Tracciamento dei Diagrammi di Bode

G. Oriolo

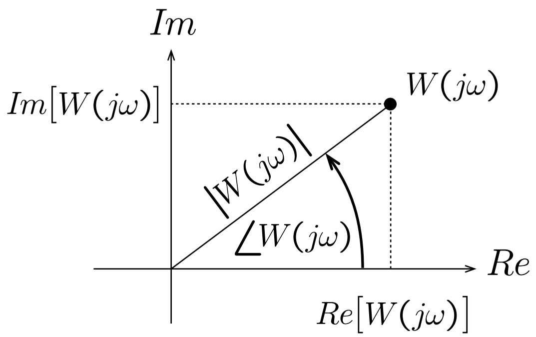
Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale

Sapienza Università di Roma

March 7, 2019

diagrammi di Bode

- rappresentazioni grafiche **separate** del **modulo** $|W(j\omega)|$ e della **fase** $\angle W(j\omega)$ del numero complesso $W(j\omega)$ al variare di $\omega \in (0, +\infty)$



- essendo

$$\angle(1/W(j\omega)) = -\angle W(j\omega) \qquad (*)$$

le fasi di $1/W(j\omega)$ si ottengono **ribaltando** quelle di $W(j\omega)$

- sia $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$; essendo

$$\angle(W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)) = \angle W_1(j\omega) + \angle W_2(j\omega) \qquad (**)$$

le fasi di $W(j\omega)$ si ottengono **sommando** quelle di $W_1(j\omega)$ e $W_2(j\omega)$

- il modulo $|W(j\omega)|$ non gode di proprietà come le $(*)$,$(**)$ $\Rightarrow$ si passa al logaritmo; in particolare, il modulo si esprime in **decibel** (dB)

$$|W(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|W(j\omega)|$$

- essendo

$$|1/W(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -\,|W(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \qquad (\diamond)$$

i moduli in dB di $1/W(j\omega)$ si ottengono **ribaltando** quelli di $W(j\omega)$

- sia $W(s) = W_1(s)\cdot W_2(s)$; essendo

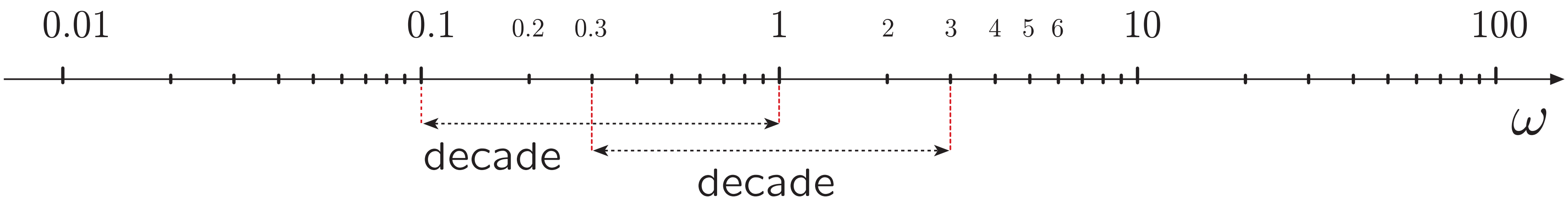
$$|W_1(j\omega)\cdot W_2(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = |W_1(j\omega)|_{\mathrm{dB}} + |W_2(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \qquad (\diamond\diamond)$$

i moduli in dB di $W(j\omega)$ si ottengono **sommando** quelli di $W_1(j\omega)$ e $W_2(j\omega)$

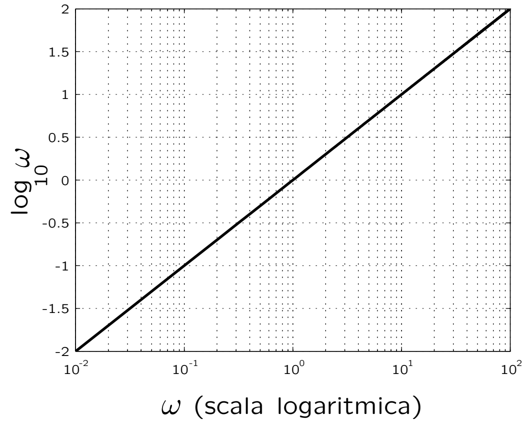
- alcuni valori notevoli

$$|0.1|_{\mathrm{dB}} = -20,\ \ |1|_{\mathrm{dB}} = 0,\ \ |10|_{\mathrm{dB}} = 20,\ \ |100|_{\mathrm{dB}} = 40,\ \ \left|\sqrt{2}\right|_{\mathrm{dB}} \approx 3$$

