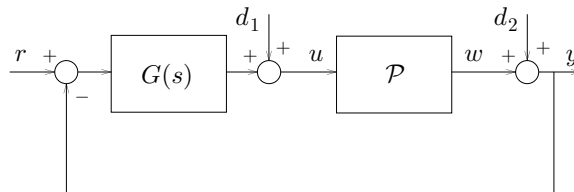


CONTROLLI AUTOMATICI II modulo

Prova intermedia di autovalutazione

Problema 1

Si consideri il sistema di controllo in figura



in cui il processo \mathcal{P} ha la seguente rappresentazione con lo spazio di stato

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -10x + 11u \\ w &= -x + u.\end{aligned}$$

Si progetti un compensatore $G(s)$ a dimensione minima e tale da garantire le seguenti specifiche:

- risposta nulla a regime permanente per un disturbo d_1 costante;
- risposta nulla a regime permanente per un disturbo $d_2 = \sin t$;
- stabilità asintotica.

Si traccino i vari luoghi delle radici di interesse.

Problema2

Si consideri un processo lineare SISO, strettamente causale e avente funzione di trasferimento $P(s)$, con m zeri ed n poli. Allora:

- il processo può sempre essere stabilizzato mediante un controllore di dimensione $m-1$;
- il processo può sempre essere stabilizzato mediante un controllore di dimensione $n-1$;
- se $P(s)$ ha poli qualsiasi ma tutti gli zeri a parte reale negativa, e inoltre si ha $n-m=1$, un guadagno sufficientemente elevato stabilizza il processo;
- se $P(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa ma uno o più zeri a parte reale positiva, un guadagno sufficientemente elevato destabilizza il processo;
- se $P(s)$ ha poli qualsiasi ma almeno uno zero a parte reale positiva, il processo non può mai essere stabilizzato da un semplice guadagno.

Annerire il cerchietto corrispondente alle risposte 'vere'.

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo Soluzione della prova intermedia di autovalutazione

Problema 1

La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = 1 - \frac{11}{s + 10} = \frac{s - 1}{s + 10}$$

Le prime due specifiche richiedono rispettivamente l'introduzione in $G(s)$ di un polo nell'origine e di due poli immaginari in $\pm j$. Si ha perciò

$$G(s) = \frac{R(s)}{s(s^2 + 1)},$$

dove $R(s)$ va scelta in modo tale da garantire la stabilità asintotica.

Per individuare un compensatore a dimensione minima, conviene valutare dapprima la possibilità di scegliere $R(s) = K$. Tuttavia, il tracciamento del corrispondente luogo delle radici (Fig. 1) mostra immediatamente che non è possibile scegliere K in modo tale da ottenere stabilità asintotica. La stessa conclusione si ottiene applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 10s^3 + s^2 + (K + 10)s - K.$$

Si ottiene infatti la seguente tabella

1	1	$-K$
10	$10 + K$	
$-K$	$-10K$	
$K(90 - K)$		
$-10K$		

ed è impossibile scegliere K in modo da rendere positivi tutti gli elementi della prima colonna.

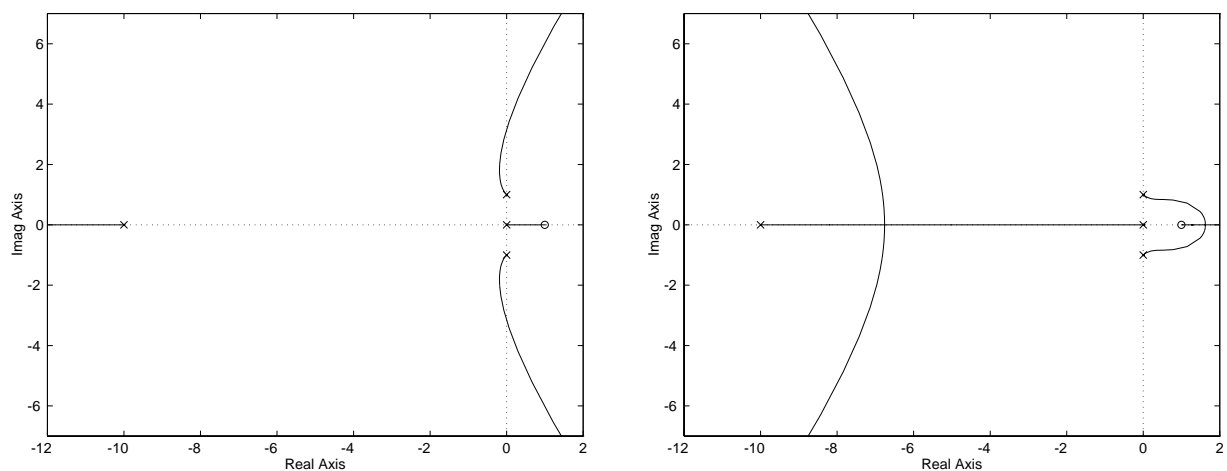


Figura 1: Luogo positivo e negativo per $R(s) = K$

Il passo successivo nella ricerca di una soluzione di dimensione minima consiste nel porre $R(s) = K(s + z)$, con $z < 0$. La scelta di uno zero a parte reale positiva appare obbligata poiché uno zero a

parte reale negativa non altererebbe in modo significativo il luogo delle radici nel semipiano destro. A conferma di tale intuizione, conviene applicare il criterio di Routh al nuovo denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 10s^3 + (K + 1)s^2 + (K(z - 1) + 10)s - Kz.$$

La tabella corrispondente è

1	$K + 1$	$-Kz$
10	$K(z - 1) + 10$	
a	$-10Kz$	
b		
$-10Kz$		

Semplici calcoli forniscono

$$a = K(11 - z) \quad b = K[10(11 + 9z) + K(-z^2 + 12z - 11)].$$

Devono perciò essere verificate contemporaneamente le condizioni

$$K(11 - z) > 0 \quad K[10(11 + 9z) + K(-z^2 + 12z - 11)] > 0 \quad Kz < 0.$$

Posto $K > 0$ e $z < 0$, la prima e la terza condizione sono sempre soddisfatte. La seconda implica

$$10(11 + 9z) + K(-z^2 + 12z - 11) > 0$$

ovvero

$$K < \frac{10(11 + 9z)}{z^2 - 12z + 11}, \tag{1}$$

dove si è tenuto conto del fatto che per $z < 0$ si ha certamente $z^2 - 12z + 11 > 0$. In conclusione, per avere un intervallo ammissibile di valori positivi di K si deve scegliere

$$-\frac{11}{9} < z < 0.$$

Ad esempio, una scelta possibile è $z = -0.1$, cui corrisponde un sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile per $0 < K < 8.27$. Il luogo positivo delle radici corrispondente è riportato in Fig. 2.

