PROCESSI GAUSSIANI E MOTI BROWNIANI

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variabile aleatoria. La funzione $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$F_X(u) = E\left\{ e^{\left(i \sum_{k=1}^{n} u_k X_k\right)} \right\}, \quad u = (u_1, \dots, u_n)$$

è la FUNZIONE CARATTERISTICA PER X. Si ha

$$F_X(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\left(i \sum_{k=1}^{n} u_k X_k\right)} P_X(dx)$$

in termini della funzione di distribuzione congiunta di X. Ogni funzione di distribuzione è determinata in modo unico dalla funzione caratteristica

Sia Z una variabile aleatoria tale che $EZ^2 < \infty$. Sia $\mu = EZ$ e $\sigma^2 = E(Z-\mu)^2$. La variabile Z si dice GAUSSIANA se o

(i) $\sigma^2 = 0$ (in questo caso $Z = \mu$ q.o.)

oppure

(ii) $$P(Z<a) = \int_{-\infty}^{a} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}}}_{\text{questa è la funzione di densità } p_Z(z) \text{ di } Z} dz$$

La funzione caratteristica di Z è

$$F(u) = Ee^{iuZ} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\mu)^2} \cdot e^{iuz} dz$$

$$= e^{iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2}$$

Da qui si ricava un'altra caratterizzazione delle variabili gaussiane.

Z è gaussiana se e solo se

$$E e^{iuZ} = e^{iuEZ - \frac{1}{2} E(Z - EZ)^2}$$

Un processo $\{X_t, t \in T\}$ si dice GAUSSIANO se ogni combinazione

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_{t_i} \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

è una variabile aleatoria gaussiana.

Un processo $\{X_t, t \in T\}$ è GAUSSIANO se e solo se:

(i) $EX_t^2 < \infty \quad \forall t \in T$

(ii) $\forall \ (t_1, \dots, t_N) \subset T$

$$E\left\{e^{i \sum_{k=1}^{N} u_k X_{t_k}}\right\} = e^{i \sum_{k=1}^{N} u_k \mu(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} u_k u_\ell R(t_k, t}$$

ove $\mu(t) = EX_t$ e

$$R(t,s) = E\{[X_t - \mu(t)][X_s - \mu(s)]\}$$

Sia $\{X_n\}$ una sequenza di v.a. gaussiane convergente a una v.a. X. Allora si dimostra che $X_n \xrightarrow{m.q.} X$ e, quindi,

$$\mu_n = EX_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu = EX, \quad EX_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} EX^2$$

e

$$\sigma_n^2 = E(X_n - EX_n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2 = E(X-EX)^2$$

Inoltre poiché la funzione di distribuzione di X_n converge a quella di X

allora

$$p_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(x-\mu_n)^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Quindi, il limite in media quadratica di una sequenza $\{X_n\}$ di v.a. gaussiane è ancora una v.a. gaussiana. Quindi non solo $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k X_{t_k}$ ma anche il suo limite in media quadratica.

- La funzione $\mu(t)$ è la funzione MEDIA di $\{X_t, t \in T\}$ mentre $R(t,s)$ è la FUNZIONE DI COVARIANZA

Per ogni collezione $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \subset T$ la matrice $R = [R_{ij}]$, $R_{ij} := R(t_i, t_j)$ è semidefinita positiva. Infatti

$$a^{T*} R a = \sum_{i,j}^{n} E\{(a_i [X_{t_i} - \mu(t_i)])(a_j^* [X_{t_j} - \mu(t_j)])\}$$

$$= E\left| \sum_{i=1}^{n} a_i [X_{t_i} - \mu(t_i)] \right|^2 \geq 0$$

$\forall a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{C}$

- La funzione caratteristica per ogni collezione $\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_N}\}$ è determinata univocamente da $\mu(t)$ e $R(t,s)$. Se R è DEFINITA POSITIVA si può usare la formula inversa di FOURIER per gli int[egrali] per ricavare la densità di probabilità congiunta

$$p(x_1, t_1; \ldots; x_N, t_N) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1, \ldots, u_N) e^{-i \sum_{k=1}^{N} u_k x_k} du_1 \ldots du_N$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T R^{-1} (x-\mu)}$$

ove R^{-1} è l'inversa di R, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu(t_1) \\ \vdots \\ \mu(t_N) \end{pmatrix}$ e $|R|$ è il determinante di R. Se R non è definita positiva, è tuttavia ancora possibile ricavare la funzione di distribuzione congiunta.