- le pulsazioni vengono riportate sull'asse delle ascisse usando una **scala logaritmica in base 10**



- la funzione $\log_{10}(\omega)$ è **lineare** in tale scala



- i diagrammi di alcune funzioni elementari (fattori monomio, binomio e trinomio, vedi più avanti) assumono una forma particolarmente **semplice**
- un altro vantaggio derivante dall'adozione delle scale logaritmiche (in ascissa per le pulsazioni, e in ordinata per i moduli) è ovviamente la possibilità di rappresentare ampi intervalli di variazione delle grandezze

forma di Bode della risposta armonica

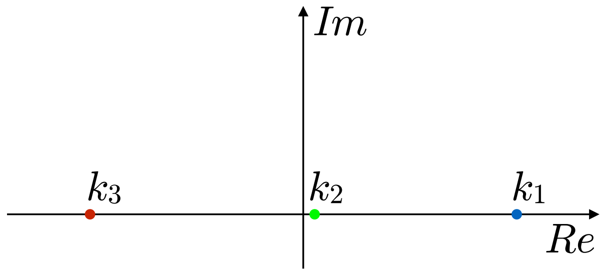
$$W(j\omega) = \text{costante}\,\frac{\prod \text{monomi} \prod \text{binomi} \prod \text{trinomi}}{\prod \text{monomi} \prod \text{binomi} \prod \text{trinomi}}$$

contiene 4 tipi di **fattori elementari**

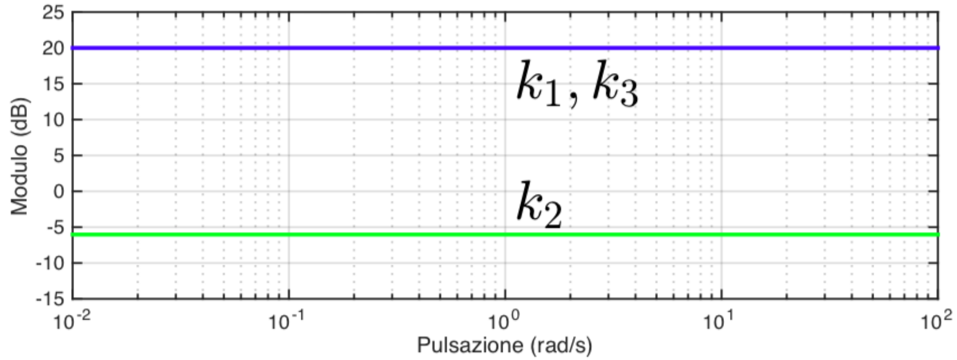
- **costante** k
- **monomio** $j\omega$
  proviene da uno zero (se a numeratore) o da un polo (se a denominatore) in $s = 0$
- **binomio** $1 + j\omega\tau$
  proviene da uno zero (se a numeratore) o da un polo (se a denominatore) reale in $-1/\tau$
- **trinomio** $1 + 2\zeta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$
  proviene da una coppia di zeri (se a numeratore) o di poli (se a denominatore) complessi coniugati in $a \pm jb$, con $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\zeta = -a/\omega_n$

fattore costante k

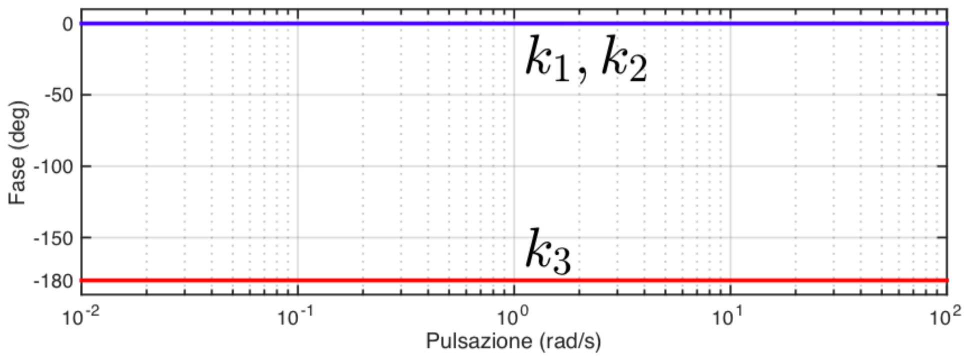
sul piano complesso
(e.g., $k_1 = 10$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = -10$)



