INDIPENDENZA E VALORE ATTESO CONDIZIONATO

Due eventi A e B si dicono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

N eventi $A_1, \dots, A_N$ si dicono indipendenti se

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_k\right) = \bigcap_{i=1}^{N} P(A_k)$$

Se A e B sono eventi con $P(B) \neq 0$ allora

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

è la PROBABILITÀ CONDIZIONATA di A dato B

n variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$ si dicono INDIPENDENTI se $\forall\, x_1, \dots, x_n$ gli eventi $\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$ sono indipendenti.

Perciò se $P_{X_i}(\cdot)$ sono le funzioni di distribuzione di X_i e $P_X(\cdot)$ la funzione di distribuzione congiunta di $X_1, \dots, X_n$ allora

$$P_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i)$$

Definiamo il valore atteso condizionato. Facciamolo prima in un caso più semplice.

Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra definita su Ω. Un ATOMO di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$ che contiene solo sé stesso e $\{\phi\}$. Due atomi di $\mathcal{A}$ sono perciò disgiunti se sono distinti. Si assuma che $\mathcal{A}$ è la più piccola σ-algebra contenente una collezione numerabile $\{B_1, B_2, \dots\}$. Si dice che $\mathcal{A}$ è separabile. In questo caso

$$\Omega = \bigcup_t A_t$$

ove $\{A_t, t \in T\}$ sono gli atomi di $\mathcal{A}$ e T è un insieme di R numerabile. Inoltre ogni $B \in \mathcal{A}$ è dato dall'unione di atomi.

- Una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $X : \Omega \to \mathbb{R}$ può assumere un solo valore COSTANTE su un atomo di $\mathcal{A}$

Sia A un atomo, $x \in \mathbb{R}$.
Allora $A \cap \{\omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{a}$.

Quindi
$$A \cap \{\omega : X(\omega) = x\} = \begin{cases} \{\phi\} & \text{o} \\ A \end{cases}$$

Se $\mathcal{a}_1 \supset \mathcal{a}_2$ sono due σ-algebre separabili, ogni atomo di $\mathcal{a}_2$ è un insieme in $\mathcal{a}_1$ e è dato dall'unione di atomi di $\mathcal{a}_1$. Quindi gli atomi di $\mathcal{a}_2$ sono più grandi di quelli di $\mathcal{a}_1$. Allora una funzione $\mathcal{a}_2$-misurabile, essendo anche $\mathcal{a}_1$-misurabile, può assumere più valori costanti su un singolo atomo di $\mathcal{a}_2$.

Sia X una variabile aleatoria tale che $E|X| < \infty$. Sia $\mathcal{a}' \subset \mathcal{a}$ una σ-algebra.

Si dice VALORE ATTESO di X CONDIZIONATO a $\mathcal{a}'$ quell'unica (q.o.) $E^{\mathcal{a}'}X$ variabile aleatoria tale che:

① $E^{\mathcal{a}'}X$ è $\mathcal{a}'$-misurabile

② $E I_A E^{\mathcal{a}'}X = E I_A X \quad \forall A \in \mathcal{a}'$

L'esistenza di $E^{\mathcal{a}'}X$ si dimostra come segue. Sia X una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{a}, P)$ e $\mathcal{a}' \subset \mathcal{a}$ una σ-algebra. Sia $X = X^+ - X^-$ e si assuma $E|X| < \infty$.

Si definiscano le misure

$$\mu^+(A) = E I X^+$$

$$\mu^-(A) = E I X^- \qquad A \in \mathcal{a}'$$

Se $A \in \mathcal{a}'$ e $P(B) = 0$ allora

$$\mu^\pm(A) = \int_A X^\pm dP = 0$$

Proprietà

- $X = c$ q.o. $\Rightarrow E^{a'} X = c$ q.o.
- $X \geq Y$ q.o. $\Rightarrow E^{a'} X \geq E^{a'} Y$ q.o.
- $E^{a'}(\alpha X + \beta Y) = \alpha E^{a'} Y + \beta E^{a'} Y$ q.o.

  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{m.\nu} X$, $\nu \geq 1 \Rightarrow$

  $E^{a'} X_n \xrightarrow[n \to \infty]{m.\nu} E^{a'} X$

- $\{X_n\}$ sequenza monotona di variabili aleatorie integrabili convergenti a X

  $\Rightarrow \{E^{a'} X_n\}$ è q.o. monotona e

  $E^{a'} X_n \xrightarrow[n \to \infty]{q.o.} E^{a'} X$

- se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.o.} X$ e $|X_n| \leq Y \ \forall n$

e con Y integrabile $\Rightarrow$

$$E^{a'}X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.o.} E^{a'}X$$

Proprieta' di $E^{a'}X$

- se B e' un atomo di $\mathcal{a}'$ e $P(B) > 0$

allora

$$E^{a'}X = \frac{1}{P(B)} \int_B X \, dP$$

$\uparrow$

e' costante su B

- se ogni evento di $\mathcal{a}'$ e' indipendente da ogni evento della forma $\{\omega : X(\omega) < x\}$

$E^{a'}X = EX$ q.o.

In particolare se $\mathcal{A}_\emptyset = \{\Omega, \emptyset\}$

$$E^{\mathcal{A}_\emptyset} X = EX \quad \text{q.o.}$$

- se Y è $\mathcal{A}'$ misurabile

$$E^{\mathcal{A}'}(YX) = Y E^{\mathcal{A}'} X \quad \text{q.o.}$$

in particolare con $X = 1$

$$E^{\mathcal{A}'} Y = Y \quad \text{q.o.}$$

- se $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2$

$$E^{\mathcal{A}_2} E^{\mathcal{A}_1} X = E^{\mathcal{A}_2} X$$

- esiste sempre una funzione di Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$(E^{\mathcal{A}_X} Y)(\omega) = f(X(\omega)) \quad \text{q.o.}$$

ove $\mathcal{A}_X$ è la σ-algebra generata da X, ovvero $X^{-1}(\mathcal{B})$

σ-algebra di Borel

Sia

$$I_{\{Y<y\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } Y(\omega) < y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per la proprietà precedente, esiste

$g_y(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$,

funzione di Borel e

$$E(I_{\{Y<y\}} | X) := E^{X} I_{\{Y<y\}} = g_y(X)$$

Si definisce

$$P(y|x) = g_y(x)$$

la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONDIZIONALE DI Y data X. Nello stesso modo se $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$:

$$P(y_1, \dots, y_m | x_1, \dots, x_n) := g_{y_1, \dots, y_m}(x_1, \dots, x_n)$$

è la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONDIZIONALE CONGIUNTA DI Y data X.

N.B. $P(y|x) \equiv P(Y<y \,|\, X=x)$

Due σ-algebre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ si dicono indipendenti se $\forall\ B_1 \in \mathcal{A}_1,\ B_2 \in \mathcal{A}_2$

$$E\, I_{B_1} I_{B_2} = E\, I_{B_1} \cdot E\, I_{B_2}$$

Due σ-algebre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ si dicono condizionatamente indipendenti data $\mathcal{A}'$ se $\forall\ B_1 \in \mathcal{A}_1,\ B_2 \in \mathcal{A}_2$

$$E^{\mathcal{A}'} I_{B_1} I_{B_2} = E^{\mathcal{A}'} I_{B_1} \cdot E^{\mathcal{A}'} I_{B_2}$$