e = 2$, supponendo ad esempio $\omega = \omega_1$, dalle otto equazioni scalari si ottiene nell'ordine

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (\text{dalla terza e quarta})$$

$$\pi_{01} = \pi_{02} = 0 \quad (\text{dalla prima e seconda})$$

$$\pi_{21} = \pi_{22} = 0 \quad (\text{dalla quinta e sesta})$$

$$\pi_{11} = 0 \quad \pi_{12} = \frac{1 \ell}{\phi_1(\ell)} \quad (\text{dalla settima e ottava})$$

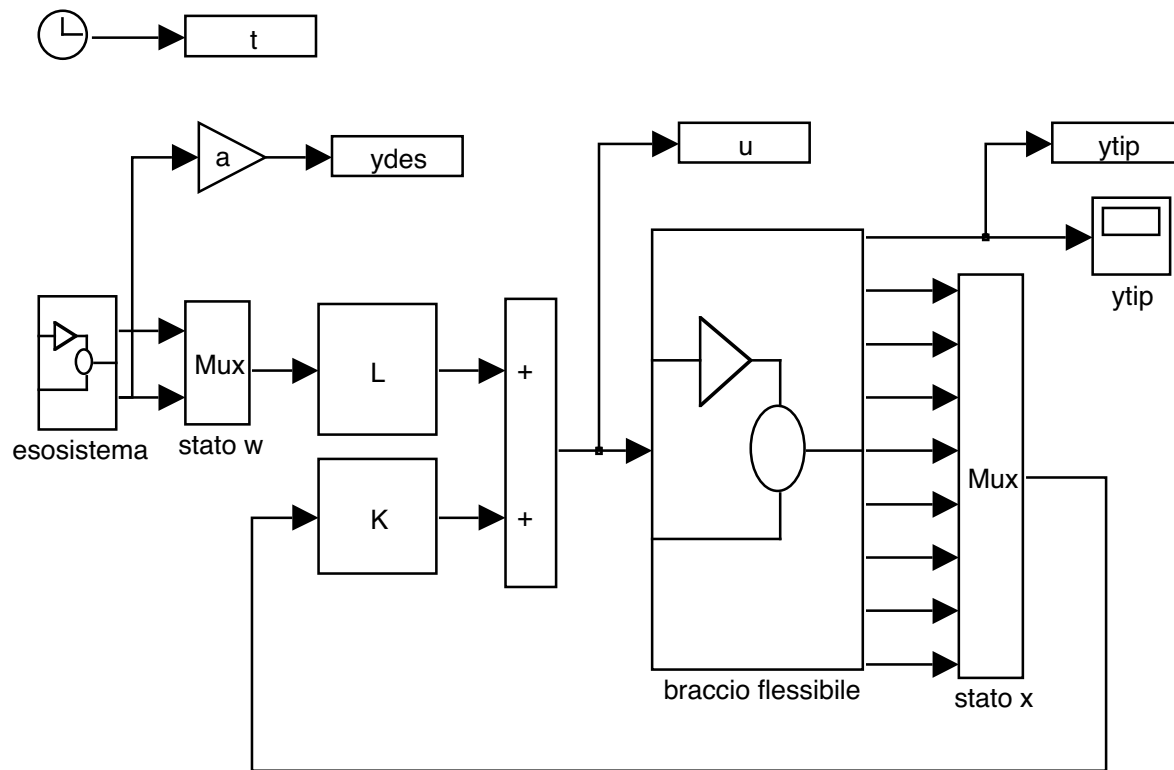
- nel caso generale ($n_e > 0$ qualsiasi, $\omega = \omega_i$), si ha $\Gamma_q = 0$ e Π_q tutta nulla eccetto per l'elemento $\pi_{i2} = \frac{1 \ell}{\phi_i(\ell)}$
- in conclusione, le equazioni del regolatore sono **sempre** risolubili per il caso considerato (si ricordi che $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_q \\ \Pi_q S \end{pmatrix}$)

Risultati di simulazione

- si considera il caso di informazione completa (reazione dall'intero stato) per il braccio flessibile con i dati numerici già forniti e $n_e = 3$ modi non smorzati
- la traiettoria sinusoidale di riferimento **per il tip** ha $a = \pi/2$ rad e $\omega = 2$ rad/sec (con l'esosistema inizializzato a $w_1(0) = a$, $w_2(0) = 0$)
- la \mathcal{K} è scelta in modo da assegnare tutti gli $2(n_e + 1) = 8$ autovalori ad anello chiuso in -10 (altre scelte sono possibili) mediante la formula di Ackermann
- il braccio è inizialmente a riposo (nello stato zero); l'errore sull'uscita di tip è quindi nullo per $t = 0$ (lo stato iniziale non è però 'agganciato' alla traiettoria di stato nominale, ossia $x(0) \neq \Pi w(0)$)

