INTEGRALE STOCASTICO

Sia $\{\mathcal{A}_t, -\infty < t < \infty\}$ una famiglia crescente di σ-algebre contenute in $\mathcal{A}$ e sia $\{W_t, -\infty < t < \infty\}$ un moto Browniano tale che W_t è $\mathcal{A}_t$ misurabile e $\{W_t - W_s, t \geq s\}$ è indipendente da $\mathcal{A}_s$. Quindi $\forall s \geq 0$

$$E^{\mathcal{A}_t} W_{t+s} = W_t \quad \text{q.o.}$$ (poiché $\{W_t, \mathcal{A}_t\}$ è una martingala!)

$$E^{\mathcal{A}_t} (W_{t+s} - W_t)^2 = E(W_{t+s} - W_t)^2 = s \quad \text{q.o.}$$

(poiché $W_{t+s} - W_t$ è indipendente da ogni evento di $\mathcal{A}_t$)

Definiamo il seguente <u>integrale stocastico</u>

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(\omega, t)\, dW(\omega, t)$$

Si assume che $\varphi(\omega,t)$ è misurabile (rispetto a $\mathcal{A}\otimes\mathcal{R}$). Inoltre $\varphi_t(\omega)=\varphi(\omega,t)$ è $\mathcal{A}_t$ misurabile e

$$\int_a^b E|\varphi_t|^2 dt < \infty$$

Definiamo prima l'integrale stocastico per funzioni SEMPLICI $\varphi(\omega,t)$. Una funzione $\varphi(\omega,t)$ si dice SEMPLICE se soddisfa le ipotesi HP ed esistono $t_0=a<t_1<\dots<t_n=b$ tali che

$$\varphi(\omega,t)=\varphi_i(\omega) \qquad t_i\leq t<t_{i+1}, \quad i=0,\dots,n-1$$

Allora si definisce

$$\int_a^b \varphi(\omega,t)\,dW(\omega,t)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(\omega)\left[W(\omega,t_{i+1})-W(\omega,\dots\right.$$

Se $\varphi(t,\omega)$ soddisfa HP allora:

(i) esiste una sequenza di funzioni semplici $\{\varphi_n(t,\omega)\}$ che soddisfano HP e

$$\int_a^b E\left|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)\right|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ii) per ogni n

$$I(\varphi_n) := \int_a^b \varphi_n(\omega,t)\, dW(\omega,t)$$

è ben definito e $I(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{m.q.} I(\varphi)$

(iii) per due qualsiasi sequenze $\{\varphi_n\}$ e $\{\varphi_n'\}$ si ha

$$I(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{m.q.} I(\varphi) \xleftarrow[n\to\infty]{m.q.} I(\varphi_n')$$

$I(\varphi)$ è l'integrale di Îto (di φ)

(o stocastico)

Ad esempio, se $E(\varphi^2(\omega,t))$ è continuo su $[a,b]\times[a,b]$ ovvero $\varphi(\omega,t)$ è continuo su $[a,b]$ in media quadratica, la sequenza $\{\varphi_n(\omega,t)\}$ si può costruire partizionando $[a,b]$ in $a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\dots<t_{\nu(n)}^{(n)}=b$ e definendo $\varphi_n(\omega,t)=\varphi(\omega,t_\nu^{(n)})$, $t_\nu^{(n)}\le t<t_{\nu+1}^{(n)}$ per $0\le\nu\le\nu(n)$. La partizione è fatta in modo che $\max_\nu(t_{\nu+1}^{(n)}-t_\nu^{(n)})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Poiché $\varphi(\omega,t)$ è continuo in media quadratica allora $E|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\forall\, t\in[a,b]$. Inoltre $E|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)|^2$ $\le 2E\left[\varphi^2(\omega,t)+\varphi_n^2(\omega,t)\right]=2\left[E(\varphi^2(\omega,t))+E(\varphi_n^2(\omega,t))\right]$

e quindi

$$\int_a^b E|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)|^2dt\le 2\int_a^b E(\varphi^2(\omega,t))\,dt$$

$$+\,2\int_a^b E(\varphi_n^2(\omega,t))\,dt<\infty$$

poiché φ e φ_n soddisfano HP.

Per il teorema di convergenza dominata (si veda il testo)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)|^2 dt =$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} E|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)|^2 dt = 0$$

che prova (i).

