Algoritmi e Strutture Dati[1]

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Sapienza Università di Roma – sede di Latina

Fabio Patrizi

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale (DIAG)
Sapienza Università di Roma – Italy
www.dis.uniroma1.it/~patrizi
patrizi@dis.uniroma1.it

[1] Slides prodotte a partire dal materiale didattico fornito con il testo *Demetrescu, Finocchi, Italiano: Algoritmi e strutture dati, McGraw-Hill, seconda edizione*.

S

Informazioni Generali

- Docente: Fabio Patrizi
- email: `patrizi@dis.uniroma1.it`
- web: `http://www.dis.uniroma1.it/~patrizi`
- Libro di testo adottato: Demetrescu, Finocchi, Italiano, *Algoritmi e strutture dati*, McGraw-Hill, seconda edizione. 2008.
- Pagina web del corso: `http://www.dis.uniroma1.it/~patrizi/sections/teaching/asd-latina-21-22/index.html`
- Ricevimento: consultare pagina web

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Obiettivi del Corso

Obiettivi principali:

- Illustrare le tecniche algoritmiche e le strutture dati fondamentali per risolvere in modo efficiente problemi computazionali
- Introdurre gli strumenti fondamentali per valutare la qualità degli algoritmi e delle strutture dati

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Introduzione all'Analisi di Algoritmi

Algoritmi

Intuizione

Un algoritmo è un insieme di passi semplici che, se eseguiti meccanicamente, producono un risultato determinato.

Esempio

Algoritmo `preparaCaffè`

- Svita la caffettiera
- Riempi d'acqua il serbatoio della caffettiera
- Inserisci il filtro
- Riempi il filtro con la polvere di caffè
- Avvita la parte superiore della caffettiera
- Metti la caffettiera sul fornello
- Accendi il fornello
- Spegni il fornello quando il caffè è pronto

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Algoritmi

- Algoritmo: Procedimento per risolvere un problema
- Programma: Implementazione di un algoritmo

Algoritmo $\neq$ Programma

Questo corso introduce gli strumenti di analisi degli algoritmi e delle strutture dati

Useremo lo pseudocodice per definire gli algoritmi

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi di Algoritmi e Strutture Dati

Analizziamo il procedimento adottato, non il programma che lo implementa

Vantaggi dell'approccio:

- Generale: analisi indipendente da
  - dettagli implementativi
  - particolari istanze
- Economico: Stima delle prestazioni di un programma prima dell'implementazione

Obiettivi principali:

- Valutare la qualità di un algoritmo
- Scegliere tra più alternative, ove presenti

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Esempio: i numeri di Fibonacci

Numeri di Fibonacci

Successione di numeri interi $F_1, F_2, \ldots$, definita come segue:

$$F_n = \begin{cases} 1, \text{ se } 1 \leq n \leq 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

Problema

Dato un intero positivo n, calcolare l'n-esimo numero di Fibonacci, F_n

Fibonacci: soluzione analitica

È possibile dimostrare che:

Formula di Binet, 1843

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

Dove:

- $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$
- $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180339887...$

Osservazione:

- ϕ e $\hat{\phi}$ irrazionali: non rappresentabili finitamente

L'algoritmo `fibonacci_1`

Possiamo usare il seguente algoritmo?

Algoritmo `fibonacci_1`$(intero\ n) \rightarrow intero$

return $\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$

- Purtroppo ϕ e $\hat{\phi}$ sono *irrazionali*
- Il valore restituito approssima F_n ma non è quello cercato

Con $\phi = 1.618$ e $\hat{\phi} = -0.618$, abbiamo:

n	`fibonacci_1`	arrotondamento	F_n
3	1.99992	2	2
16	986.698	987	987
18	2583.1	2583	2584

L'algoritmo non è corretto!

Vediamo altre possibili soluzioni...