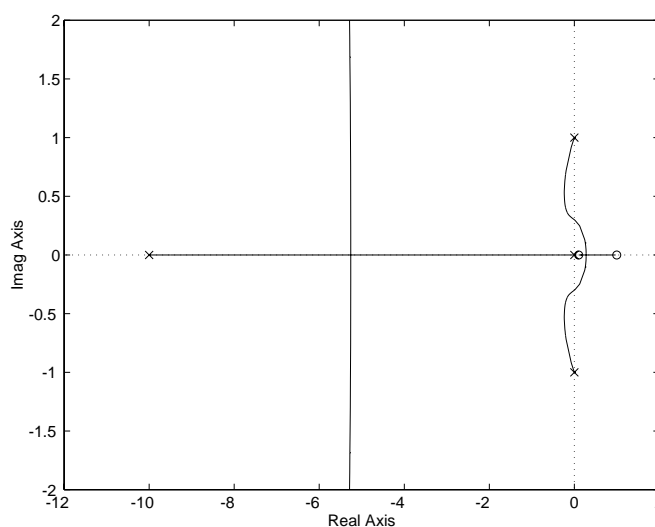


Figura 2: Luogo positivo per $R(s) = K(s - 0.1)$

Soluzione alternativa È possibile procedere per assegnazione dei poli. Posto

$$G(s) = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{s(s^2 + 1)},$$

con a , b , c e d costanti da determinare, il polinomio caratteristico $p(s)$ ad anello chiuso è di quarto grado e risulta non monico. Imponendo ad esempio l'identità tra $p(s)$ e

$$p^*(s) = e(s + 1)^4,$$

con e costante da determinare, si ottiene un sistema di 5 equazioni in 5 incognite, la cui soluzione è

$$a = \frac{3}{8} \quad b = -\frac{33}{8} \quad c = \frac{25}{8} \quad d = -\frac{11}{8} \quad e = \frac{11}{8}.$$

Il controllore risultante ha ancora dimensione 3.

Problema 2

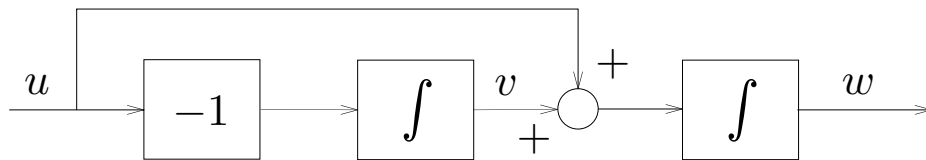
- (vedi risposta successiva)
- (infatti, è sempre possibile assegnare arbitrariamente i poli dell'anello chiuso con un controllore proprio di tale dimensione)
- (dal luogo delle radici per sistemi a fase minima e aventi $n - m = 1$)
- (almeno un ramo converge sullo zero a parte reale positiva)
- (ad esempio, la funzione di trasferimento $P(s) = K \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$ dà un sistema retroazionato asintoticamente stabile per $5 < K < 6$)

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo – Prova finale di autovalutazione

8 gennaio 2003

Problema 1

Si consideri il sistema in figura.



- a) Assumendo che entrambi i segnali v e w siano misurabili, quali condizioni devono soddisfare gli elementi della matrice K affinché un controllore della forma

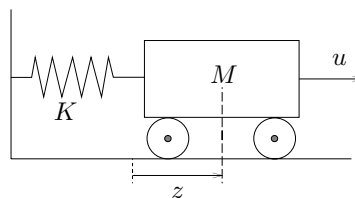
$$u = K \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

renda stabile asintoticamente il sistema ad anello chiuso?

- b) In particolare, determinare K in modo tale che il sistema ad anello chiuso abbia due autovalori con pulsazione naturale $\omega_n = 2$ rad/sec e coefficiente di smorzamento $\zeta = 0.5$.
- c) Assumendo che il solo segnale w sia misurabile, si completi il progetto del punto b) attraverso la sintesi di un osservatore, con il vincolo che la rapidità di decadimento dell'errore di osservazione sia doppia di quella con cui convergono a zero i segnali v e w . Si forniscano anche le equazioni di stato e la funzione di trasferimento del corrispondente controllore costruito sulla base del principio di separazione.

Problema 2

Un carrello di massa $M > 0$ è vincolato a un muro da una molla di costante elastica $K > 0$; z ne denota lo scostamento rispetto alla posizione di riposo (molla indeformata). Sul carrello, che si muove in assenza di attrito, è possibile esercitare una forza di trazione u . Il carrello è equipaggiato con un unico sensore, in grado però di misurarne a scelta la posizione ($y = z$) oppure la velocità ($y = \dot{z}$), ma non entrambe.



- a) Quale grandezza si deve misurare nel caso in cui si voglia stabilizzare il sistema con una legge di controllo del tipo $u = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}$?
- b) Quale grandezza si deve misurare nel caso in cui si voglia costruire un osservatore dello stato del sistema in grado di funzionare anche per $K = 0$?

Si motivino le risposte.

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Soluzione della prova finale di autovalutazione

8 gennaio 2003

Problema 1

La rappresentazione del sistema nello spazio di stato è

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -u \\ \dot{w} &= v + u\end{aligned}$$

cui corrisponde la coppia di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che la rappresentazione è completamente raggiungibile.

Per quanto riguarda il punto a), posto $K = (k_1 \ k_2)$, il polinomio caratteristico di $A + BK$ assume la forma

$$\lambda^2 + (k_1 - k_2)\lambda + k_2.$$

Di conseguenza, per avere stabilità asintotica deve essere $k_1 > k_2 > 0$.

Venendo al punto b), una semplice costruzione geometrica mostra che i poli richiesti si trovano in $-1 \pm j\sqrt{3}$. Imponendo l'identità tra il polinomio caratteristico di $A + BK$ e quello desiderato

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4,$$

si ottiene facilmente la matrice richiesta $K = (6 \ 4)$.

Il quesito c) richiede la costruzione di un dispositivo che ricostruisca l'intero stato $(v \ w)$ a partire dalla misura di u e di

$$w = C \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = (0 \ 1).$$

La dinamica di tale dispositivi può essere assegnata arbitrariamente perché la rappresentazione è completamente osservabile. Poiché gli autovalori del processo controllato sono in $-1 \pm j\sqrt{3}$, l'enunciato del problema richiede in sostanza che gli autovalori della dinamica di osservazione abbiano parte reale pari a -2 . Per semplicità, conviene sceglierli appunto in -2 , cioè reali e coincidenti.