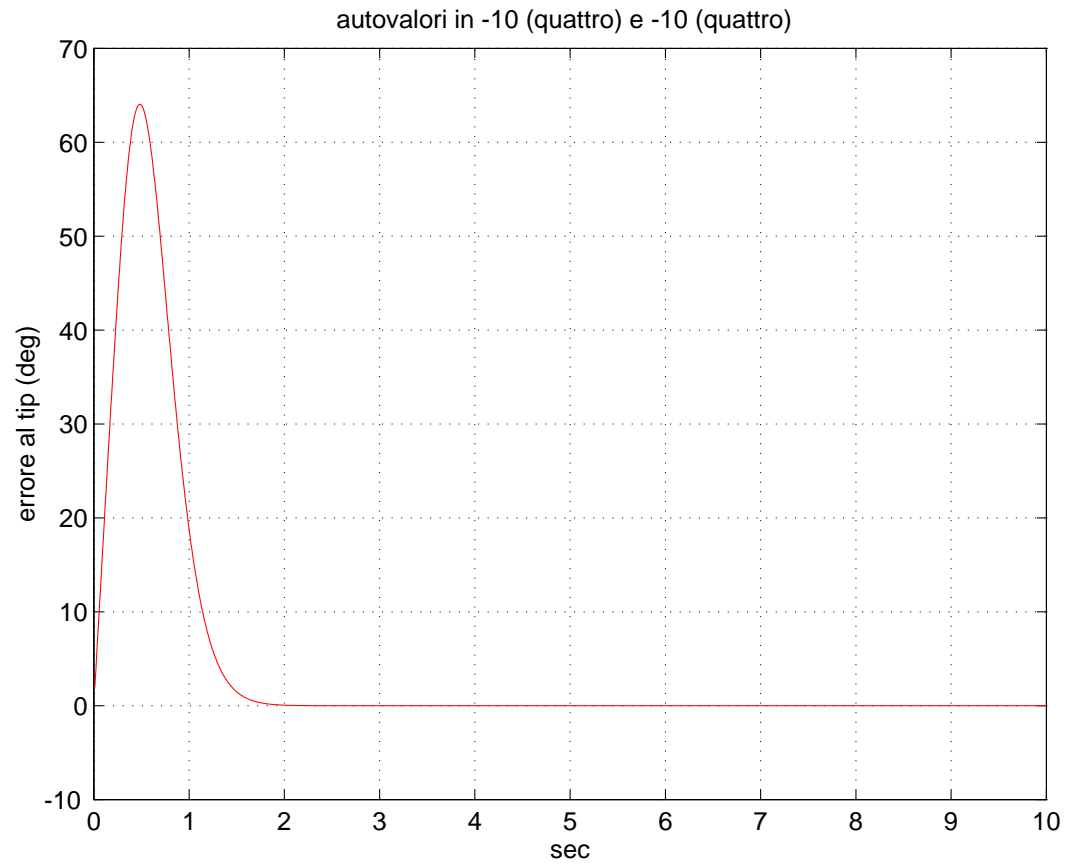
Ambiente di simulazione

- il sistema di controllo è stato simulato in **Simulink**, un toolbox di Matlab che permette la simulazione di sistemi dinamici (lineari e nonlineari, a tempo continuo o discreto o misto) costruiti come schemi a blocchi mediante un linguaggio ad icone predefinite o definibili dall'utente
- le equazioni dinamiche sono integrate numericamente da Simulink, scegliendo da menù il metodo di Runge-Kutta del 5° ordine ed un passo di integrazione variabile (qui $T_s = 0.01 \div 0.0001$ sec)
- si riportano nelle due slides seguenti:
 - lo schema a blocchi del sistema di controllo complessivo
 - lo schema a blocchi interno del modulo relativo alla dinamica del braccio flessibile (sono previsti anche smorzamenti modali, posti qui a zero con i dati di inizializzazione da Matlab)