L'algoritmo `fibonacci_2`

Sfruttiamo la definizione ricorsiva di F_n

Algoritmo `fibonacci_2`$(intero\ n) \rightarrow intero$

1: **if** $n \leq 2$ **then**
2: **return** 1
3: **else**
4: **return** (`fibonacci_2`$(n-1) +$ `fibonacci_2`$(n-2)$)

`fibonacci_2` è corretto

L'algoritmo `fibonacci_3`

Generiamo $F_1, F_2, \ldots, F_n$ iterativamente

Algoritmo `fibonacci_3`$(intero\ n) \rightarrow intero$

1: Fib: array di n interi
2: $Fib[1] \leftarrow 1$
3: $Fib[2] \leftarrow 1$
4: **for** $i \leftarrow 3, n$ **do**
5: $\quad Fib[i] \leftarrow Fib[i-1] + Fib[i-2]$
6: **return** $Fib[n]$

Anche `fibonacci_3` è corretto

Confronto di Algoritmi

Sappiamo che `fibonacci_2` e `fibonacci_3` sono entrambi corretti

- Sono equivalenti o preferiamo uno all'altro?
- Se anche `fibonacci_1` fosse corretto, quale preferiremmo? Perché?

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Costo di un Algoritmo

In presenza di più soluzioni, è conveniente scegliere quella più economica, ovvero che usa una quantità inferiore di risorse

Le risorse usate da un algoritmo sono:

- Tempo
- Spazio (di memoria)

Come misurare tali risorse?

- Vogliamo una misura che sia *funzione della dimensione dell'input*

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Costo di un Algoritmo

Tempo:

- Secondi?
  1. Stiamo valutando l'algoritmo, non il programma: non possiamo eseguirlo
  2. Dipenderebbe dal compilatore, dalla macchina, dalle istanze di input

Spazio:

- Memoria utilizzata?
  - Considerazioni simili a quanto detto sopra

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Modello di Costo

Adottiamo le seguenti misure:

- Tempo: numero di operazioni elementari eseguite
- Spazio: dimensione complessiva delle strutture dati necessarie a memorizzare i valori usati dall'algoritmo

Consideriamo come operazioni elementari (dette anche *passi base*):

- allocazioni di variabile e assegnazioni a variabile
- valutazioni di espressione e test di condizioni booleane
- restituzione del risultato

Consideriamo come strutture dati:

- variabili: dimensione unitaria
- insiemi, liste, pile, code, vettori, etc.: dimensione pari alla cardinalità
- record di attivazione (per funzioni ricorsive): dimensione pari ad 1 più dimensione delle strutture dati nel record

Modello di Costo

Le misure adottate trascurano vari dettagli:

- Il costo della valutazione delle espressioni dipende dal numero di valori e di operatori coinvolti
- I valori hanno un impatto sul costo della valutazione di espressioni
- Analoghe considerazioni valgono per le condizioni booleane
- Lo spazio necessario a memorizzare un valore dipende dal valore stesso
- Bisognerebbe distinguere il caso di valori interi da valori reali
- ...

Tuttavia, il modello di costo scelto consente un'accuratezza sufficiente a valutare l'andamento di un algoritmo al crescere della dimensione dell'input ed a confrontare algoritmi diversi

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Funzione di Costo

Valutiamo il costo di un algoritmo rispetto ad una risorsa (tempo o spazio) in funzione della dimensione n dell'input

Ovvero, cerchiamo una funzione che, data la dimensione n dell'istanza del problema, fornisca la quantità di risorsa utilizzata dall'algoritmo

Indichiamo con $T(n)$ il tempo (numero di passi base) richiesto dall'algoritmo

Indichiamo con $S(n)$ lo spazio (unità di memoria) usato dall'algoritmo

NOTA: Le funzioni di costo sono *sempre positive*

Analisi Asintotica

Confronteremo gli algoritmi sulla base del loro costo asintotico, ovvero al crescere della dimensione dell'input (dettagli in seguito)