Le equazioni del controllore risultante sono le seguenti

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A + BK - GC)\xi + Gw \\ u &= K\xi\end{aligned}$$

con la matrice K individuata in precedenza e

$$G = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La funzione di trasferimento del corrispondente compensatore è

$$G(s) = K(sI - A - BK + GC)^{-1}G = \frac{40s + 16}{s^2 + 5s + 6}.$$

Problema 2

Dal bilanciamento delle forze che agiscono sul carrello si ha

$$M\ddot{z} = u - Kz.$$

Definendo il vettore di stato come segue

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

l'equazione di stato del sistema assume la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{z} = -\frac{K}{M}x_1 + \frac{u}{M} \end{aligned}$$

ovvero, in forma matriciale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}.$$

La matrice C dipende da quale grandezza si decide di misurare. In particolare, si ha

$$C = C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nel caso in cui il sensore misuri la posizione $z = x_1$, e

$$C = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nel caso in cui il sensore misuri la velocità $\dot{z} = x_2$.

Si noti che la matrice A è in forma compagna; in particolare, il suo polinomio caratteristico vale $\lambda^2 + K/M$, e quindi gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{K/M}$.

Per quanto riguarda il punto a), l'equazione di stato ad anello chiuso diviene

$$\dot{x} = Ax + B\alpha y = Ax + \alpha BCx = (A + \alpha BC)x.$$

È facile verificare che il polinomio caratteristico della matrice $(A + \alpha BC_1)$ manca sempre del termine di primo grado; di conseguenza, non esiste nessun valore di α che stabilizzi il sistema se si usa una retroazione di posizione. Al contrario, la matrice $(A + \alpha BC_2)$ ha due autovalori a parte reale negativa purché sia $\alpha < 0$; una retroazione negativa di velocità $u = -\alpha x_2 = -\alpha \dot{z}$ risolve perciò il problema di stabilizzazione (si noti che ciò corrisponde ad iniettare attrito viscoso nel sistema attraverso l'azione di controllo).

Venendo al punto b), è necessaria l'osservabilità (o almeno la rilevabilità) della coppia (A, C) per $K = 0$. Semplici calcoli indicano che ponendo $C = C_1$ il sistema è osservabile per qualsiasi valore di K , e quindi è sempre possibile costruire un osservatore dell'intero stato a partire dalla misura della posizione del carrello. Se invece si misura la velocità del carrello, si vede immediatamente che la matrice di osservabilità ha rango 1 nel caso $K = 0$. Poiché entrambi gli autovalori di A hanno parte reale nulla, si può senz'altro concludere che per $K = 0$ il sistema non è rilevabile a partire dalla misura della velocità del carrello.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
5 aprile 2005

Problema 1

Si consideri il processo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -12x - u \\ y &= 9x + u\end{aligned}$$

Utilizzando il metodo basato sul luogo delle radici, si progetti uno schema di controllo a retroazione dall'uscita avente dimensione *minima* e in grado di garantire le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo in presenza di un riferimento costante e di un disturbo sinusoidale di pulsazione unitaria sovrapposto all'uscita;
- autovalori del sistema ad anello chiuso aventi parte reale non superiore a -2 .

Problema 2

Per il processo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0 \ 0) x\end{aligned}$$

- a) Supponendo di disporre della misura di due (delle tre) variabili di stato arbitrarie, si determini un controllore istantaneo tale che gli autovalori del sistema ad anello chiuso siano tutti coincidenti.
- b) Si risolva lo stesso problema del punto precedente nell'ipotesi di avere a disposizione solo la misura dell'uscita. È necessario indicare chiaramente le equazioni di stato del controllore.

Problema 3

Annerire il cerchietto in corrispondenza alle affermazioni certamente 'vere'.

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

- Il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato solo se $a < 0$ e $c < 0$.
- Il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato solo se $c < 0$.
- Se $c > 0$, l'evoluzione libera nello stato diverge per qualsiasi condizione iniziale.
- Se $b = 0$, il sistema non è rilevabile.
- Se $b = 0$ e $c < 0$, il sistema non è rilevabile.
- Si consideri un sistema a fase minima con eccesso poli-zeri $n - m = 3$.
 - Il relativo luogo delle radici presenta 2 punti singolari.
 - Non è possibile stabilizzare il sistema ad anello chiuso con un semplice guadagno.
 - È possibile stabilizzare il sistema ad anello chiuso con un semplice guadagno se il centro degli asintoti è minore di zero.
 - Esiste un controllore stabilizzante di dimensione 2.
 - Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso.

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 5 aprile 2005

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

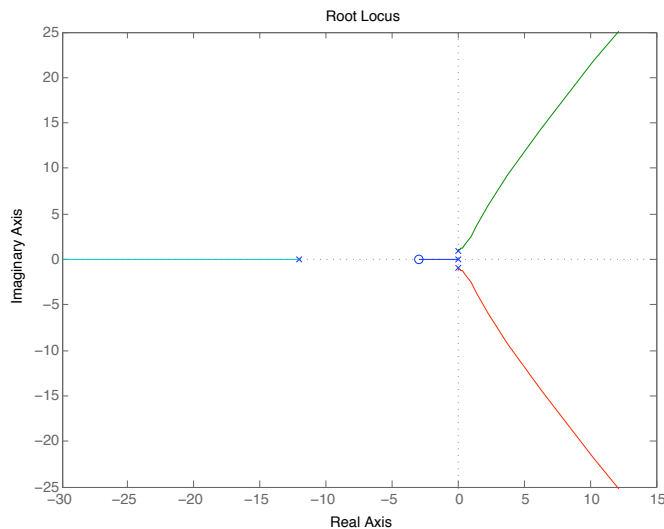
La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s + 3}{s + 12}$$

Per soddisfare la prima specifica è necessario introdurre nel controllore un polo nell'origine e una coppia di poli immaginari in $\pm j$. La funzione di trasferimento del processo modificato è quindi

$$\hat{P}(s) = k \frac{s + 3}{s(s^2 + 1)(s + 12)}$$

Per stabilire se è possibile soddisfare la seconda specifica attraverso la scelta di k si traccia il luogo delle radici del sistema ad anello chiuso.