Vediamo (ii). Sia $\{\varphi_n\}$ una sequenza di funzioni semplici tali che

$$\int_a^b E|\varphi(\omega,t)-\varphi_n(\omega,t)|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi

$$I(\varphi_n) = \sum_i \varphi_{ni}(\omega)[\underbrace{W(\omega,t_{i+1}^{(n)})-W(\omega,t_i^{(n)})}_{:=\Delta_i^n W}]$$

Si ha

$$E|I(\varphi_n)|^2 = \sum_i \sum_j E(\varphi_{ni}\varphi_{nj}\Delta_i^n W\cdot\Delta_j^n W)$$

Se $j > i$ allora

$\Delta_j^n W$ è indipendente da $\mathcal{A}_{t_j^{(n)}}$ mentre

$\varphi_{ni}\varphi_{nj}\Delta_i^n W$ è $\mathcal{A}_{t_j^{(n)}}$ misurabile.

Quindi

$$E\left(\varphi_{ni}\varphi_{nj}\Delta_i^n W\cdot\Delta_j^n W\right) =$$

$$\underbrace{E\left(\Delta_j^n W\right)}_{0} E\left(\varphi_{ni}\varphi_{nj}\Delta_i^n W\right) = 0$$

purché $i \neq j$

e perciò

$$E|I(\varphi_n)|^2 = \sum_i E\left[\varphi_{ni}^2\left(\Delta_i^n W\right)^2\right]$$

$$= \sum_i E|\varphi_{ni}|^2\cdot E\left(\Delta_i^n W\right)^2 =$$

$$= \sum_i E|\varphi_{ni}|^2\cdot E^{\mathcal{A}_{t_i^{(n)}}}\left(\Delta_i^n W\right)^2 =$$

$$= \sum_i E|\varphi_{ni}|^2\cdot\left(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right)$$

$$= \int_a^b E|\varphi_n(\omega,t)|^2\,dt$$

Ora

$$I(\varphi_{m+n}) - I(\varphi_n) = I(\varphi_{m+n} - \varphi_n)$$

e $\varphi_{m+n} - \varphi_n$ è semplice. Quindi

$$E\left|I(\varphi_{m+n}) - I(\varphi_n)\right|^2 = \int_a^b E\left|\varphi_{m+n}(\omega,t) - \varphi_n(\omega,t)\right|^2 d$$

$$\leq 2\int_a^b E\left|\varphi_{m+n}(\omega,t) - \varphi(\omega,t)\right|^2 dt \; +$$

$$+\, 2\int_a^b E\left|\varphi_n(\omega,t) - \varphi(\omega,t)\right|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Perciò $E\left|I(\varphi_n) - I(\varphi)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

che prova ii

integrale stocastico

$$I(\varphi) := \int_a^b \varphi(\omega,t)\, dW(\omega,t)$$

$$:= \int_a^b \varphi(\omega,t)\, dW_t$$

altra rappresentazio

Se $\varphi(\omega,t)$ e $\psi(\omega,t)$ soddisfano HP

$$E\left[\int_a^b \varphi(\omega,t)\,dW_t \cdot \int_a^b \psi(\omega,t)\,dW_t\right]$$

$$= \int_a^b E\big(\varphi(\omega,t)\psi(\omega,t)\big)\,dt$$

In realtà basta verificarla per $\varphi \equiv \psi$

poiché

$$E\big(I(\varphi) \quad I(\psi)\big) =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{E|I(\varphi)+I(\psi)|^2 - E|I(\varphi)-I(\psi)|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{E|I(\varphi+\psi)|^2 - E|I(\varphi-\psi)|^2\right\}$$

Abbiamo già provato che se φ è semplice

$$E|I(\varphi)|^2 = \int_a^b E\,|\varphi(\omega,t)|^2\,dt$$

Se φ non è semplice sia $\{\varphi_n\}$ una sequenza approssimante:

$$E|I(\varphi)|^2 = E|I(\varphi-\varphi_n)+I(\varphi_n)|^2$$

$$= E|I(\varphi_n)|^2 + E|I(\varphi-\varphi_n)|^2$$

$$+ 2E|I(\varphi-\varphi_n)\cdot I(\varphi_n)| \leq$$

$$\leq E|I(\varphi_n)|^2 + E|I(\varphi-\varphi_n)|^2$$

$$+ 2\sqrt{E|I(\varphi-\varphi_n)|^2}\cdot\sqrt{E|I(\varphi_n)|^2} \leftarrow$$ per la disuguaglianza di Schwartz