Algoritmo `fibonacci_2`: Tempo di Esecuzione

Algoritmo `fibonacci_2`$(intero\ n) \rightarrow intero$

1: **if** $n \leq 2$ **then**
2: **return** 1
3: **else**
4: **return** (`fibonacci_2`$(n-1) +$ `fibonacci_2`$(n-2)$)

Tempo di esecuzione:

- se $n \leq 2$: test (linea 1) e restituzione del risultato (l.2)
- se $n > 2$: test (l.1), due chiamate ricorsive, somma e restituzione (l.4)

Le chiamate ricorsive non sono operazioni elementari:

- costo: $T(n-1)$ e $T(n-2)$

Il tempo d'esecuzione soddisfa la seguente relazione:

$$T(n) = \begin{cases} 2, \text{ se } n \leq 2 \\ 3 + T(n-1) + T(n-2), \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

Relazioni di ricorrenza

L'equazione

$$T(n) = 3 + T(n-1) + T(n-2)$$

è detta relazione (o equazione) di ricorrenza

Per conoscere $T(n)$ occorre risolvere l'equazione, ovvero trovare un'espressione che, sostituita a $T(n)$, soddisfi la relazione (metodi di risoluzione in seguito)

È possibile dimostrare che: $T(n) = 5F_n - 3$

Quindi, essendo $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$

$$T(n) = \frac{5}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) - 3$$

(Andamento esponenziale in n)

Algoritmo `fibonacci_3`: Tempo di Esecuzione

Algoritmo `fibonacci_3`$(intero\ n) \rightarrow intero$

1: Fib: array di n interi
2: $Fib[1] \leftarrow 1$
3: $Fib[2] \leftarrow 1$
4: **for** $i \leftarrow 3, n$ **do**
5: $\quad Fib[i] \leftarrow Fib[i-1] + Fib[i-2]$
6: **return** $Fib[n]$

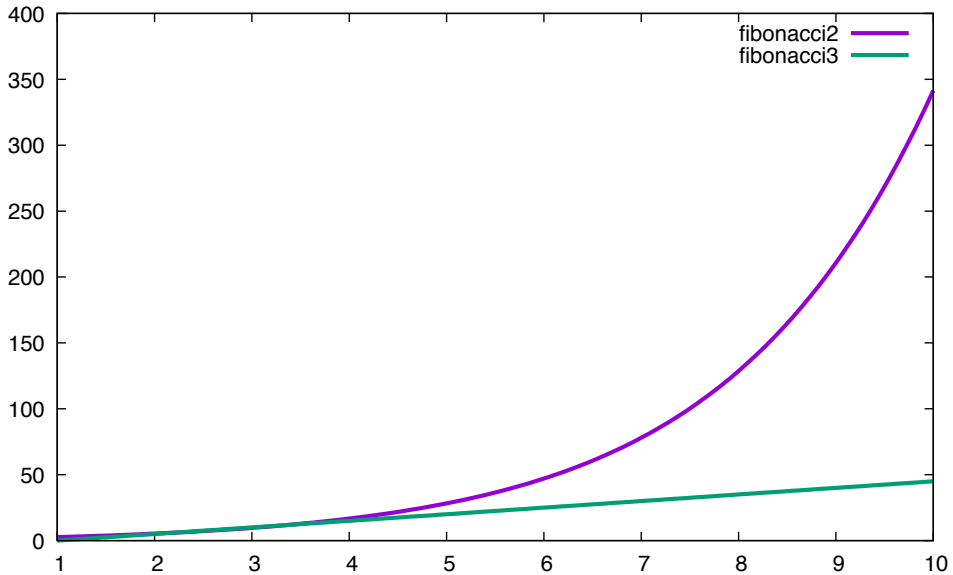
$$T(n) = \begin{cases} n + 5, \text{ se } n < 3 \\ n + 2 + 4(n-2) + 1 = 5n - 5, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(Andamento lineare)

`fibonacci_2`, `fibonacci_3`: confronto

Consideriamo solo il tempo di esecuzione

Algoritmo	$T(n)$
`fibonacci_2`	$\frac{5}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) - 3$
`fibonacci_3`	$5n - 5$



Quale algoritmo preferiamo?

