ADDENDUM

$$E(Y) = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathcal{P} = \int_\Omega Y(\omega)\, \mathcal{P}(d\omega)$$

$$\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathcal{P} = \int_{\mathbb{R}} y\, d\mathbb{P}_Y = \int_{\mathbb{R}} y\, \mathbb{P}_Y(dy)$$

ove $\mathbb{P}_Y(y) = \mathcal{P}(Y(\omega) \leq y)$

e quindi $\mathbb{P}_Y(dy) = \mathcal{P}(Y(\omega) \in dy)$

Si ponendo $Y = I_{\{X \leq x\}} \Longrightarrow$

$$E(I_{\{X \leq x\}}) = \int_\Omega I_{\{X \leq x\}}\, d\mathcal{P} =$$

$$= \int_{X<x} d\mathcal{P} = \mathcal{P}(X \leq x)$$

d'altra parte

$$\int I_{\{X \leq x\}}\, d\mathcal{P} = \int_{\mathbb{R}} y\, \mathbb{P}_Y(dy) =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{-\infty}^{x} \mathcal{P}(I_{\{X<x\}} \in dy)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \mathcal{P}(X \in f^{-1}(dy)) = \int_{-\infty}^{x} \mathcal{P}(X \in d\xi)$$

ove $f(X) := I_{X \leq x}$ e $f^{-1}(dy) := d\xi$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \mathcal{P}(X \in d\xi)}$$

Siccome $\mathcal{P}(X_1 \leq x_1, A)$, $A \in \mathcal{A}^{X_2}$, σ-algebra generata da X_2, è una misura di probabilità su $\mathcal{A}^{X_2}$,

allora

$$\boxed{\mathcal{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \mathcal{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \in d\xi_2)}$$

In generale

$$\mathcal{P}(X_1 \leq x_1, X_i \leq x_i, i=2,..,n) = \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \mathcal{P}(X_1 \leq x_1, X_i \in d\xi_i, i=2,..$$

Inoltre, per definizione di $E^{a_{X_1}} Y$ ©

$$\int_A E^{a_{X_1}} Y \cdot dP = \int_A Y \, dP, \quad \forall A \in a$$

ove a_X è la σ-algebra generata da X_1

Se $Y = I_{\{X_2 \leq x_2\}}$ e $A = \{X_1 \leq x_1\}$

$$\int_{\{X_1 \leq x_1\}} E^{a_{X_1}}(I_{\{X_2 \leq x_2\}}) \, dP = \int_{\{X_1 \leq x_1\}} I_{\{X_2 \leq x_2\}} \, dP$$

Poiché

$$\int_{\{X_1 \leq x_1\}} I_{\{X_2 \leq x_2\}} \, dP = P(X_2 \leq x_2, X_1 \leq x_1)$$

e

$$E^{a_{X_1}}(I_{\{X_2 \leq x_2\}}) = P^{a_{X_1}}(X_2 \leq x_2) = f(X$$

per una certa funzione di Borel $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

con

$$f(\xi_1) = E(I_{\{X_2 \leq x_2\}} \mid X_1 = \xi_1) =$$

d

$$= \frac{\int_{\{X_1=\xi_1\}} I_{\{X_2 \le x_2\}} \, dP}{P(X_1=\xi_1)}$$

$$= \frac{P(X_2 \le x_2 , X_1 = \xi_1)}{P(X_1 = \xi_1)} = P(X_2 \le x_2 | X_1 = \xi_1)$$

quindi

$$P(X_2 \le x_2, X_1 \le x_1) =$$

$$\int_{\{X_1 \le x_1\}} I_{\{X_2 \le x_2\}} \, dP = \int_{\{X_1 \le x_1\}} E^{a_{X_1}}(I_{\{X_2 \le x_2\}}) \, dP$$

$$= \int_{\{X_1 \le x_1\}} P^{a_{X_1}}(X_2 \le x_2) \, dP =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} P(X_2 \le x_2 | X_1 = \xi_1) \; P_{X_1}(d\xi_1)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} P(X_2 \le x_2 | X_1 = \xi_1) P(X_1 \in d\xi_1)$$

e

perciò

$$\boxed{\mathcal{P}(X_2 \le x_2, X_1 \le x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \mathcal{P}(X_2 \le x_2 \mid X_1 = \xi_1) \cdot \mathcal{P}(X_1 \in d\xi_1)}$$

Siccome $\mathcal{P}_0(A) := \dfrac{\mathcal{P}(A, X_0 = x_0)}{\mathcal{P}(X_0 = x_0)}$

$= \mathcal{P}(A \mid X_0 = x_0)$, $A \in \mathcal{A}^{X_1, X_2}$,

ove $\mathcal{A}^{X_1,X_2}$ è la σ-algebra generata da $\{X_1, X_2\}$, è una misura di probabilità su $\mathcal{A}^{X_1,X_2}$: si ha da sopra

$$\mathcal{P}_0(X_2 \le x_2, X_1 \le x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \mathcal{P}_0(X_2 \le x_2 \mid X_1 = \xi_1) \cdot \mathcal{P}_0(X_1 \in d\xi_1) =$$

(f)