Quindi, le funzioni di distribuzione congiunta di qualsiasi collezione $\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_N}\}$, ove $\{X_t, t \in T\}$ è un processo gaussiano, sono determinate a partire da $\mu(t)$ e $R(t,s)$

Un processo $\{X_t, t \geq 0\}$ si dice un moto <u>Browniano</u> se

- $\{X_t, t \geq 0\}$ è gaussiano
- $EX_t = 0$, $E(X_t X_s) = \min(t,s)$

Se $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$, la matrice $R = [R_{ts}]$, $R_{ts} = E(X_t X_s)$ è definita positiva. Quindi la funzione di densità di probabilità è

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}}$$

con $t_0 = x_0 = 0$. In altre parole, $\{X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_N} - X_{t_{N-1}}\}$ sono una collezione di variabili aleatorie indipendenti per $t_1 < t_2 < \dots < t_N$.

Un processo $\{X_t, t \in T\}$ si dice un <u>processo di Markov</u> se per ogni sequenza $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ in T

$$P(X_{t_N} \le x_N \mid X_{t_i} = x_i, i = 1, \ldots, N-1)$$

$$= P(X_{t_N} \le x_N \mid X_{t_{N-1}} = x_{N-1})$$

In altre parole, dato il presente e il passato, il futuro depende solo dal presente.

Un moto Browniano è un processo di Markov:

$$P(X_{t_N} \le x_N \mid X_{t_i} = x, i = 1, \ldots, N-1) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x_N} p(x_1, t_1; \ldots; x_{N-1}, t_{N-1}; \xi, t_N) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; \ldots, x_{N-1}, t_{N-1}; \xi, t_N) d\xi}$$

$$= \int_{-\infty}^{x_N} \frac{1}{\sqrt{2\pi (t_N - t_{N-1})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\xi - x_{N-1})^2}{t_N - t_{N-1}}} d\xi$$

$$= P(X_{t_N} \le x_N \mid X_{t_{N-1}} = x_{N-1})$$

Sia dato un processo $\{X_t, t \in T\}$ e $\{\mathcal{a}_t, t \in T\}$ una famiglia crescente di σ-algebre tale che per ogni $t \in T$ X_t è $\mathcal{a}_t$-misurabile. $\{X_t, \mathcal{a}_t, t \in T\}$ dice una MARTINGALA se

$$t > s \Rightarrow E^{\mathcal{a}_s} X_t = X_s \quad q.o.$$

- SUBMARTINGALA

$$t > s \Rightarrow E^{\mathcal{a}_s} X_t \geq X_s \quad q.o.$$

- SUPERMARTINGALA

$$t > s \Rightarrow E^{\mathcal{a}_s} X_t \leq X_s \quad q.o.$$

CONSEGUENZA: MARTINGALA $\Rightarrow E(X_t | X_\tau, 0 \leq \tau \leq s) = X_s$

Per un moto browniano se prendiamo $\mathcal{a}_{xt}$ pari alla più piccola σ-algebra rispetto alla quale $\{X_s, s \leq t\}$ sono tutti misurabili, allora $\{X_t, \mathcal{a}_{xt}, t \geq 0\}$ è una martingala. Se $\{\mathcal{a}_t, t \geq 0\}$ è una famiglia di σ-algebre crescente tali che X_t è $\mathcal{a}_t$-misurabile e per ogni t $\{X_s - X_t, s \geq t\}$ è indipendente da $\mathcal{a}_t$, si ha

$$E^{\mathcal{a}_s} X_t = E^{\mathcal{a}_s}\left[X_s + (X_t - X_s)\right] =$$

$$= X_s + \underbrace{E(X_t - X_s)}_{\overset{\|}{0}} = X_s \text{ q.o.}$$

Inoltre, per un moto browniano

$$E(X_t - X_s)^2 = t - s - 2\min(t,s) = |t-s|$$

Quindi per la disuguaglianza di Chebyshev $\forall \epsilon > 0$

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) \leq \frac{E|X_{t+h} - X_t|^2}{\epsilon^2} \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\epsilon^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Perciò, il moto Browniano è anche continuo in probabilità. Quindi, possiamo "considerarlo" separabile e misurabile.