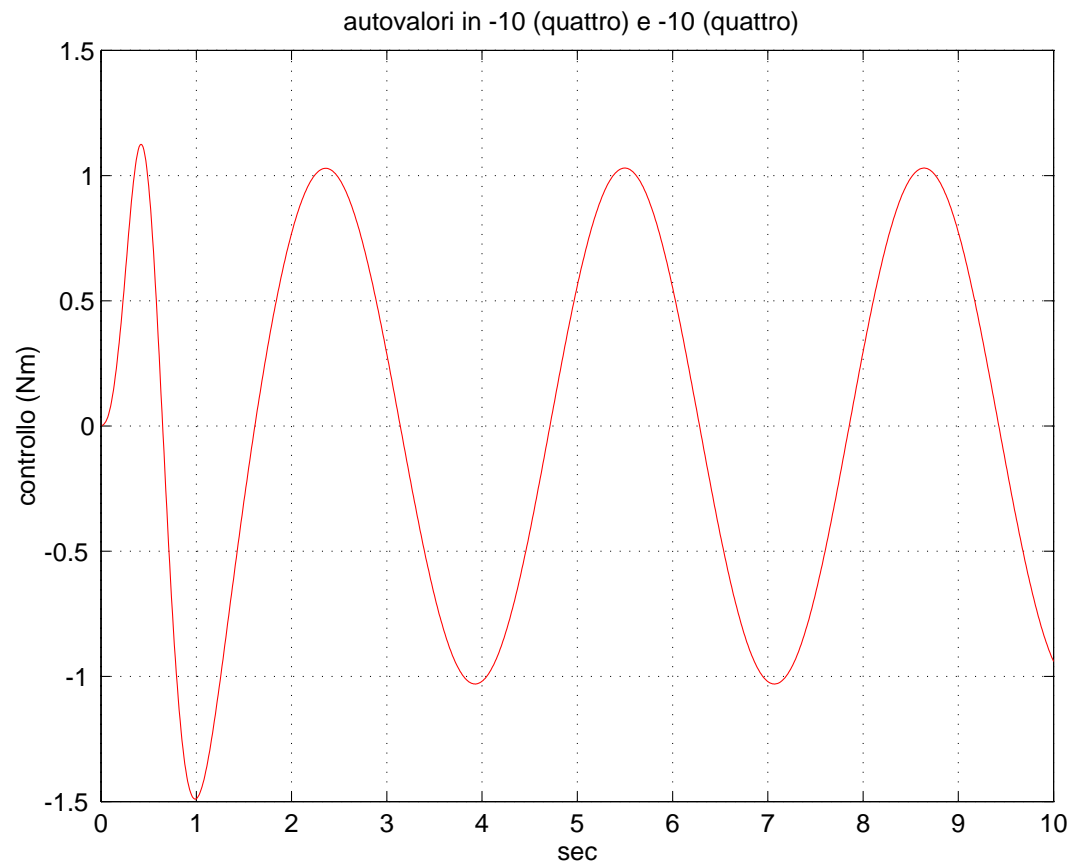


struttura generale schema di controllo

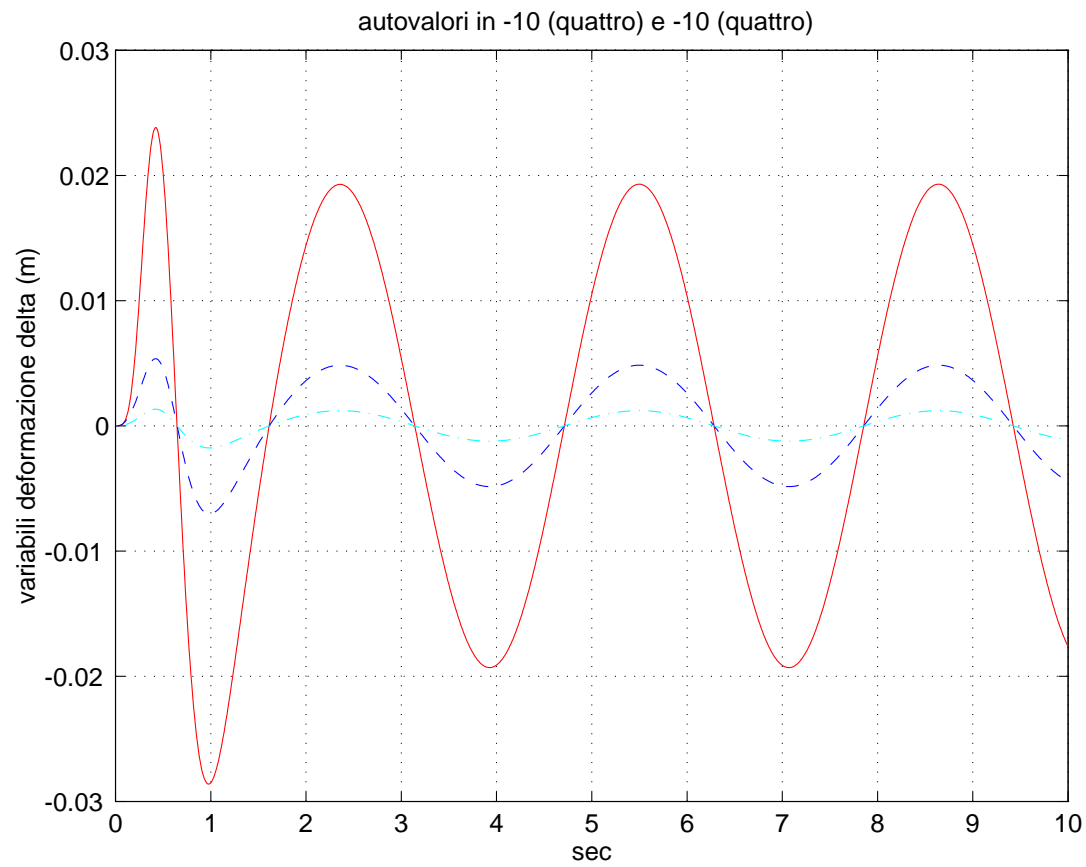
Errore sulla posizione angolare del tip



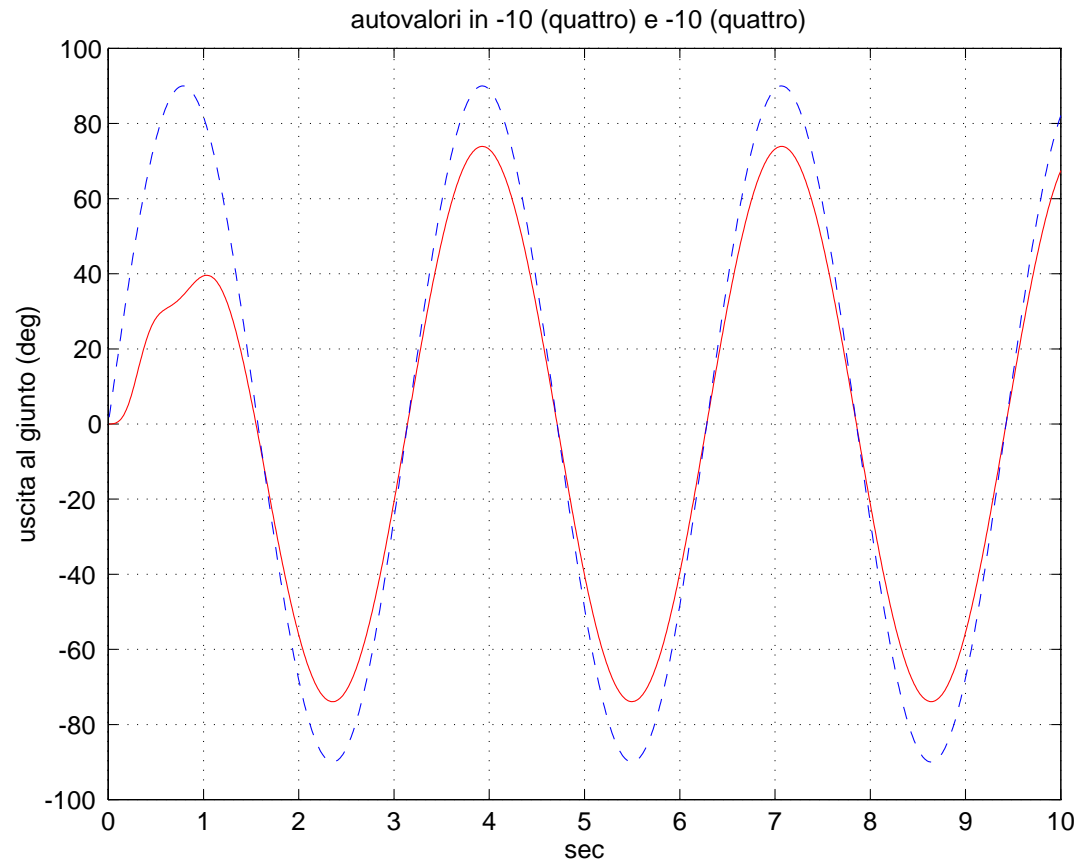
Legge di controllo



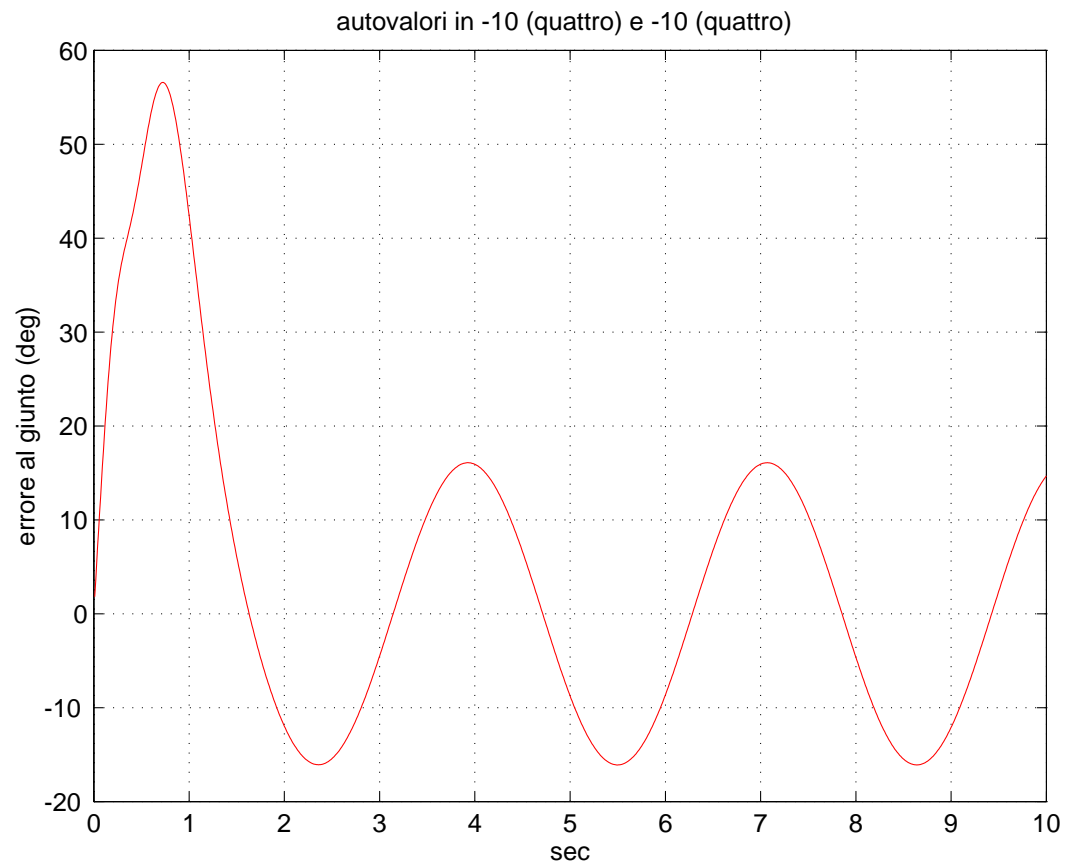
Variabili di deformazione



Andamento della posizione angolare al giunto



Differenza tra posizione angolare al giunto e desiderata al tip



Commenti ai risultati numerici

- l'errore in uscita si annulla definitivamente in circa 2 sec (durata 'pratica' del regime transitorio)
- a regime permanente, tutte le grandezze hanno un comportamento sinusoidale alla stessa frequenza del segnale generato dall'esosistema