`fibonacci_2`, `fibonacci_3`: confronto

L'algoritmo che esegue "meno operazioni" è chiaramente preferibile

Tuttavia, un algoritmo potrebbe andare meglio di un altro solo per alcuni valori di input. Quale scegliere?

Osservazioni:

- Per valori piccoli dell'input, le differenze di costo sono poco apprezzabili
- Normalmente, il tempo d'esecuzione cresce con la dimensione dell'input, quindi è preferibile l'algoritmo con funzione di costo a crescita meno rapida

Siamo cioè interessati all'andamento asintotico delle funzioni di costo

Algoritmo `fibonacci_2`: Occupazione di Memoria

Valutiamo ora il costo in termini di spazio di `fibonacci_2` e `fibonacci_3`

Si considera solo il costo aggiuntivo rispetto alla dimensione dell'input (in quanto è su questa grandezza che vengono confrontati due algoritmi che prendono lo stesso input)

Algoritmo `fibonacci_2`$(intero\ n) \rightarrow intero$

```
1: if n ≤ 2 then
2:     return 1
3: else
4:     return (fibonacci_2(n − 1) + fibonacci_2(n − 2))
```

Sembrerebbe che non vengano usate variabili aggiuntive rispetto ad n

Tuttavia, per funzioni ricorsive, occorre considerare lo stack delle chiamate

Algoritmo `fibonacci_2`: Occupazione di Memoria

Per un'invocazione di `fibonacci_2` su input n, si può dimostrare (dettagli in seguito) che la dimensione massima dello stack delle chiamate è:

$$S(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n \leq 2 \\ n - 1, \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Algoritmo `fibonacci_3`: Occupazione di Memoria

Algoritmo `fibonacci_3`$(intero\ n) \rightarrow intero$

1: Fib: array di n interi
2: $Fib[1] \leftarrow 1$
3: $Fib[2] \leftarrow 1$
4: **for** $i \leftarrow 3, n$ **do**
5: $\quad Fib[i] \leftarrow Fib[i-1] + Fib[i-2]$
6: **return** $Fib[n]$

Usiamo:

- un vettore di dimensione n
- una variabile contatore (di dimensione unitaria)

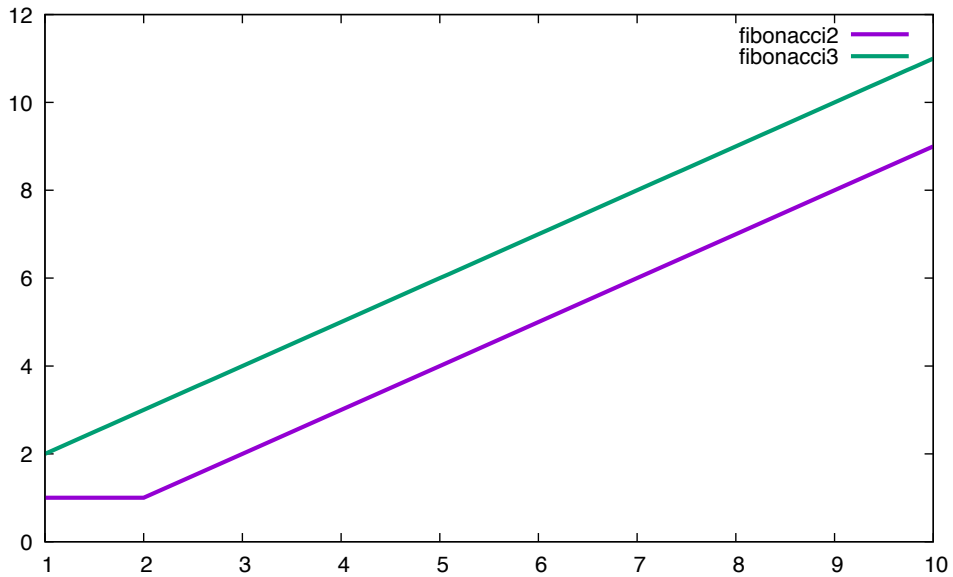
Abbiamo quindi:

$$S(n) = n + 1$$

`fibonacci_2`, `fibonacci_3`: confronto

Consideriamo ora lo spazio di memoria

Algoritmo	$S(n)$
`fibonacci_2`	$n-1$
`fibonacci_3`	$n+1$



Quale algoritmo preferiamo?