Il luogo indica che il problema non può essere risolto con un semplice guadagno. Per stabilire ciò con certezza, si osservi che il denominatore dell'anello chiuso vale

$$D_1(s) = s(s^2 + 1)(s + 12) + k(s + 3)$$

Sostituendo $s - 2$ ad s si trova che ci sono sempre delle variazioni di segno tra i coefficienti. Di conseguenza non esiste alcun valore di k per cui tutti i poli hanno parte reale minore o uguale a -2 .

Poichè il sistema è a fase minima, è possibile provare ad inserire nel controllore (che contiene già tre poli) uno zero in $-z$. In questo modo si ridurrà l'eccesso poli-zeri a 2; di conseguenza, se è possibile ottenere che *il centro degli asintoti si trovi a sinistra di -2* con uno zero *anch'esso a sinistra di -2* il problema sarà risolto con un k sufficientemente grande (si ricordi che per $k \rightarrow \infty$ due radici andranno agli asintoti e due convergeranno sugli zeri). Si ha

$$s_0 = \frac{-12 + 3 + z}{2} < -2 \quad \Rightarrow \quad z < 5$$

e quindi è necessario prendere $2 < z < 5$.

Calcolando il denominatore del sistema ad anello chiuso in corrispondenza a

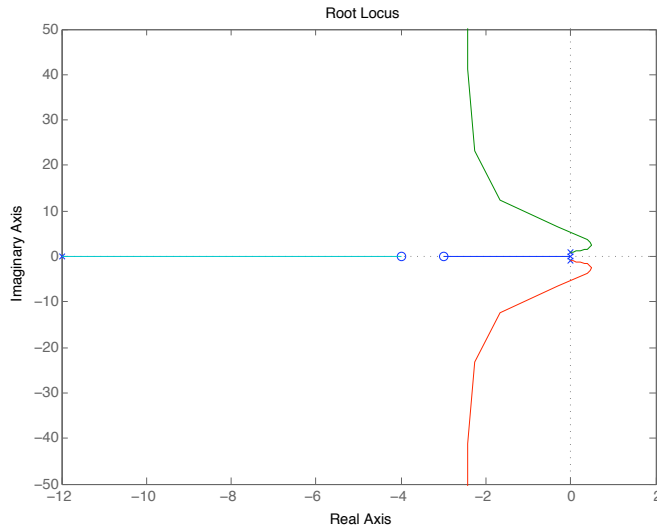
$$F(s) = k \frac{(s + 3)(s + z)}{s(s^2 + 1)(s + 12)}$$

e sostituendo $s - 2$ ad s , si trova il seguente polinomio

$$D_2(s) = s^4 + 4s^3 + (k - 47)s^2 + (k(z - 1) + 120)s + k(z - 2) - 100$$

Costruendo la relativa tabella di Routh si trova il valore critico di k oltre il quale è garantito il soddisfacimento della specifica sugli autovalori. Ad esempio, per $z = 3$ si trova $k > 155.02$; per $z = 4$ si trova $k > 316.86$. Il luogo delle radici finale mostrato di seguito si riferisce appunto al caso $z = 4$. Il controllore risultante è

$$P(s) = k \frac{s + 4}{s(s^2 + 1)}$$



Una soluzione ugualmente valida (ancorché meno elegante) consisteva nell'introdurre *due* zeri (entrambi a sinistra di -2) nel controllore, in modo da ridurre l'eccesso poli-zeri a 1. In questo caso, uno dei due zeri poteva essere collocato in -12 in modo da semplificare i calcoli successivi. L'applicazione del criterio di Routh forniva anche in questo caso il valore minimo richiesto per k .

Problema 2

a) La matrice di raggiungibilità del sistema ha rango 2. Di conseguenza, si effettua la decomposizione di Kalman per individuare l'autovalore non raggiungibile, che risulta essere collocato in -1 . Quindi, per risolvere il problema, si determina K in modo che $A + BK$ abbia tre autovalori coincidenti in -1 . Si trova

$$K = \left(-\frac{16}{3} - \alpha \quad -\frac{2}{3} \quad \alpha \right)$$

con α arbitrario. Di conseguenza, le uniche due retroazioni valide che possono essere implementate con due misure sono

$$K_1 = \left(-\frac{16}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad 0 \right) \quad \text{e} \quad K_2 = \left(0 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{16}{3} \right)$$

b) Il sistema è già in forma canonica rispetto alla osservabilità, e l'autovalore inosservabile è collocato in -1 . Si ottiene facilmente

$$G = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ \beta \end{pmatrix}$$

con β arbitrario. Le equazioni di stato del controllore sono

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A + BK - GC)\xi + Gy \\ u &= K\xi \end{aligned}$$

con $K = K_1$ o $K = K_2$.

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

- Il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato solo se $a < 0$ e $c < 0$.
FALSO: Il sistema è in forma canonica rispetto alla raggiungibilità. Quindi affinché sia stabilizzabile è necessario e sufficiente che sia $c < 0$.
 - Il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato solo se $c < 0$.
VERO: Vedi risposta precedente.
 - Se $c > 0$, l'evoluzione libera nello stato diverge per qualsiasi condizione iniziale.
FALSO: Dipende dall'altro autovalore a . Se esso è negativo, tutte le condizioni iniziali allineate con il relativo autovettore ecciteranno solo il modo naturale e^{-at} , e quindi daranno luogo a evoluzioni convergenti.
 - Se $b = 0$, il sistema non è rilevabile.
FALSO: Se $b = 0$, il sistema è in forma canonica rispetto alla osservabilità. La rilevabilità dipenderà dall'autovalore inosservabile c ; se $c < 0$, il sistema sarà rilevabile.
 - Se $b = 0$ e $c < 0$, il sistema non è rilevabile.
FALSO: Vedi risposta precedente.
- Si consideri un sistema a fase minima con eccesso poli-zeri $n - m = 3$.
 - Il relativo luogo delle radici presenta 2 punti singolari.
FALSO: Tutto ciò che si può dire è che il luogo presenta *al più* $n + m - 1$ punti singolari.
 - Non è possibile stabilizzare il sistema ad anello chiuso con un semplice guadagno.
FALSO: Non è detto. I rami del luogo positivo potrebbero essere tutti contenuti nel semipiano sinistro per un intervallo di valori di k (mentre certamente vanno nel semipiano destro per valori elevati di k).
 - E' possibile stabilizzare il sistema ad anello chiuso con un semplice guadagno se il centro degli asintoti è minore di zero.
FALSO: Un controesempio è dato proprio dal primo problema di questa prova.
 - Esiste un controllore stabilizzante di dimensione 2.
VERO: Poiché il sistema ha fase minima, si può sempre procedere così: si aggiunge uno zero per ridurre l'eccesso poli-zeri a 2, poi con una coppia polo-zero si sposta il centro degli asintoti nel semipiano sinistro (se necessario) e infine si recupera la realizzabilità del controllore con un polo sufficientemente lontano. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 2.
 - Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso.
FALSO: Dipende da n , che è ignoto. Un controllore che assegni arbitrariamente i poli ad anello chiuso deve avere dimensione $n - 1$.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
15 aprile 2005

Problema 1

Si consideri il processo costituito dalla cascata dei due blocchi aventi funzioni di trasferimento

$$P_1(s) = \frac{1}{s-1} \quad P_2(s) = \frac{s-1}{s-2}$$

In particolare, l'uscita di P_1 è l'ingresso di P_2 . Le uscite dei due blocchi sono misurabili da appositi sensori.