- le ampiezze delle variabili di deformazione (che pesano i relativi modi spaziali) sono scalate al crescere del loro indice (la terza variabile modale è più piccola di un fattore circa 10 rispetto alla prima)
- la posizione angolare di giunto ($\theta_c(t)$) si 'muove meno' dell'uscita al tip (ha un picco di $\approx 75^\circ$ contro 90°); la restante deflessione angolare è quella introdotta dalla flessibilità distribuita lungo il braccio
- spostando gli autovalori ad anello chiuso più a sinistra si ottiene un transitorio più rapido ma la coppia di controllo richiesta cresce notevolmente (a regime tutto resta uguale)

Commenti conclusivi

- il problema di inseguire asintoticamente (dopo un certo transitorio) una traiettoria (in particolare sinusoidale) di moto dell'estremità (tip) di un braccio flessibile è stato risolto con la tecnica del regolatore (informazione completa)
- una riproduzione **esatta** (dal tempo $t = 0$) richiederebbe di partire con il braccio inizialmente deformato (quindi **non** da una posizione di riposo)
- lo **stesso controllore** permette la regolazione per traiettorie sinusoidali di ampiezza arbitraria (ma alla fissata pulsazione ω)
- il problema può essere risolto anche nel caso di **reazione dall'errore**: *i)* il processo è infatti **osservabile** \Rightarrow l'ipotesi **H3** è soddisfatta (anche se la **H3_{rst}** non lo è); *ii)* l'ipotesi **H4** ($P_t(s) \neq 0, \forall s \in \sigma(S)$) è soddisfatta (come già mostrato)