modulo

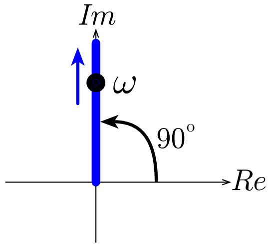


fase



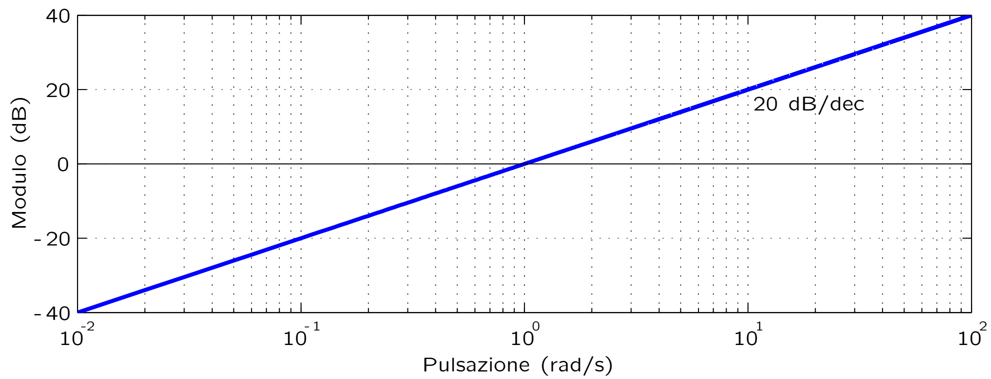
fattore monomio a numeratore $j\omega$

sul piano complesso

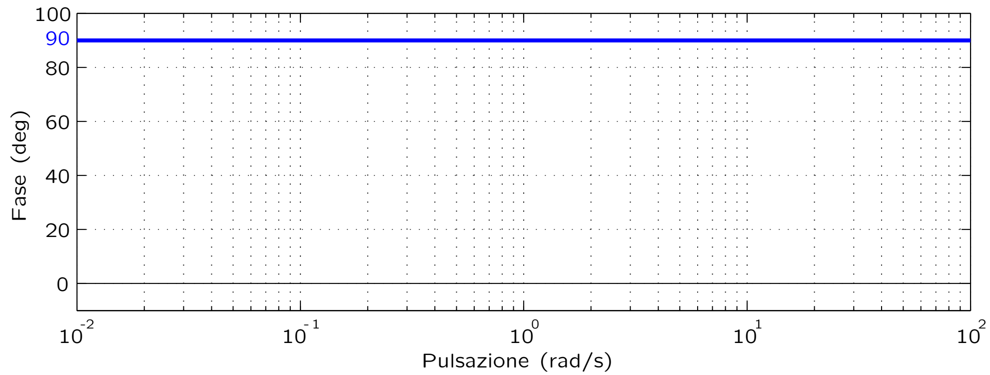


e si ha $|j\omega|_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} \omega$