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\mathcal{P}_0(X_2 \le x_2, X_1 = \xi_1)}{\mathcal{P}_0(X_1 = \xi_1)} \cdot$$

$$\cdot \; \mathcal{P}(X_1 \in d\xi_1 \mid X_0 = x_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\mathcal{P}(X_2 \le x_2 ; X_1 = \xi_1 , X_0 = x_0)}{\mathcal{P}(X_1 = \xi_1 ; X_0 = x_0)} \cdot$$

$$\cdot \; \mathcal{P}(X_1 \in d\xi_1 \mid X_0 = x_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \mathcal{P}(X_2 \le x_2 , X_1 = \xi_1 \mid X_0 = x_0) \cdot$$

$$\cdot \; \mathcal{P}(X_1 \in d\xi_1 \mid X_0 = x_0)$$

perciò

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{P}(X_2 \le x_2 , X_1 \le x_1 \mid X_0 = x_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \mathcal{P}(X_2 \le x_2 , X_1 = \xi_1 \mid X_0 = x_0)\, \mathcal{P}(X_1 \in d\xi_1 \mid X_0 = x_0) \end{aligned}}$$

Una relazione analoga si ha sui valori attesi

$$E\left(X_2 \le x_2, X_1 \le x_1 \mid X_0 = x_0\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_1} E\left(X_2 \le x_2, X_1 = \xi_1 \mid X_0 = x_0\right) P\left(X_1 \in d\xi_1 \mid X = x_0\right)$$

La proprietà di Markov si può anche riassumere con una delle seguenti proprietà. Sia $\mathcal{A}_t$ la σ-algebra generata da tutti i $\{X_s, s \le t\}$ e $\mathcal{A}_t^+$ la σ-algebra generata da tutti i $\{X_s, s \ge t\}$. Allora $\{X_t, t \in T\}$ è un processo di Markov se vale una delle due:

- $E(ZY \mid X_t) = E(Z \mid X_t)\, E(Y \mid X_t)$

  Z è $\mathcal{A}_t^+$ misurabile, Y è $\mathcal{A}_t$ misurabile

- $E^{\mathcal{A}_t} Z = E(Z \mid X_t)$

  Z è $\mathcal{A}_t^+$ misurabile

Una conseguenza di ciò è anche

$$E(Z|X_{t_0}) = E(E(Z|X_t)|X_{t_0})$$

per $t_0 < t$ e

Z è a_t^{+} misurabile

Da ciò segue anche l'equazione di Chapman-Kolmogorov con $Z = I_B$, $B = \{X_t < x_t\}$:

$$E(I_B | X_{t_0} = x_{t_0}) = E(E(I_B|X_s)|x_{t_0})$$

con $t_0 < s < t$

ANCORA SUI PROCESSI DI MARKOV

Si ponga

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) := \mathcal{P}(X_{t_i} < x_i, i = 1, \dots, n)$$

$$P(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1}) := \mathcal{P}(X_{t_i} < x_i \mid X_{t_{i-1}} = x_{i-1})$$

$P(x, t \mid \xi, s)$, $t > s$, si chiama la FUNZIONE DI TRANSIZIONE.

Se $t_1 < t_2 < t_3$ ad esempio

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \mathcal{P}(X_{t_3} < x_3; X_{t_2} \in d\xi_2; X_{t_1} \in d\xi_1)$$

ove $d\xi_i$ sta per $[\xi_i, \xi_i + d\xi_i)$.

Per la proprietà di Markov

$$P(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}P(x_3,t_3|\xi_2,t_2)\cdot$$

$$\cdot\, dP(\xi_1,t_1;\xi_2,t_2)=$$

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}P(x_3,t_3|\xi_2,t_2)\,dP(\xi_2,t_2|\xi_1,t_1)\,dP(\xi_1,t_1)$$

In generale

$$P(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)=$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_{n-1}}P(x_n,t_n|\xi_{n-1},t_{n-1})\,dP(\xi_{n-1},t_{n-1}|\xi_{n-2},t_{n-2})$$

$$\cdots\; dP(\xi_2,t_2|\xi_1,t_1)\,dP(\xi_1,t_1)$$

che fornisce la funzione di distribuzione congiunta in termini delle funzioni di distribuzione $P(x,t)$ e di transizione $P(x,t|\xi,s)$, $t<s$.

Per costruire $P(x_1,t_1; \dots, x_n, t_n)$ da $P(x,t)$ e $P(x,t|\xi,s)$ assegnate ci sono delle condizioni di <u>compatibilità</u>

- $P(x,t) = \mathcal{P}(X_t < x, -\infty < X_s < \infty)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(x,t|\xi,s)\, dP(\xi,s)$$

- if $t_0 < s < t$

$$\mathcal{P}(x,t|x_0,t_0) = \mathcal{P}(X_t < x | X_{t_0} = x_0)$$

$$= \mathcal{P}(X_t < x, -\infty < X_s < \infty | X_{t_0} = x_0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(X_t < x | X_s = \xi, X_{t_0} = x_0)\, \mathcal{P}(X_s \in d\xi | X_{t_0} =$$

$$\underbrace{= \int_{-\infty}^{\infty} P(x,t|\xi,s)\, dP(\xi,s|t_0,x_0)}_{\text{EQUAZIONE DI CHAPMAN-KOLMOGOROV}}$$