CONVERGENZA DI VARIABILI ALEATORIE

Una sequenza di variabili aleatorie $\{X_n\}$ CONVERGE QUASI OVUNQUE (q.o.) a X se esiste A : $P(A)=0$ tale che $\forall\, \omega \in A$

$$\lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$$

Ciò si indica anche con

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.o.} X$$

- il limite X di $\{X_n\}$ è una variabile aleatoria

Una sequenza di variabili aleatorie $\{X_n\}$ CONVERGE IN PROBABILITÀ a X se $\forall\, \epsilon \geq 0$

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ciò si indica anche

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$$

- $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.o.} X \iff \sup_{m\geq n} |X_m - X_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ q.o.

- se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.o.} X \Longrightarrow$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$$

- se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Longrightarrow \exists$ una sottosequenza $\{n_j\}$: $X_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{q.o.} X$

Una sequenza $\{X_n\}$ di variabili aleatorie si dice CONVERGENTE IN MEDIA p-ESIMA $(p>0)$ a X se

$$E|X_n - X|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Si scrive anche

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.p} X$$

- $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$

- $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.p} X \Longleftrightarrow \sup_{m \geq n} E|X_m - X_n|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

q.o.

- $\forall \varepsilon : \sum_n \sup_{m\geq n} P(|X_m - X_n| \geq \varepsilon) < \infty$

$\Rightarrow \{X_n\}$ converge quasi ovunque

Esempio

$$P(X_m - X_n < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{mn}^2}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{mn}^2}} dx$$

$$E(X_m - X_n)^2 = \sigma_{mn}^2 = \frac{|m-n|}{mn}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} E|X_m - X_n|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

allora $\{X_n\}$ converge in media quadratica

Inoltre

$$E|X_m - X_n|^4 = 3\left(\frac{|m-n|}{mn}\right)^2$$

$$E|X_m - X_n|^6 = 15\left(\frac{|m-n|}{mn}\right)^3$$

$$\vdots$$

Poiché $\quad E|X|^s \geq \epsilon^s \mathbb{P}(|X| \geq \epsilon)$

$\forall\, s > 0 \qquad$ (DISUGUAGLIANZA DI MARKOV)

allora

$$\sup_{m \geq n} \mathbb{P}(|X_m - X_n| \geq \epsilon) \leq \sup_{m \geq n} \frac{E|X_m - X_n|^4}{\epsilon^4} = \frac{3}{n^2 \epsilon^4}$$

Quindi

$$\sum_n \sup_{m \geq n} \mathbb{P}(|X_m - X_n| \geq \epsilon) \geq \frac{3}{\epsilon^4} \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$$

e quindi $\{X_n\}$ converge quasi ovunque.