modulo



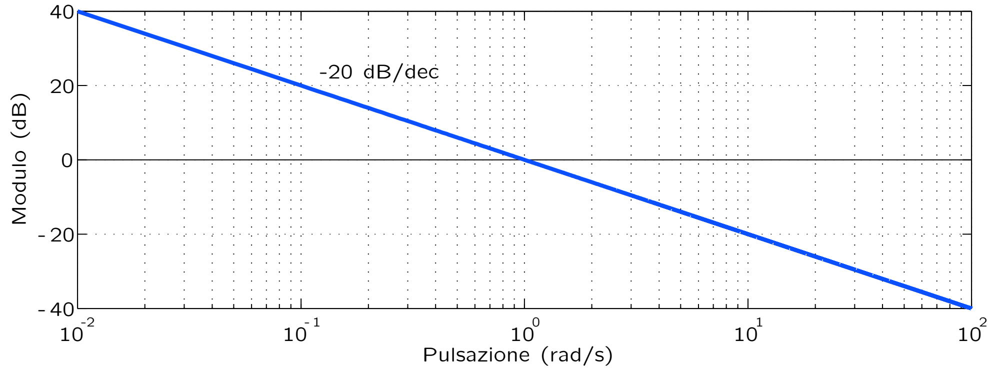
fase



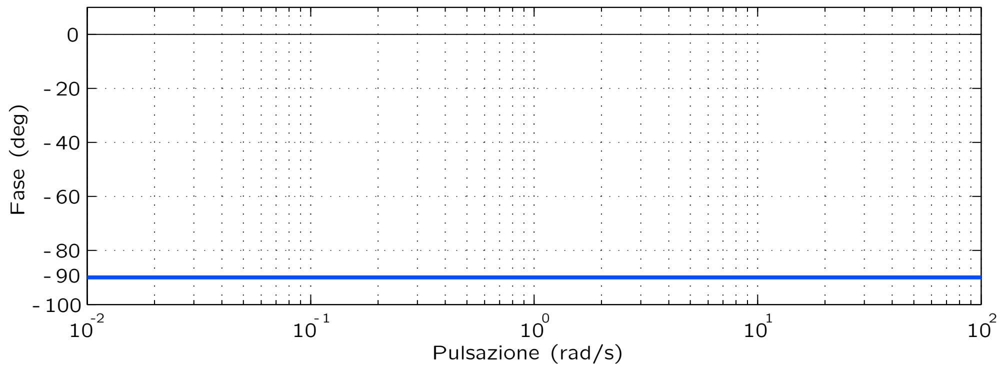
fattore monomio a denominatore $1/j\omega$

dalle ($\diamond$), ($*$) si ha

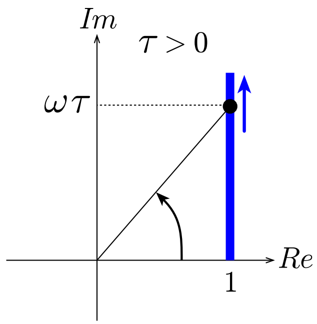
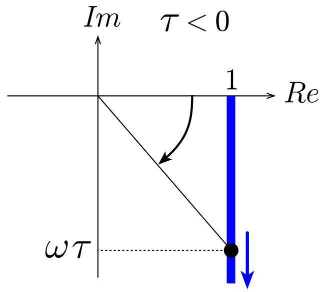
modulo



fase



fattore binomio a numeratore $1 + j\omega\tau$

sul piano complesso  oppure 

- **modulo**: $|1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$; essendo

$$\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \quad \approx \quad \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega \ll 1/|\tau| \\ \omega|\tau| & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

si ha

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} \quad \approx \quad \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \omega \ll 1/|\tau| \\ 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

queste due semirette costituiscono il **diagramma asintotico** del modulo

nota: lo scostamento max tra il diagramma reale e quello asintotico si ha proprio in corrispondenza alla **pulsazione di rottura** $1/|\tau|$ e vale $|1 + j\tau/|\tau||_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3$

- **fase**: procedendo in modo analogo si ha

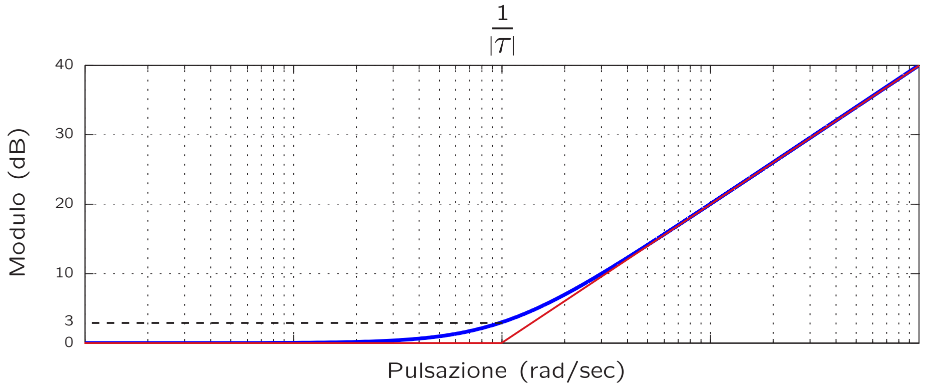
$$\angle 1 + j\omega\tau \quad \approx \quad \begin{cases} 0^\circ & \text{se} \quad \omega \ll 1/|\tau| \\ 90^\circ \ (-90^\circ) & \text{se} \quad \omega \gg 1/|\tau| \ \text{ e } \ \tau > 0 \ (\tau < 0) \end{cases}$$

questi due asintoti vengono raccordati da un segmento che parte da $0.1/|\tau|$ e termina in $10/|\tau|$; il **diagramma asintotico** della fase è quindi costituito da una spezzata a tre lati

nota: lo scostamento max tra il diagramma reale e quello asintotico si ha in corrispondenza alle pulsazioni $0.1/|\tau|$ e $10/|\tau$, e vale circa $\pm 6^\circ$