Si progetti uno schema di controllo a retroazione avente dimensione complessiva *minima* e in grado di stabilizzare il processo. Al termine, si modifichi il guadagno del controllore ottenuto in modo da garantire che i poli del sistema ad anello chiuso siano (oltre che a parte reale negativa) coincidenti.

Problema 2

Per il processo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0 \ 0) x \end{aligned}$$

- a) Si studino le proprietà di stabilizzabilità (sia dallo stato che dall'uscita) e di rilevabilità del processo al variare di α e β .
- b) Si determinino *tutti* i controllori a retroazione dallo stato in grado di stabilizzare il processo.

Problema 3

Annerire il cerchietto in corrispondenza alle affermazioni certamente 'vere'.

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

- È possibile costruire un osservatore del sistema solo se $b < 0$.
- È possibile stabilizzare il sistema dall'uscita solo se $b < 0$.
- Se $b < 0$, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
- Se $b < 0$, esiste un controllore dall'uscita in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso,
- Lo sforzo di controllo per un controllore dinamico dall'uscita è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di convergenza dell'errore di osservazione.
- Si consideri un sistema a fase minima con tre poli p_1, p_2, p_3 e uno zero z .
 - Se i poli sono reali, il luogo delle radici ad anello chiuso presenta almeno un punto singolare.
 - Esiste un controllore stabilizzante di dimensione 1.
 - Esiste un controllore di dimensione 2 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
 - Se $\sum_i p_i - z < 0$, esiste un controllore di dimensione 1 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
 - Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso e garantisce la riproduzione esatta di riferimenti costanti.

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 15 aprile 2005

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

Per evitare la cancellazione polo-zero, che darebbe luogo a un autovalore nascosto instabile, si ricorre ad uno schema con un doppio anello di retroazione. Allo scopo di limitare la dimensione del controllore, si prova a risolvere il problema con due semplici guadagni: quello più interno, k_2 , viene collocato sul ramo diretto a monte del primo blocco della cascata, mentre quello più esterno, k_1 , si trova sul ramo diretto a monte dell'anello interno.

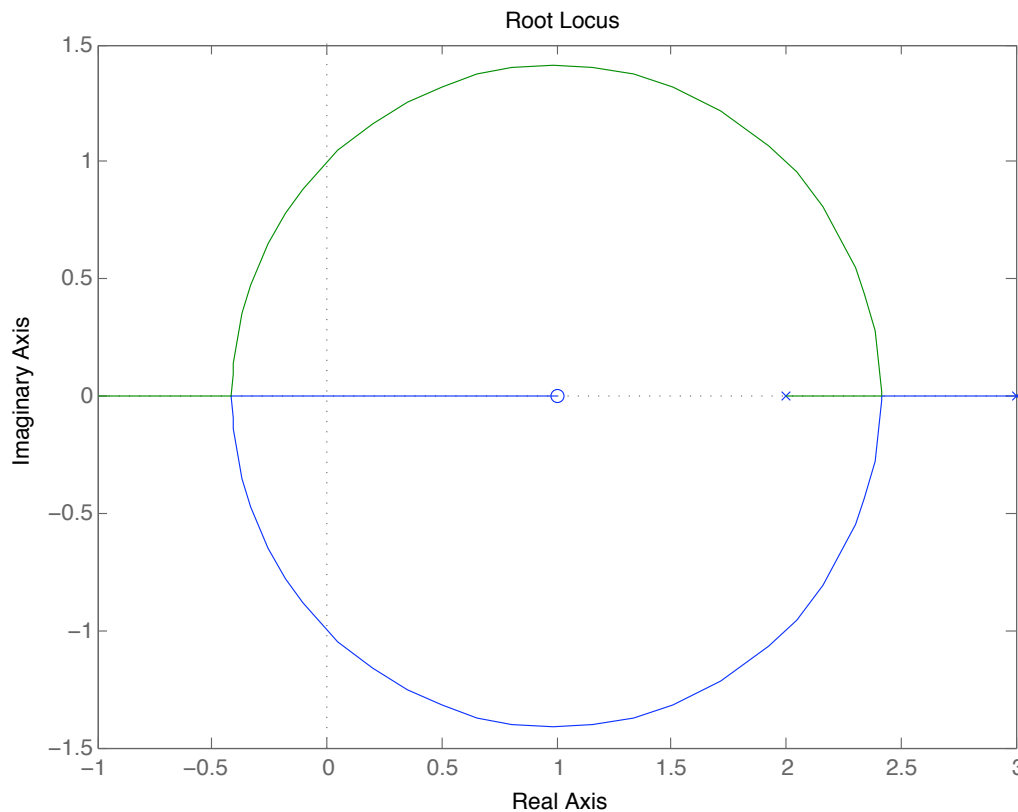
La funzione di trasferimento dell'anello interno è

$$F_1(s) = \frac{k_2}{s + k_2 - 1} = \frac{k_2}{s - p}$$

con $p = 1 - k_2$. La funzione di trasferimento del ramo diretto diviene dunque

$$F(s) = k_1 F_1(s) \frac{s-1}{s-2} = k_1 k_2 \frac{s-1}{(s-p)(s-2)} = k \frac{s-1}{(s-p)(s-2)}$$

dove si è posto $k = k_1 k_2$. Il tracciamento del corrispondente luogo delle radici mostra immediatamente che è necessario avere $p > 1$ (cioè $k_2 < 0$) per creare un punto singolare nel luogo positivo contenuto nel semipiano destro e sperare di ottenere una situazione come quella di figura, in cui l'altro punto singolare si trova nel semipiano sinistro (qui si è posto $p = 3$ per illustrazione).



