Un RUMORE BIANCO è un processo stazionario con $S(\nu) = S_0 \quad \forall \nu$.

Ma in questo caso

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu = \infty$$

Piuttosto procedendo in modo euristico

$$R(\tau) = E(X_{t+\tau} \cdot X_t) = \delta(\tau) S_0$$

impulso di Dirac

cosicché

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i 2\pi \nu t} R(\tau) d\tau$$

$$= S_0$$

Poiché $R(0) = \infty$ il rumore bianco non è un processo fisico. Come definire le soluzioni di un equazione ad esempio $\dot{Y}_t = -Y_t + X_t$ ove X_t è un rumore bianco?

Una sequenza di processi $\{X_t^{(n)}, t\in(-\infty,\infty)\}$
si dice "convergente a un rumore bianco"
se è continuo in media quadratica e

- $\forall f \in \mathcal{L}_2$, $\{X_n(f)\}$ è una sequenza convergente in media quadratica ove

$$X_n(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) X_t^{(n)} dt$$

- esiste $S_0 > 0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} E\{X_n(f)X_n(g)\} = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$$

$\forall f, g \in \mathcal{L}_2$.

In questo senso un processo $\{X_t\}$ è "approssimativamente" un rumore bianco. Cioè esiste $\forall f \in \mathcal{L}_2$ un processo $X(f)$ con $E X^2(f) < \infty$ tale che

$$\boxed{E\left(X^2(f)\right) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

e

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) X_t \, dt$$

ove X_t è un rumore bianco. Quest'ultimo integrale ha solo un significato "formale". Tuttavia $X(f)$ può essere rappresentato come un integrale stocastico.

▨ Sia $\{X_t^{(n)}\}$ una sequenza di processi continui in media quadratica convergente a un rumore bianco. Sia

$$X(f) \xleftarrow[m.q.]{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) X_t^{(n)} dt, \quad f \in \mathcal{L}_2$$

Allora

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dZ_t \qquad (*)$$

ove

$$Z_t \xleftarrow[m.q.]{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)} ds$$

è un processo con INCREMENTI ORTOGONALI cioè

$$E(Z_b - Z_a)(Z_d - Z_c) = [a,b)\cap[c,d)$$

L'integrale $(*)$ è definito come un integrale di Ito. Quindi un "integrale di rumore bianco" $\int_{-\infty}^{\infty} X_t f(t)dt$ viene "interpretato" come un integrale stocastico $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dZ_t$. Cerchiamo a questo punto di interpretare anche equazioni del tipo

$$\dot{Y}_t = \alpha(t) Y_t + \beta(t) X_t \qquad (**)$$

ove $\{X_t\}$ è un rumore bianco.

Sia $\{X_t\}$ un rumore bianco con $\{Z_t\}$ il corrispondente processo con incrementi ortogonali. Un processo $\{Y_t, t \in [a,b]\}$ con $E Y_t^{\infty} < \infty$ si dice soluzione di (**) se soddisfa

$$Y_t = Y_a + \int_a^t \alpha(s) Y_s \, ds + \int_a^t \beta(s) \, dZ_s$$

$$a \leq t \leq b$$

Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2(a,b)$. Allora (**) ha una e una sola soluzione, purché $E Y_a^2 < \infty$.

- Se $Y_t^{(0)} = Y_a$, $a \leq t \leq b$, e

$$Y_t^{(n+1)} = \int_a^t \alpha(s) Y_s^{(n)} \, ds + \int_a^t \beta(s) \, dZ_s$$

allora $\{Y_t^{(n)}, a \leq t \leq b; n = 0, 1, \dots\}$ converge in media quadratica all'unica soluzione di $(**)$.

- La soluzione di $(**)$ e' continua in media quadratica su $[a,b]$.