PROCESSI STOCASTICI

un processo stocastico $\{X_t, t \in T\}$ è una famiglia di variabili aleatorie $X_t(\omega)$ parametrizzate in t e definite sullo spazio comune $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Per definizione per ogni $t \in T$ $X_t(\omega)$ è $\mathcal{A}$-misurabile e per ogni $\omega \in \Omega$ $X_t(\omega)$ è una funzione di $t \in T$ e si chiama <u>funzione campione</u> del processo.

Purtroppo, in generale

$$\{\omega : X_t(\omega) \in A, t \in T\}$$

$$= \bigcap_{t \in T} \{\omega : X_t(\omega) \in A\}$$

non è un evento

Un processo $\{X_t, t \in T\}$
si dice SEPARABILE se esiste
un insieme numerabile $S \subset T$
e un evento Λ di misura nulla tali
che per ogni insieme chiuso $K \subset [-\infty, \infty]$
e ogni intervallo aperto I i due
insiemi

$$\{\omega : X_t(\omega) \in K, t \in I \cap T\} \quad e$$
$$\{\omega : X_t(\omega) \in K, t \in I \cap S\}$$

differiscono di un sottoinsieme di Λ.

L'insieme S si chiama SEPARATORE.
Per un processo separabile ogni insieme
$\{\omega : X_t(\omega) \in K, t \in I \cap T\}$ differisce da un
evento per un sottoinsieme di Λ e può
essere quindi definito come evento in
un completamento dello spazio di
probabilità.

Per un processo separabile $\{X_t, t \in T\}$, per ogni intervallo aperto I

$$\omega \notin \Lambda : X_t(\omega) \le a, \ t \in I \cap S \Longrightarrow \omega \notin \Lambda : X_t(\omega) \le a, \ t \in I \cap T$$

Quindi

$$\sup_{t \in I \cap S} X_t(\omega) \geq \sup_{t \in I \cap T} X_t(\omega), \quad \omega \notin \Lambda$$

ma poiché $S \subset T$ anche

$$\sup_{t \in I \cap S} X_t(\omega) \le \sup_{t \in I \cap T} X_t(\omega), \quad \omega \notin \Lambda$$

Quindi

$$\sup_{t \in I \cap S} X_t(\omega) = \sup_{t \in I \cap T} X_t(\omega), \ \omega \notin \Lambda$$

e $\sup_{t \in I \cap T} X_t(\omega)$ è una variabile aleatoria poiché $\sup_{t \in I \cap S} X_t(\omega)$ lo è (dopo eventuale completamento dello spazio di probabilità)

Dato $\{X_t, t \in T\}$ definito su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è sempre possibile trovare $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$, definito su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

- $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$ è separabile
- $P(\tilde{X}_t = X_t) = 1 \quad \forall t \in T$

Un processo $\{X_t, t \in T\}$ si dice CONTINUO IN PROBABILITÀ IN t se

$$P(|X_s - X_t| \geq \epsilon) \xrightarrow[s \to t]{} 0$$

$\forall \epsilon > 0$

Se $\{X_t, t \in T\}$ è continuo in probabilità in ogni $t \in T$ si dice che è continuo in probabilità.

Ogni processo $\{X_t, t \in T\}$ separabile e continuo in probabilità ammette un qualsiasi insieme numerabile e denso in T come insieme separatore

Per esempio, si voglia calcolare in questo caso $P(X_t \geq 0,\ 0 \leq t \leq 1)$ con $\{X_t,\ 0 \leq t \leq 1\}$ separabile e continuo in probabilità. Si prenda

$$S = \left\{ \frac{k}{2^n},\ 0 \leq k \leq 2^n,\ n = 0, 1, \ldots \right\}$$

Quindi

$$P(X_t \geq 0, 0 \leq t \leq 1) =$$

$$P\left(X_{\frac{k}{2^n}} \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^n,\ n = 0, 1, \ldots\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{\omega : X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^n \} \right)$$

Poiché

$$A_n = \left\{ \omega : X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \geq 0 , \ 0 \leq k \leq 2^n \right\}$$

è una sequenza decrescente

e $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(\lim\limits_{n \to \infty} A_n)$

allora

$$P(X_t \geq 0 , \ 0 \leq t \leq 1) =$$

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Un processo $\{X_t, t \in T\}$ si dice MISURABILE se $X_t(\omega)$ è una funzione di (t, ω) misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{L} \otimes \mathcal{A}$, ove $\mathcal{L}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabile secondo Lebesgue in T, e $\mathcal{A}$ la σ-algebra definita in

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, ovvero

$$\{(t,\omega) : X_t(\omega) \le a\} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{A}$$

$\forall a \in (-\infty, \infty)$

- Per ogni processo $\{X_t, t \in T\}$ continuo in probabilità esiste $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$, definito sullo stesso spazio di probabilità, tale che
  - $\mathcal{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1 \quad \forall t \in T$
  - $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$ è separabile
  - $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$ è misurabile
  - Ogni insieme S numerabile e denso in T è un insieme separatore per $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$

Per un processo misurabile

$\{\tilde{X}_t, t \in T\}$ se

- $\int_A E|X_t| dt < \infty$, $\forall A$ insieme misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$,

quasi tutte le funzioni campioni $X_t(\omega)$ sono integrabili (secondo Lebesgue) in A e $\int_A X_t \, dt$ è una VARIABILE ALEATORIA.