`fibonacci_2`, `fibonacci_3`: confronto

`fibonacci_2` sembra preferibile

Tuttavia:

- l'andamento delle funzioni di costo (spaziale) è essenzialmente identico a meno di due unità
- dobbiamo considerare le semplificazioni del modello di costo, che non rendono conto di piccole differenze (formalizzeremo questa idea in seguito)

È lecito quindi considerare i due costi spaziali sostanzialmente equivalenti

Concludiamo pertanto che `fibonacci_3` è preferibile, in quanto:

- ha migliori prestazioni in termini di tempo
- è comparabile a `fibonacci_2` in termini di occupazione di memoria

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

L'algoritmo `fibonacci_4`

Possiamo ridurre l'occupazione di memoria di `fibonacci_3`?

Algoritmo `fibonacci_4`$(intero\ n) \rightarrow intero$

a, b, c: variabili intere
$b \leftarrow 1$
$c \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 3, n$ **do**
    $a \leftarrow b$
    $b \leftarrow c$
    $c \leftarrow a + b$
return c

`fibonacci_3`, `fibonacci_4`: confronto

`fibonacci_4` usa un numero costante di variabili (3), non un numero crescente con l'input (`fibonacci_3`: $n + 1$)

È immediato vedere che `fibonacci_4` ha costo temporale $T(n) = 6n - 6$, essenzialmente analogo a quello di `fibonacci_3` (le costanti moltiplicative possono essere trascurate per le approssimazioni del modello di costo –dettagli in seguito)

`fibonacci_4` è pertanto preferibile

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

`fibonacci_5`

Possiamo migliorare il tempo d'esecuzione di `fibonacci_4`?

Sfruttiamo la seguente proprietà, facilmente dimostrabile per induzione

Proprietà

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Cioè, moltiplicando la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ per se stessa n volte, troviamo l'$(n+1)$-esimo numero di Fibonacci in posizione $(0, 0)$

fibonacci_5

Consideriamo il seguente algoritmo

Algoritmo `fibonacci_5`$(intero\ n) \rightarrow intero$

M: matrice 2×2 // 4 passi base

$M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ // 4 passi base

for $i \leftarrow 1, n-1$ **do**

$M \leftarrow M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ // 8 passi base

return $M[0][0]$ // 1 passo base

Tempo di esecuzione: $T(n) = 9 + 8(n-1) = 9n + 1$

Abbiamo un tempo di esecuzione essenzialmente analogo a quello di `fibonacci_4` $(6n - 6)$

Calcolo di potenze

Possiamo ridurre il numero di iterazioni per la potenza di matrice

Quadrati ripetuti

$$M^n = \begin{cases} P \cdot P, \text{ se n è pari} \\ P \cdot P \cdot M, \text{ altrimenti} \end{cases}, \text{ con } P = M^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Nota: P viene calcolata una volta sola

Calcolo di potenze

Possiamo calcolare la potenza di una matrice con la seguente procedura (effettua side-effect su M)

Procedura `potenza`($matrice\ 2 \times 2\ M, intero\ n$)

if ($n > 1$) **then**

`potenza`($M, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$)

$M \leftarrow M \cdot M$

if (n dispari) **then** $M \leftarrow M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Con tempo d'esecuzione (assumendo 4 operazioni per il prodotto): $T(n) = 18 + T(\frac{n}{2}) \approx 18 \log_2 n$ (metodo di soluzione in seguito)

