VALORE ATTESO DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Sia X una variabile aleatoria semplice. Quindi

$$X = \sum_{i=1}^{N} x_i I_{A_i}$$

ove A_i sono eventi e $x_i \in \mathbb{R}$. Si definisce VALORE ATTESO DI X

$$EX = \sum_{i=1}^{N} x_i P(A_i)$$

EX ha le seguenti proprietà

- $E(aX + bY) = aEX + bEY$
  $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- $X \geq Y$ q.o. $\Rightarrow EX \geq EY$

(cioè $\forall \omega$ tranne che un insieme di misura nulla)

Sia $\{X_n\}$ una sequenza di variabili aleatorie semplici convergente a $X \geq 0$.

Poiché $\{EX_n\}$ è una sequenza non-decrescente di numeri nonnegativi allora $\lim_{n\to\infty} EX_n = \sup_n EX_n$ esiste sempre ma può essere anche infinito.

Per una qualsiasi variabile aleatoria

$$X = X^+ - X^-$$

X^+: parte nonnegativa

X^-: parte negativa

si definisca il VALORE ATTESO come

$$EX = EX^+ - EX^-$$

purché $EX^+ - EX^-$ non abbia forma indeterminata (i.e. $+\infty - \infty$)

- il valore atteso EX non dipende dalla sequenza $\{X_n\}$ scelta per X. Così se $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ sono due sequenze di variabili aleatorie semplici tali che $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = X$ allora

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \lim_{n\to\infty} EY_n = EX .$$

- Per evidenziare il sottostante spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ il valore atteso, quando esiste, viene anche indicato con

$$EX = \int_\Omega X(\omega)\, dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

- Se $EX < \infty$ allora $E|X| < \infty$ e X si dice INTEGRABILE

In particolare si può definire

$$\int_A X(\omega)\,dP \quad , \quad A \in \mathcal{A}$$

come

$$\int_\Omega I_A(\omega)X(\omega)\,dP = E(I_A X)$$

e I_A è la funzione caratteristica di A

- se X è integrabile
$$P(A) = 0 \Rightarrow \int_A X(\omega)\,dP = 0$$

- Sia $X = (X_1, .., X_n)$ è una variabile aleatoria con funzione di distribuzione di probabilità congiunta P_X e f è una funzione di Borel nonnegativa.

Allora $f(\mathbf{X})$ è una variabile aleatoria nonnegativa in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mentre $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, è una variabile aleatoria definita in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \mathcal{P}_X)$. Quindi si possono scrivere i due integrali

$$\int_\Omega f(X(\omega))\mathcal{P}(d\omega) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathcal{P}_X(dx)$$

e

$$\boxed{\int_\Omega f(X(\omega))\mathcal{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathcal{P}_X(dx)}$$

Se $f = f^+ - f^-$ allora

f^- ← parte negativa

f^+ ← parte nonnegativa

vale lo stesso di cui sopra purché f sia integrabile.

ESEMPIO

$\{X_n\}$ sequenza di variabili aleatorie con

$$\mathcal{P}[(X_m - X_n) < a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{mn}^2}} \int_{-\infty}^{a} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{mn}^2}\right)} dx$$

con $\sigma_{mn}^2 = \frac{|m-n|}{mn}$. Allora $f(x) = x$ e $X = X_m$

$$E|X_m - X_n|^2 = \int_{\Omega} |X_m(\omega) - X_n(\omega)|^2 d\mathcal{P}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x_m - x_n|^2 P_{X_m - X_n}(d(x_m - x_n)) = \int_{\mathbb{R}} x^2 P_X(dx)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{mn}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{mn}^2}\right)} dx$$

$$= \sigma_{mn}^2$$