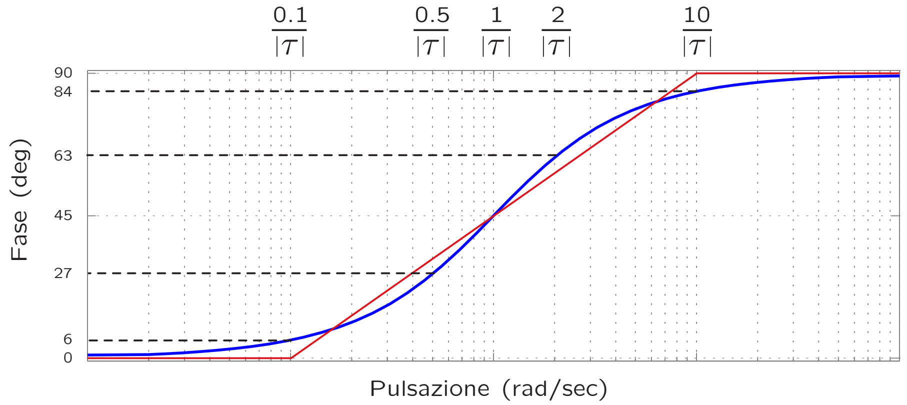
fattore binomio a numeratore $1 + j\omega\tau$