Indicazioni più precise si possono trarre dal denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso, che vale

$$D_W(s) = s^2 + (k - p - 2)s + 2p - k$$

Si ha stabilità asintotica se $k - p - 2 > 0$ e $2p - k > 0$, cioè se

$$k > 2 + p \quad \text{e} \quad k < 2p$$

Quindi, è necessario avere

$$2 + p < p \quad \Rightarrow \quad p > 2$$

che è una condizione più stringente di quella ricavata dall'analisi del luogo. Di conseguenza, *qualsiasi* collocazione del polo p a destra di 2 crea una situazione come quella in figura, in cui l'altro punto singolare del luogo positivo si trova nel semipiano sinistro.

Scelto dunque $k_2 < -1$ per avere $p > 2$, si deve imporre $2 + p < k < 2p$ ovvero

$$\frac{2(1 - k_2)}{k_2} < k_1 < \frac{3 - k_2}{k_2}$$

Per ottenere che i poli del sistema ad anello chiuso siano a parte reale negativa e coincidenti, è necessario scegliere k in corrispondenza al punto singolare che si trova nel semipiano sinistro, che vale $s_1 = 1 - \sqrt{p-1}$ (dall'equazione dei punti singolari). Tale valore di k si può individuare imponendo dunque che il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso valga $(s - s_1)^2$. Uguagliando i coefficienti dei due polinomi si ottiene

$$k = p + 2\sqrt{p-1}$$

che, per ogni valore scelto per $p > 2$ (e dunque per k_1), fornisce il valore di k (e dunque di k_1) richiesto.

Problema 2

a) Il sistema è in forma canonica di Kalman rispetto alla raggiungibilità, e l'autovalore β non è raggiungibile. Quindi, deve essere necessariamente $\beta < 0$ per avere stabilizzabilità con reazione dallo stato. Il determinante della matrice di raggiungibilità 'ristretta'

$$\det P_1 = \det(B_1 \ A_{11}B_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 - \alpha$$

è diverso da zero se $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = 1$, c'è un altro autovalore non raggiungibile. In questo caso, poiché gli autovalori di A_{11} sono α (cioè 1) e 2, tale autovalore è certamente positivo, e dunque il sistema non è stabilizzabile con reazione dallo stato. Riassumendo, il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\beta < 0$.

Per quanto riguarda la rilevabilità, si verifica facilmente che il sistema è osservabile se $\beta \neq 2$. D'altra parte, se $\beta = 2$ il sistema ha due autovalori in 2; poiché l'altro autovalore in α è osservabile (si verifica immediatamente dal PBH test), uno di questi due autovalori è inosservabile, e dunque il sistema non è rilevabile. Ciò indica anche che se il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato lo è anche con reazione dall'uscita (infatti $\beta < 0$ garantisce che $\beta \neq 2$).

b) Se $\alpha \neq 1$ e $\beta < 0$, le retroazioni che stabilizzano il processo hanno la forma $u = Kx$, con $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$ e k_3 ininfluenza. Quindi basta risolvere il problema di stabilizzazione 'ristretta' assegnando autovalori a parte reale negativa alla matrice

$$A_{11} + B_1(k_1 \ k_2)$$

il cui polinomio caratteristico risulta essere

$$\lambda^2 - (k_1 + k_2 + \alpha + 2)\lambda + k_1 + \alpha k_2 + 2\alpha$$

Quindi, la condizione affinché gli autovalori abbiano parte reale negativa è

$$k_1 + k_2 + \alpha + 2 < 0 \quad \text{e} \quad k_1 + \alpha k_2 + 2\alpha > 0$$

mentre k_3 può essere scelto arbitrariamente.

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

- È possibile costruire un osservatore del sistema solo se $b < 0$.
FALSO: Il sistema è sempre osservabile (la matrice di osservabilità ha sempre rango pieno),
- È possibile stabilizzare il sistema dall'uscita solo se $b < 0$.
VERO: Infatti questa è la condizione necessaria (e sufficiente) per avere stabilizzabilità dallo stato (si osservi che il sistema è in forma canonica di Kalman rispetto alla raggiungibilità, e in particolare l'autovalore b non è raggiungibile). Poiché il sistema è sempre osservabile, tale condizione è anche necessaria (e sufficiente) per la stabilizzabilità dall'uscita.
- Se $b < 0$, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
VERO: In questo caso, infatti, è possibile stabilizzare il sistema con (infinite) retroazioni dallo stato $u = Kx$, con $K = (k_1 \ k_2)$. Poiché l'autovalore b non è raggiungibile, la costante k_2 è ininfluente, e si può porre $k_2 = 0$. Dunque esistono (infiniti) controllori stabilizzanti della forma $u = k_1 x_1 = k_1 y$ (si osservi l'equazione di uscita del processo).
- Se $b < 0$, esiste un controllore dall'uscita in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso.
FALSO: L'autovalore b non è raggiungibile, quindi è impossibile spostarlo con una retroazione.
- Lo sforzo di controllo per un controllore dinamico dall'uscita è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di convergenza dell'errore di osservazione.
FALSO: Lo sforzo di controllo dipende dalla dinamica del processo controllato, e cioè dagli autovalori di $A + BK$.

- Si consideri un sistema a fase minima con tre poli p_1, p_2, p_3 e uno zero z .

- Se i poli sono reali, il luogo delle radici ad anello chiuso presenta almeno un punto singolare.
VERO: Infatti, con tre poli reali ed uno zero ci saranno sempre due poli 'contigui' sull'asse reale. Ciò darà luogo a un punto singolare nel segmento compreso tra i due poli.
- Esiste un controllore stabilizzante di dimensione 1.
VERO: Infatti, essendo il sistema a fase minima con eccesso poli-zeri pari a 2, è sempre possibile spostare il centro degli asintoti nel semipiano sinistro (se necessario) con una coppia polo-zero, e poi garantire la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto.
- Esiste un controllore di dimensione 2 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: Si procede così: si inserisce nel controllore un polo nell'origine per rendere il sistema di tipo 1, poi con una coppia polo-zero si sposta il centro degli asintoti nel semipiano sinistro (se necessario), e infine si garantisce la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 2.
- Se $\sum_i p_i - z < 0$, esiste un controllore di dimensione 1 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: Si osservi che se $\sum_i p_i - z < 0$ il centro degli asintoti $s_0 = (\sum_i p_i - z)/2$ è certamente negativo. Quindi, si procede così: si inserisce dapprima nel controllore un polo nell'origine per rendere il sistema di tipo 1. Il nuovo centro degli asintoti $s'_0 = (\sum_i p_i - z)/3$ è ancora negativo. Dunque, aggiungendo uno zero z' nel semipiano sinistro ma sufficientemente vicino all'origine si recupera un eccesso poli-zeri pari a 2, garantendo nel contempo che il centro degli asintoti finale $s''_0 = (\sum_i p_i - z - z')/2$ sia ancora negativo. A questo punto si assicura la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 1.
- Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso e garantisce la riproduzione esatta di riferimenti costanti.
FALSO: Un controllore che soddisfi le specifiche deve avere 1 polo nell'origine e $n - 1 = 2$ poli liberi; di conseguenza, esso avrà dimensione 3.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
6 luglio 2005

Problema 1

Per il processo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ y &= 4x + u\end{aligned}$$

si progetti un controllore dall'uscita avente dimensione *minima* e tale che il sistema ad anello chiuso riproduca asintoticamente con esattezza il riferimento $r(t) = \sin t$.

