ALTRI TIPI DI CONTINUITÀ

$\{X_t, t \in T\}$ si dice:

- CONTINUO IN MEDIA p in $t \in T$

  se $\quad E|X_{t+h} - X_t|^p \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

- CONTINUO q.o. in $t \in T$ se

  $$P\left(\left\{\omega : \lim_{h \to 0} |X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| = 0 \right\}\right) = 1$$

- CONTINUO PER QUASI TUTTI I CAMPIONI

  se $\{X_t, t \in T\}$ è separabile e

  $$P\left(\bigcup_{t \in T} \left\{\omega : \lim_{h \to 0} |X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| \neq 0 \right\}\right) = 0$$

Si noti che $A_t = \{\omega : \lim_{h \to 0} |X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)| \neq$

è un evento di misura nulla se

$\{X_t, t \in T\}$ è continuo q.o. in t. Tuttavia

$\bigcup_{t \in T} A_t$ non è necessariamente un evento (di misura nulla).

Se $\{X_t, t \in T\}$ è CONTINUO su quasi tutti i campioni allora è q.o. continuo in ogni $t \in T$. Ciò implica anche la continuità in probabilità in ogni $t \in T$.

Sia $\{X_t, t \in T\}$ un processo separabile, T un intervallo finito. Se esistono $\alpha, \beta, C > 0$ tali che

$$E|X_{t+h} - X_t|^{\alpha} \leq C h^{1+\beta}$$

allora quasi ogni campione di $\{X_t, t \in T\}$ è uniformemente continuo in T

Per un moto Browniano

$$\mathcal{P}(X_t - X_s < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi|t-s|}} e^{-\frac{u^2}{2|t-s|}} du$$

essendo

$E(X_t - X_s) = 0$ e $E(X_t - X_s)^2 = |t-s|$.

Quindi

$$E|X_t - X_s|^4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^4}{\sqrt{2\pi|t-s|}} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{|t-s|}} du$$

$$= 3(t-s)^2$$

e perciò con $t - s = h$:

$E|X_{t+h} - X_t|^4 = 3h^2$

che verifica la condizione precedente con $C = 3$, $\alpha = 4$ e $\beta = 1$. Perciò un il moto Browniano separabile è continuo per quasi ogni campione su T finito.