modulo



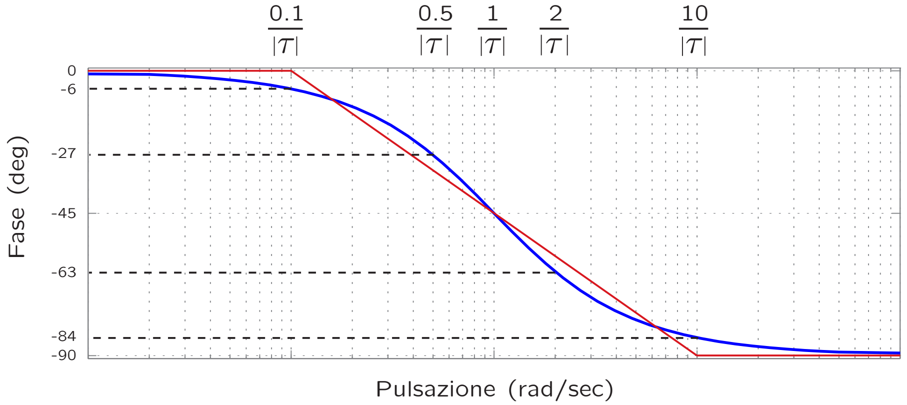
fase

per $\tau > 0$



fase

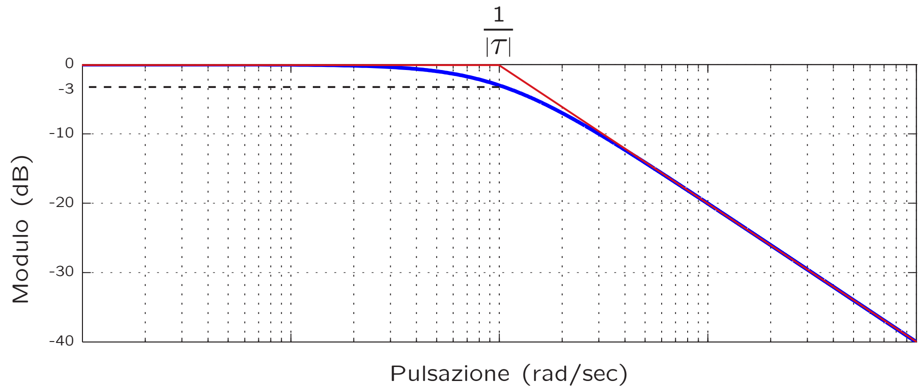
per $\tau < 0$



fattore binomio a denominatore $1/(1 + j\omega\tau)$

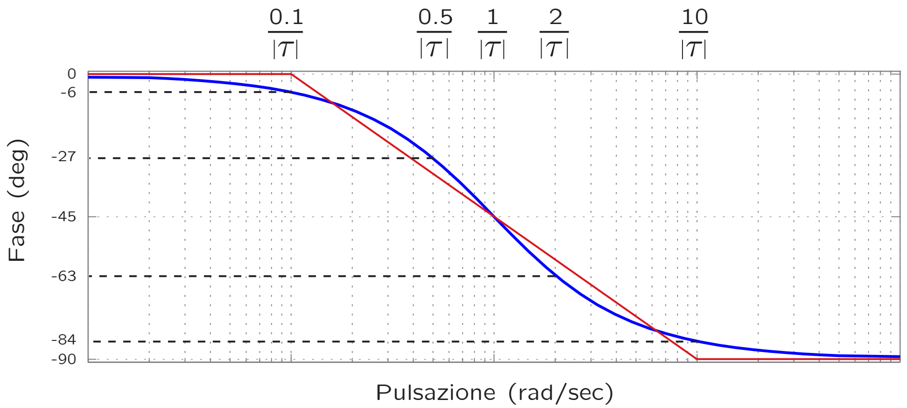
dalle ($\diamond$), ($*$) si ha

modulo



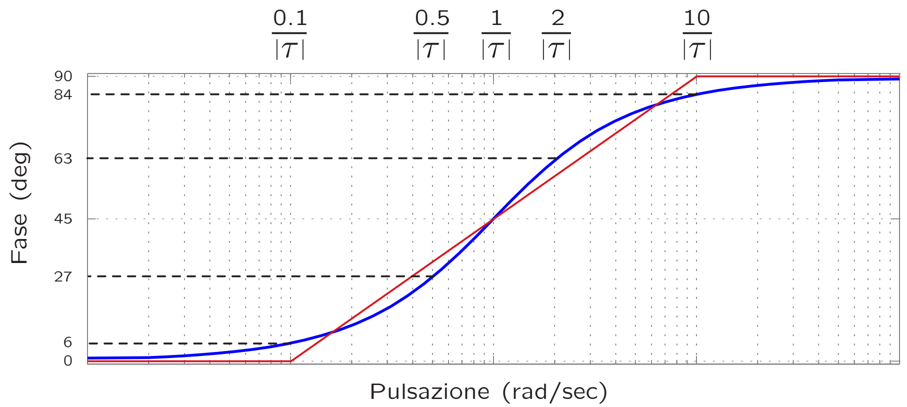
fase

per $\tau > 0$



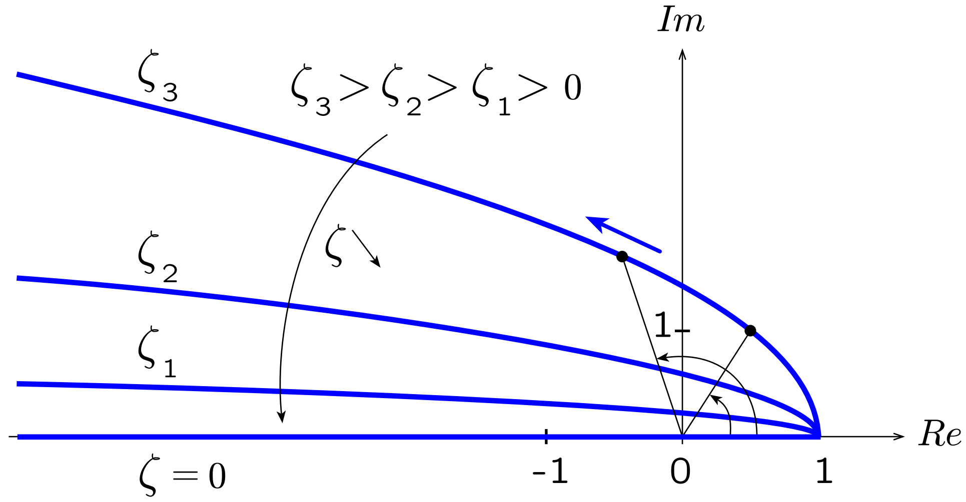
fase

per $\tau < 0$



fattore trinomio a numeratore $1 + 2\zeta j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$