Problema 2

Si fornisca un esempio numerico di sistema lineare avente le seguenti caratteristiche:

- due autovalori, di cui uno in -1 e uno in 2 ;
- sistema non raggiungibile ma stabilizzabile;
- sistema non osservabile ma rilevabile.

Una volta costruito tale sistema, si costruisca un controllore a retroazione dall'uscita tale che gli autovalori del sistema ad anello chiuso siano tutti coincidenti.

Problema 3

Annerire il cerchietto in corrispondenza alle affermazioni certamente 'vere'.

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

- È possibile stabilizzare il sistema dallo stato solo se $b < 0$.
- È possibile costruire un osservatore del sistema solo se $b < 0$.
- Se $b < 0$, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
- Indipendentemente dal segno di b , esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
- Se $b < 0$, esiste un controllore dall'uscita in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso.
- Si consideri un sistema a fase minima con tre poli reali distinti in p_1, p_2, p_3 e due zeri coincidenti in z ($z \neq p_i, i = 1, \dots, 3$).
 - Il luogo delle radici ad anello chiuso può essere privo di punti singolari.
 - Esiste un controllore stabilizzante costituito da un semplice guadagno.
 - Esiste un controllore di dimensione 1 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
 - Esiste un controllore strettamente proprio e di dimensione 2 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
 - Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso e garantisce la riproduzione esatta di riferimenti costanti.

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 6 luglio 2005

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

La funzione di trasferimento del processo (a fase minima) è

$$P(s) = \frac{s+4}{s}$$

La specifica sulla riproduzione del riferimento richiede l'introduzione nel controllore di una coppia di poli complessi e coniugati in $\pm j$. La funzione di trasferimento del processo modificato diviene dunque

$$\hat{F}(s) = k \frac{s+4}{s(s^2+1)}$$

Il tracciamento del corrispondente luogo delle radici suggerisce che non esiste alcun valore di k che renda asintoticamente stabile il sistema ad anello chiuso. Ciò è confermato dal denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$D_{\hat{W}}(s) = s^3 + (k+1)s + 4k$$

che è privo del termine di secondo grado.

Per mantenere minima la dimensione del controllore, si può aggiungere ad esso uno zero con parte reale negativa (si noti che il controllore rimane realizzabile). In questo modo, l'eccesso poli-zeri scenderà a 1 e il sistema ad anello chiuso sarà *certamente* stabilizzato per valori sufficientemente alti di k . Si ha dunque

$$G(s) = k \frac{s+z}{s^2+1}$$

e

$$F(s) = k \frac{(s+4)(s+z)}{s(s^2+1)}$$

L'applicazione del criterio di Routh mostra immediatamente che si ha stabilità asintotica per

$$z > 0 \quad k > \max\left(0, \frac{4z-1}{z+4}\right)$$

Ciò indica che, a seconda che z sia minore o maggiore di $1/4$, il luogo positivo delle radici sarà interamente o parzialmente compreso nel semipiano sinistro.

Problema 2

La soluzione più ovvia è quella di scrivere un sistema che sia in forma canonica di Kalman rispetto a entrambe le proprietà strutturali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

La funzione di trasferimento corrispondente è

$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

con un autovalore nascosto in -1 . Per far sì che gli autovalori ad anello chiuso coincidano, è dunque sufficiente usare uno schema a retroazione negativa unitaria in cui il controllore è un semplice guadagno k tale che

$$D_W(s) = s - 2 + k \equiv s + 1 \quad \implies \quad k = 3$$

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

- È possibile stabilizzare il sistema dallo stato solo se $b < 0$.
FALSO: Il sistema è sempre raggiungibile (la matrice di raggiungibilità ha sempre rango pieno).
- È possibile costruire un osservatore del sistema solo se $b < 0$.
VERO: Infatti questa è la condizione necessaria (e sufficiente) per avere rilevabilità dallo stato (si osservi che il sistema è in forma canonica di Kalman rispetto all'osservabilità, e in particolare l'autovalore b non è osservabile), e quindi per poter costruire un dispositivo in grado di fornire una stima asintoticamente corretta dello stato del sistema.
- Se $b < 0$, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
VERO: In questo caso, infatti, la funzione di trasferimento del sistema è $P(s) = 1/(s - a)$, e l'autovalore nascosto in b ha parte reale negativa. Dunque, uno schema a retroazione unitaria con un semplice guadagno come controllore è in grado di spostare il polo in a nel semipiano sinistro, e di rendere il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile.
- Indipendentemente dal segno di b , esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
FALSO: Se l'autovalore nascosto in b ha parte reale non negativa, il sistema retroazionato (che contiene il medesimo autovalore) non sarà mai asintoticamente stabile.
- Se $b < 0$, esiste un controllore dall'uscita in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso.
FALSO: L'autovalore in b è nascosto e dunque non modificabile con una retroazione dall'uscita.
- Si consideri un sistema a fase minima con tre poli reali distinti in p_1, p_2, p_3 e due zeri coincidenti in z ($z \neq p_i, i = 1, \dots, 3$).
 - Il luogo delle radici ad anello chiuso può essere privo di punti singolari.
FALSO: C'è almeno un punto singolare dovuto allo zero 'doppio'.
 - Esiste un controllore stabilizzante costituito da un semplice guadagno.
VERO: Infatti, essendo il sistema a fase minima con eccesso poli-zeri pari a 1, è sempre possibile ottenere la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto.
 - Esiste un controllore di dimensione 1 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: Si procede così: si inserisce nel controllore un polo nell'origine per rendere il sistema di tipo 1, poi con una zero a parte reale negativa si riconduce l'eccesso poli-zeri a 1, e infine si garantisce la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 1.
 - Esiste un controllore strettamente proprio e di dimensione 2 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: È sufficiente prendere il controllore del punto precedente e aggiungergli un polo a parte reale negativa sufficientemente 'lontano'. Come noto, ciò preserva la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso.
 - Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso e garantisce la riproduzione esatta di riferimenti costanti.
FALSO: Un controllore che soddisfi le specifiche deve avere 1 polo nell'origine e $n - 1 = 2$ poli liberi; di conseguenza, esso avrà dimensione 3.