Poiché $E|I(\varphi-\varphi_n)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

allora

$$E|I(\varphi)|^2 = \lim_{n\to\infty} E|I(\varphi_n)|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b E|\varphi_n(\omega,t)|^2 dt = \int_a^b E|\varphi(\omega,t)|^2 dt$$

per il teorema della convergenza dominata

Sia $\{W_t, \mathfrak{a}_t\}$ un moto Browniano e $\varphi(\omega,t)$ soddisfi HP. Si definisca $\{X_t, a \le t \le b\}$ come

$$\boxed{X(\omega,t) := \int_a^t \varphi(\omega,s)\,dW(\omega,s)}$$

Allora $\{X_t, \mathfrak{a}_t, a \le t \le b\}$ è una martingala cioè

$$t > s \implies E^{\mathfrak{a}_s} X_t = X_s \quad q.o.$$

Infatti, supponiamo dapprima che $\varphi(\omega,t)$ sia semplice. Siano $t > t_n > t_{n-1} > \dots > t_2 > t_1 > s$.

Allora si può scrivere

$$X(t,\omega) - X(s,\omega) = \int_s^t \varphi(\omega,\tau)\,dW(\omega,\tau) =$$

$$\varphi_s(\omega)\left[W(\omega,t_1) - W(\omega,s)\right] + \varphi_1(\omega)\left[W(\omega,t_2) - W(\omega,t_1)\right]$$

$$+ \dots + \varphi_n(\omega)\left[W(\omega,t) - W(\omega,t_n)\right]$$

ove $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono $\mathcal{a}_0, \mathcal{a}_{t_1}, \dots, \mathcal{a}_{t_n}$ misurabili. Si ha

$$E^{\mathcal{a}_s}(X_t - X_s) = E^{\mathcal{a}_s} E^{\mathcal{a}_{t_1}} \dots E^{\mathcal{a}_{t_n}}(X_t - X_s)$$

$$= E^{\mathcal{a}_s} E^{\mathcal{a}_{t_1}} \dots E^{\mathcal{a}_{t_{n-1}}}\{\varphi_s(\omega)[W(\omega,t_1) - W(\omega,s)]$$

$$+ \dots + \varphi_{n-1}(\omega)[W(\omega,t_n) - W(\omega,t_{n-1})]\}$$

poiché $E^{\mathcal{a}_{t_n}}\{\varphi_n(\omega)[W(\omega,t) - W(\omega,t_n)]\}$

$$= E\{\varphi_n(\omega)[W(\omega,t) - W(\omega,t_n)]\} =$$

$$= E\{\varphi_n(\omega)\} E\{W(\omega,t) - W(\omega,t_n)\} = 0 .$$

Iterando

$$E^{\mathcal{a}_s}(X_t - X_s) = E^{\mathcal{a}_s} E^{\mathcal{a}_{t_1}} \dots E^{\mathcal{a}_{t_n}}(X_t - X_s)$$

$$= E^{\mathcal{a}_s}\{\varphi_s(\omega)[W(\omega,t_1) - W(\omega,s)]\}$$

$$= 0$$

Se $\varphi(\omega,t)$ non e' semplice,
si prende una approssimazione $\{\varphi_n\}$
e si definisce

$$X_n(\omega,t) = \int_a^t \varphi_n(\omega,t)\, dW(\omega,\tau)$$

For each n, $\{X_n(\omega,t), \mathcal{a}_t, a \le t \le b\}$
e' una martingala e quindi

$$E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,t) - X(\omega,s)\big) = E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,t) - X_n(\omega,t)$$
$$+ X_n(\omega,s) - X(\omega,s)\big) = E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,t) - X_n(\omega,t)\big) - E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,s) - X_n(\omega,s)\big)$$

Ma $E|X(\omega,t) - X_n(\omega,t)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e percio'

$$\begin{cases} E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,t) - X_n(\omega,t)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{m.q} 0 \\ E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,s) - X_n(\omega,s)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{m.q.} 0 \end{cases}$$

che implica $E^{\mathcal{a}_s}\big(X(\omega,t) - X(\omega,s)\big) = 0$ q.o.

A1 $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.q.} X \Rightarrow EX_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} EX^2$

Prova

Poiché $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.q.} X$:

$$E|X_n - X|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Allora dalla disuguaglianza di Schwarz

$|E(XY)|^2 \leq EX^2 \cdot EY^2$:

$$\left|\sqrt{EX_n^2} - \sqrt{EX^2}\right|^2 = EX_n^2 + EX^2 - 2\sqrt{EX_n^2}\cdot\sqrt{EX$$

$$\leq EX_n^2 + EX^2 - 2|E(X_nX)| \leq$$

$$\leq E(X_n - X)^2$$

Perciò passando al limite nella disuguaglian

$$EX_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} EX$$

A2

Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e' convessa:

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \lambda(x_0) : \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x_0)(x - x_0) \leq g(x) - g(x_0)$$

Si prenda

(a) $x_0 \longrightarrow EX$

$x \longrightarrow X$

allora

$$\lambda(EX)(-EX + X) \leq g(X) - g(EX)$$

e prendendo i valori attesi

$$0 = \lambda(EX)E(-EX + X) \leq E(g(X)) - g(EX)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E(g(X)) \geq g(EX)}$$

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN (1)

5 $\quad x_0 \longrightarrow E^a X$

$\quad x \longrightarrow X$

allora

$$\lambda(E^a X)(-E^a X + X) \leq g(X) - g(E^a X)$$

e prendendo i valori attesi condizionati,

poiché $E^a(\underbrace{\lambda(E^a X)}_{\substack{a\text{-misurabile} \\ \text{essendo } \lambda \text{ continua}}} \cdot Y) = \lambda(E^a X) E^a Y$ q.o.

$$0 = E^a\left[\lambda(E^a X)(-E^a X + X)\right] = \lambda(E^a X) E^a(-E^a X + X)$$

$$\leq E^a(g(X)) - E^a \underbrace{g(E^a X)}_{\substack{a \text{ misurabile} \\ \text{essendo } g \text{ continua}}} =$$

$$E^a(g(X)) - g(E^a X)$$

$$\Rightarrow \boxed{E^a(g(X)) \geq g(E^a X) \quad \text{q.o.}}$$

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN 2

Dimostriamo che

$$X_n \xrightarrow{m.q.} X \Longrightarrow E^a X_n \xrightarrow{m.q.} E^a X$$

Infatti

$$E\left|E^a X_n - E^a X\right|^2 = E\left|E^a(X_n - X)\right|^2 \leq$$

$$\leq E\left(E^a |X_n - X|^2\right) = E|X_n - X|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

N.B.
essendo $g(s) = s^2$ convessa, posso applicare la disuguaglianza di Jensen 2 .

- Il processo $\{X_t, a \leq t \leq b\}$ definito come

$$X(\omega,t) = \int_a^t \varphi(\omega,s)\,dW(\omega,s)$$

è continuo in media quadratica, poiché per ogni $t \in [a,b)$

$$E|X(\omega,t+h) - X(\omega,t)|^2 =$$

$$E\left|\int_t^{t+h} \varphi(\omega,s)\,dW(\omega,s)\right|^2$$

ma se $\{\varphi_n\}$ è una sequenza approssimante

$$E\left|\int_t^{t+h} [\varphi(\omega,s) - \varphi_n(\omega,s)]\,dW(\omega,s)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

perciò

$$E|X(\omega,t+h) - X(\omega,t)|^2 \leq$$

$$2E\left|\int_t^{t+h} [\varphi(\omega,s) - \varphi_n(\omega,s)]\,dW(\omega,s)\right|^2 +$$

$$2E\left|\int_t^{t+h} \varphi_n(\omega,s)\,dW(\omega,s)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 2\int_t^{t+h} E|\varphi(\omega,s)|^2 ds$$

poiché

$$E\left|\int_t^{t+h} \varphi_n(\omega,s)\,dW(\omega,s)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} E\left|\int_t^{t+h} \varphi(\omega,s)\,dW(\omega,s)\right|^2 = \int_t^{t+h} E|\varphi(\omega,s)|^2 ds$$

Quindi passando al limite per $n\to\infty$

$$E|X(\omega,t+h)-X(\omega,t)|^2 \leq 2\int_t^{t+h} E|\varphi(\omega,s)|^2 ds \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

- Quindi, poiché $X(\omega,t)$ è continuo in media quadratica, è anche continuo in probabilità e possiamo "considerarlo" separabile e misurabile. Se assumiamo che il processo $\{W_t, a\leq t\leq b\}$ è separabile, possiamo "considerare" $X(t,\omega)$ anche continuo per quasi tutti i campioni

L'ipotesi HP può essere indebolita sostituendo a

$$\int_a^b E|\varphi(\omega,t)|^2 dt < \infty$$

l'ipotesi

$$\mathcal{P}\left(\int_a^b |\varphi(\omega,t)|^2 dt\right) = 1$$

Allora

$$\int_a^b \varphi(\omega,t)\, dW(\omega,t) \xleftarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} \int_a^b \varphi^n(\omega,t)\, dW(\omega,t)$$

ove φ^n è definita come

$$\varphi^n(\omega,t) = \begin{cases} \varphi(\omega,t) & \text{se } \int_a^t |\varphi(\omega,s)|^2 ds \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$