sul piano complesso



- **modulo**: essendo

$$\left|1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right| = \left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

si ha

$$\left|1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right| \quad \approx \quad \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega \ll \omega_n \\ \frac{\omega^2}{\omega_n^2} & \text{se} \quad \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

da cui

$$\left|1+2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega)+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \omega \ll \omega_n \\ 40\log_{10}\omega - 40\log_{10}\omega_n & \text{se} \quad \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

queste due semirette costituiscono il **diagramma asintotico** del modulo

nota: lo scostamento tra il diagramma reale e quello asintotico in corrispondenza alla pulsazione naturale ω_n vale $20\log_{10} 2|\zeta|$

- **dipende da** $|\zeta|$! e.g., per $|\zeta| = 0$ lo scostamento in dB vale $-\infty$, per $|\zeta| = 0.5$ vale 0, per $|\zeta| = 1$ vale 6

- se $|\zeta| < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$, il modulo di un fattore trinomio a numeratore ha un 'picco' negativo (**antirisonanza**) in prossimità della pulsazione naturale, tanto più accentuato quanto minore è $|\zeta|$

- **fase**: procedendo in modo analogo si ha

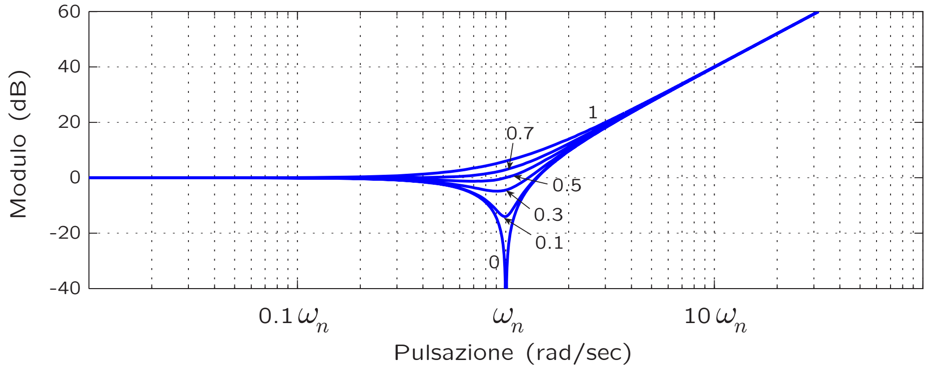
$$\angle\left(1+2\frac{\zeta}{\omega_n}(j\omega)+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)\approx\begin{cases} 0^\circ & \text{se} \quad \omega \ll \omega_n \\ 180^\circ \ (-180^\circ) & \text{se} \quad \omega \gg \omega_n \text{ e } \zeta > 0 \ (\zeta < 0) \end{cases}$$

  la transizione tra questi due valori avviene in modo **simmetrico** rispetto alla pulsazione naturale ω_n, e **tanto più bruscamente quanto minore è** $|\zeta|$; in particolare, per $\zeta = 0$ si ha una discontinuità nel diagramma delle fasi in corrispondenza a ω_n

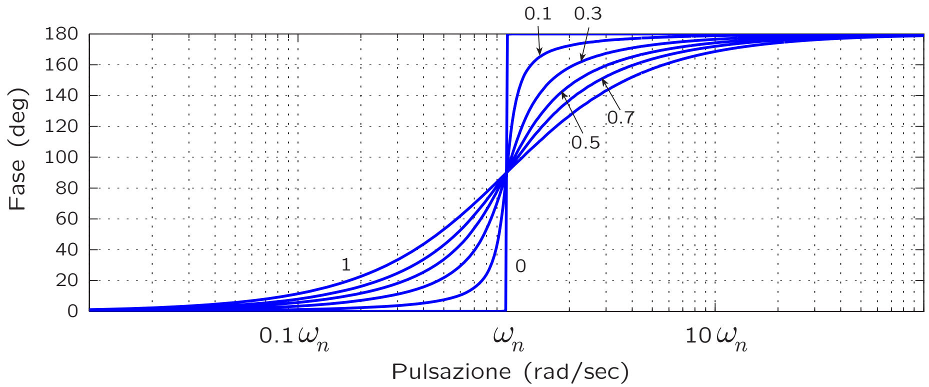
  nota: non esiste un diagramma asintotico per la fase del termine trinomio