Prova scritta di CONTROLLI AUTOMATICI II modulo

12 aprile 2006

Problema 1

Si consideri il processo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + u + d \\ y &= -2x_1 + x_2\end{aligned}$$

in cui u è un segnale di ingresso e d un segnale di disturbo. Si progetti uno schema di controllo di dimensione minima e tale che l'errore a regime sia nullo quando sono contemporaneamente presenti un riferimento $r(t) = 2\delta_{-1}(t)$ e un disturbo $d(t) = a\delta_{-1}(t)$, con a incognito. Nel corso della soluzione, si traccino i luoghi delle radici di interesse.

Problema 2

Per il sistema descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 - x_1^2\end{aligned}$$

- si individuino i punti di equilibrio;
- se ne studi la stabilità con il criterio indiretto di Lyapunov;
- si approfondisca tale studio (ad esempio, determinando se una eventuale stabilità asintotica stabilita al punto precedente è globale o meno) con il criterio diretto di Lyapunov.

Problema 3

Si fornisca un esempio numerico di rappresentazione con lo spazio di stato di un processo avente simultaneamente le seguenti proprietà:

- dimensione pari a 3;
- risposta indiciale costituita dalla sovrapposizione di un gradino, di un modo aperiodico convergente e di un modo pseudoperiodico divergente;
- processo non completamente raggiungibile e non completamente osservabile;
- processo stabilizzabile con reazione dall'uscita.

La risposta deve essere adeguatamente motivata.

CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 12 aprile 2006

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

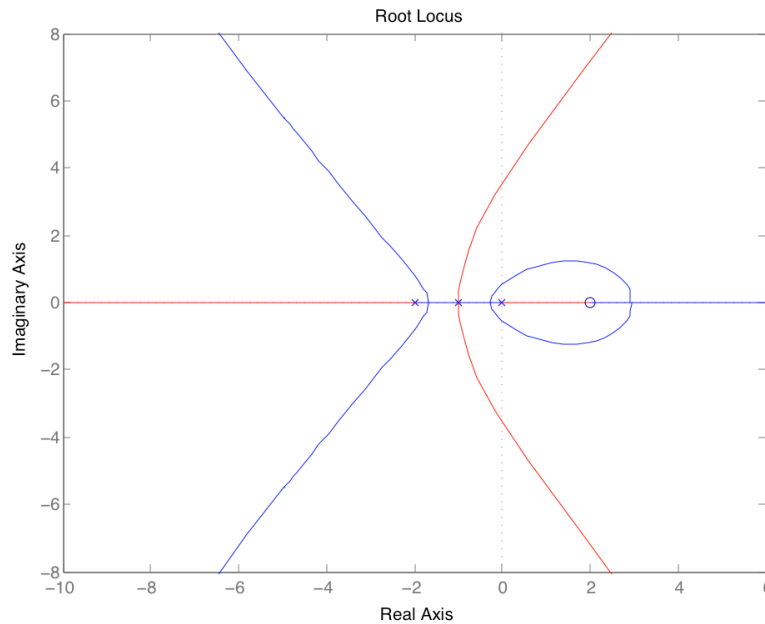
La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = \frac{s - 2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{s - 2}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

(nota: la fattorizzazione del denominatore è stata suggerita in aula). La specifica sulla riproduzione del riferimento a gradino in presenza di un disturbo costante richiede l'introduzione nel controllore di polo nell'origine. La funzione di trasferimento del processo modificato diviene dunque

$$F(s) = k \frac{s - 2}{s(s + 1)^2(s + 2)}$$

Il sistema ha fase non minima ed eccesso poli-zeri pari a 3. Ciò nonostante, il tracciamento del corrispondente luogo delle radici, riportato in figura, indica che il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile per $k^* < k < 0$ (luogo negativo, in blu).



Per verificare tale circostanza e determinare il valore di k^* , è sufficiente applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso, ovvero $s^4 + 4s^3 + 5s^2 + (2+k)s - 2k$. Si trova, come previsto, che il sistema è asintoticamente stabile per $-0.73 < k < 0$. Il controllore richiesto è dunque

$$G(s) = \frac{k}{s} \quad \text{con} \quad -0.73 < k < 0$$

Problema 2

a) Per individuare i punti di equilibrio, si cercano le radici comuni delle equazioni

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_1x_2 &= 0 \\ -3x_2 - x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

La seconda fornisce $x_2 = -x_1^2/3$, che sostituita nella prima dà $-x_1(x_1^2/3 - 2x_1/3 + 1) = 0$. Poiché le radici del polinomio di secondo grado sono complesse, l'unico punto di equilibrio si ha per $x_1 = x_2 = 0$.

b) Il calcolo della matrice jacobiana della dinamica del sistema nel punto di equilibrio fornisce

$$J(0) = \begin{pmatrix} -1 + x_2 & -2 + x_1 \\ -2x_1 & -3 \end{pmatrix} \Big|_{(x_1=0, x_2=0)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono evidentemente -1 e -3 . Ne consegue che l'origine è asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

c) Si consideri la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

che è definita positiva in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata. La sua derivata lungo le traiettorie del sistema è

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 = -(x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2$$

che è definita negativa in qualsiasi intorno dell'origine. Ne consegue che l'origine è globalmente asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Problema 3

Affinché la risposta indiciale sia costituita dalla sovrapposizione di un gradino, di un modo aperiodico convergente e di un modo pseudoperiodico divergente, la funzione di trasferimento del sistema dovrà avere un polo reale negativo (che darà luogo al modo aperiodico convergente) e una coppia di poli complessi con parte reale positiva (che daranno luogo al modo pseudoperiodico divergente). Il gradino nella risposta sarà naturalmente dovuto al gradino in ingresso.

Il sistema dovrà dunque avere una funzione di trasferimento con tre poli. Poiché la dimensione del sistema è 3, ne consegue che esso dovrà essere completamente raggiungibile e osservabile, in modo che tutti gli autovalori divengano poli. Ciò contrasta con la terza proprietà assegnata.

È dunque *impossibile* fornire una rappresentazione che goda di tutte le proprietà richieste.