Vogliamo ora dare significato a una equazione del tipo

$$\boxed{\begin{aligned} dX(\omega,t) &= m(X(\omega,t),t)\,dt \\ &\quad + \sigma(X(\omega,t),t)\,dW(\omega,t), \\ t \geq a \in \mathbb{R},\ X_a &= X \end{aligned}}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE STOCASTICA

che si può scrivere in modo equivalente per $t \geq a \in \mathbb{R}$ come

$$X_t = X + \int_a^t m(X_s, s)\,ds + \int_a^t \sigma(X_s, s)\,dW_s$$

Sia $\{W_t, \mathcal{a}_t, a \leq t \leq T < \infty\}$ un processo separabile Browniano. Sia X una variabile aleatoria $\mathcal{a}_a$-misurabile con $EX^2 < \infty$. Siano $m(x,t)$ e $\sigma(x,t)$ funzioni di Borel, misurabili rispetto a (x,t).

Si assuma:

- $|m(x,t)-m(y,t)|+|\sigma(x,t)-\sigma(y,t)| \leq k|x-y|$
- $|m(x,t)|+|\sigma(x,t)| \leq k\sqrt{1+x^2}$

$\Big\}$ (L)

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in [a,T]$

e per qualche $k>0$.

Allora esiste un processo separabile $\{X_t, t \in [a,T]\}$ tale che:

(i) per ogni $t \in [a,T]$ X_t è $\mathcal{A}_t$-misurabile

(ii) $\int_a^T E X_t^2\, dt < \infty$

(iii) $X_t = X + \int_a^t m(X_s,s)\,ds + \int_a^t \sigma(X_s,s)\,dW_s$ q.c.

(iv) $\{X_t, a \leq t \leq T\}$ è continuo per quasi tutti i campioni

(v) $\{X_t, t \in [a,T]\}$ è unico con probabilità 1

(vi) $\{X_t, t \in [a,T]\}$ è un processo di Markov

Nel caso in cui

$$m(x,t) = Mx \quad e \quad \sigma(x,t) = S_1 x + S_0$$

chiaramente le ipotesi (L) sono soddisfatte $\forall\, T > 0$ e $a = 0$

$$|m(x,t) - m(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| =$$

$$|M(x-y)| + |S_1(x-y)| \leq k_1 |x-y|$$

per un certo $k_1 > 0$ e

$$|m(x,t)| + |\sigma(x,t)| = |Mx| + |S_1 x + S_0|$$

$$\leq k_2|x| + k_3|x| + k_4 \leq k_5\sqrt{1+x^2}$$

per certe $k_2, k_3, k_4, k_5 > 0$. Quindi

$$dX_t = (MX_t)\,dt + (S_1 X_t + S_0)\,dW_t$$

ammette una "soluzione" X_t nel senso sopra specificato su ogni intervallo $[0, T]$, $T > 0$.

Siano $X_1(\omega,t),\dots,X_n(\omega,t)$ definiti come

$$X_k(\omega,t) = \int_a^t f_k(\omega,s)\,ds + \int_a^t \varphi_k(\omega,s)\,dW(\omega,s)$$

$$k=1,\dots,n$$

ove $\{W_t\}$ è un moto Browniano.

Sia $\quad Y(\omega,t) = \psi(X_1(\omega,t),\dots,X_n(\omega,t),t)$

con ψ differenziabile con continuità rispetto a t e con derivate parziali seconde continue rispetto a $X_1,\dots,X_n$. Allora con probabilità 1

$$\boxed{\begin{aligned} Y(\omega,t) &= Y(\omega,a) + \int_a^t \frac{\partial\psi}{\partial t}(\underline{\underline{X}}(\omega,s),s)\,ds \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_a^t \frac{\partial\psi}{\partial X_k}(\underline{\underline{X}}(\omega,s),s)\,dX_k(\omega,s) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \int_a^t \frac{\partial^2\psi}{\partial X_j X_k}(\underline{\underline{X}}(\omega,s),s)\,\varphi_j(\omega,s)\varphi_k(\omega,s)\,ds \end{aligned}}$$

$\uparrow$ REGOLA DI ÎTO

ove $\underline{\underline{X}} = (X_1(\omega,t),\dots,X_n(\omega,t))$

L'ultimo termine

che si scrive anche come

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{ \begin{bmatrix} \varphi_1(\omega,t) \\ \vdots \\ \varphi_n(\omega,t) \end{bmatrix}^T \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Hessiano} \\ \text{di } \Psi}} \begin{bmatrix} \varphi_1(\omega,t) \\ \vdots \\ \varphi_n(\omega,t) \end{bmatrix} \right.$$

è un termine in più rispetto alla classica regola di derivazione.

Per esempio, se $Y_t = \frac{1}{2} W_t^2$ allora

con $X_t \equiv W_t$ e $\psi(x) = \frac{x^2}{2}$ si ha dalla regola di Îto

$$Y_t = \int_0^t W_s \, dW_s + \frac{1}{2} t$$