fattore trinomio a numeratore

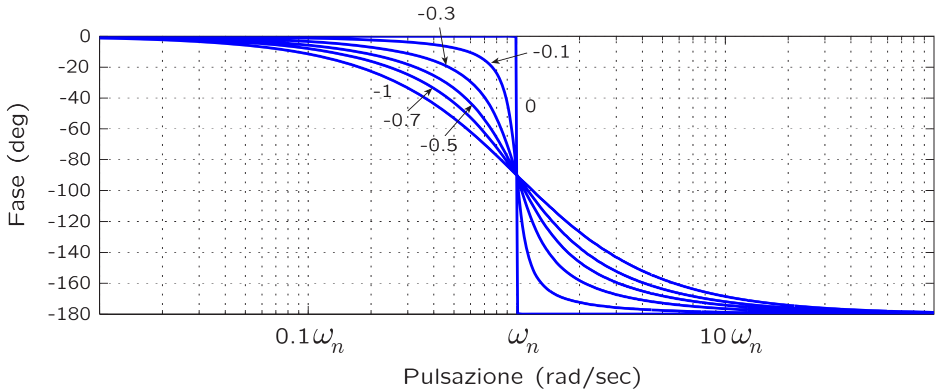
modulo
al variare di $|\zeta|$
(**antirisonanza** per $|\zeta| < 0.707$)



fase
al variare di $\zeta \geq 0$



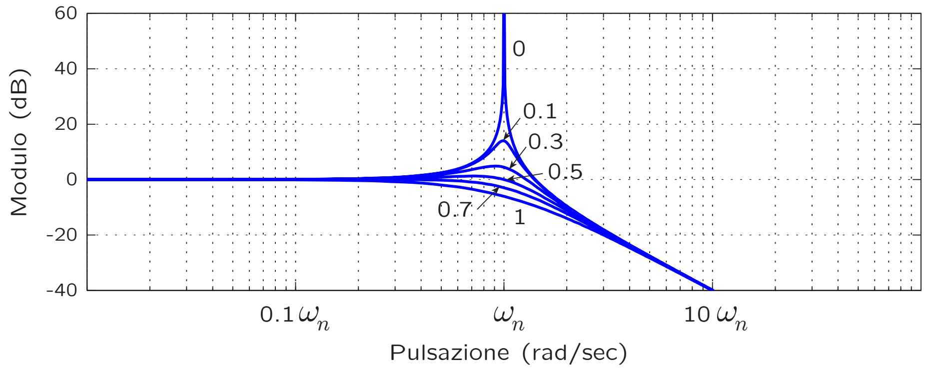
fase
al variare di $\zeta \leq 0$



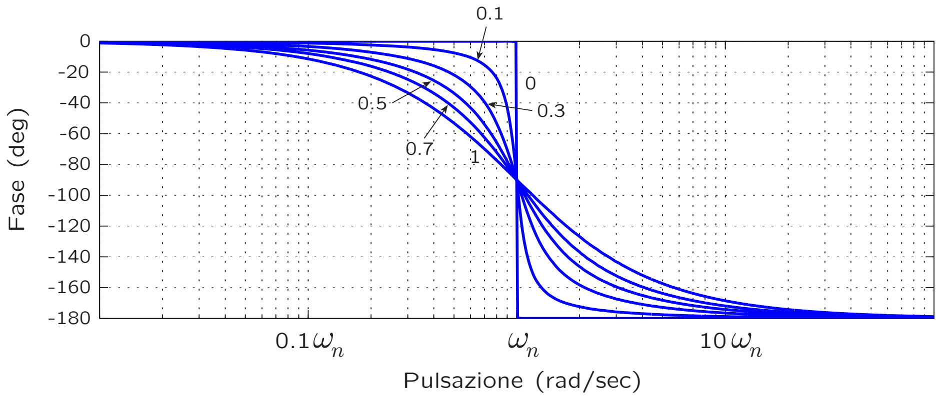
fattore trinomio a denominatore

dalle ($\diamond$), ($*$) si ha

modulo
al variare di $|\zeta|$
(**risonanza** per $|\zeta| < 0.707$)



fase
al variare di $\zeta \geq 0$



fase
al variare di $\zeta \leq 0$