E occupazione di memoria: $S(n) = \log_2 n$

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

fibonacci_6

Algoritmo `fibonacci_6`$(intero\ n) \rightarrow intero$

M: matrice 2×2
$M \leftarrow I$ // matrice identità
`potenza`$(M, n-1)$
return $M[0][0]$

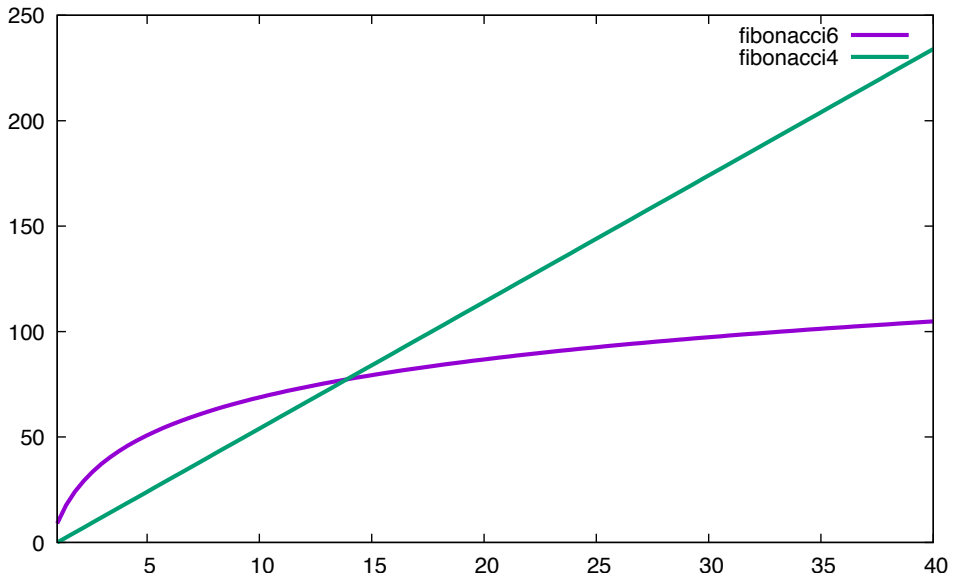
Tempo di esecuzione: $T(n) = 9 + 18 \log_2(n-1)$

Occupazione di memoria: $S(n) = 4 + \log_2 n$

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

`fibonacci_4`, `fibonacci_6`: confronto

Algoritmo	$T(n)$
`fibonacci_4`	$6n - 6$
`fibonacci_6`	$9 + 18 \log_2(n - 1)$



Algoritmi a Confronto

Algoritmo	Tempo di esecuzione	Occupazione di memoria
`fibonacci_2`	$\frac{5}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) - 3$	$n - 1$
`fibonacci_3`	$5n - 5$	$n + 1$
`fibonacci_4`	$6n - 6$	3
`fibonacci_5`	$9n + 1$	4
`fibonacci_6`	$9 + 18 \log_2(n - 1)$	$4 + \log_2 n$

Concludiamo che `fibonacci_6` è (asintoticamente) l'algoritmo più veloce tra quelli considerati

`fibonacci_4` e `fibonacci_5` sono invece gli algoritmi con minor occupazione di memoria

Conclusioni

- Le funzioni di costo ottenuto non descrivono fedelmente i costi degli algoritmi ma l'andamento rispetto alla dimensione dell'input
- Causa: i dettagli trascurati dal modello di costo rendono irrilevanti differenze di costo per valori costanti (anche all'interno di cicli)
- Pertanto, *è ragionevole trascurare costanti additive e moltiplicative*
- I tempi d'esecuzione di `fibonacci_3`, `fibonacci_4` e `fibonacci_5` sono sostanzialmente analoghi: andamento lineare
- `fibonacci_2` è invece più costoso: andamento esponenziale
- `fibonacci_6` è il più veloce: andamento logaritmico

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA