# SPAZI DI PROBABILITÀ

- $\Omega$ insieme di punti
- $S(\Omega)$ insieme dei sottoinsiemi di $\Omega$

$\mathcal{A} \in S(\Omega)$ si dice un'algebra booleana se è chiuso rispetto ad un qualsiasi numero finito di operazioni booleane.

- Le operazioni booleane (complemento, intersezione, etc. etc.) possono essere espresse tutte in termini di due (complemento + intersezione oppure complemento + unione)
- Se $\mathcal{A}$ è un'algebra booleana,

$\mathcal{P}$ si dice una misura elementare di probabilità definita su $\mathcal{A}$

$$0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1, \ \forall A \in \mathcal{A}, \ \mathcal{P}(\Omega) = 1,$$

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B), \ \forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \{\emptyset\}$$

- $\mathcal{A} \in S(\Omega)$ si dice una $\sigma$-algebra se è chiuso rispetto a una qualsiasi infinità numerabile di operazioni booleane

- $\mathcal{P}$ si dice una misura di probabilità se è una misura elementare di probabilità e

$$\underbrace{\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) \quad \forall A_n \in \mathcal{A}, \quad A_j \cap A_i = \{\phi\}, i \neq j}_{\sigma\text{- ADDITIVITÀ}}$$

- L'intersezione di $\sigma$-algebre è una $\sigma$-algebra. Quindi l'intersezione di tutte le $\sigma$-algebre contenenti un insieme $C \in S(\Omega)$ è la più piccola $\sigma$-algebra contenente $C$. Si indica questa $\sigma$-algebra con $\mathcal{A}(C)$ e si dice che $C$ genera $\mathcal{A}(C)$.

- una misura di probabilità elementare definita su un'algebra $\mathcal{C}$ si può sempre "estendere" a una misura di probabilità definita su $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

SPAZIO DI PROBABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

misura di probabilità su $\mathcal{A}$

σ-algebra di $\mathcal{S}(\Omega)$

insieme di punti (risultati di un esperimento)

- gli elementi di $\mathcal{A}$ si dicono EVENTI
- un sottoinsieme di un evento con probabilità zero si dice un INSIEME NULLO

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ si dice COMPLETO se tutti gli insiemi nulli sono eventi

- se $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ non è completo, può essere "completato": $\mathcal{P}$ viene estesa ad una misura di probabilità su $\overline{\mathcal{A}}$, σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ e tutti i suoi insiemi nulli

## Esempio

- $\Omega = [0,1)$
- $\mathcal{B} = \Big\{ [0,1), \emptyset \,;\, [a,b),\ 0 \le a < b \le 1 \,;\ \bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n),\ 0 \le a_i < b_i \le a_j < b_j \le 1,\ i \ne j \Big\}$

  - $\mathcal{B} \subset S(\Omega)$
  - $\mathcal{B}$ è un'algebra:

    $\overline{[0,1)} = \emptyset \in \mathcal{B}$, $\quad \overline{\emptyset} = [0,1) \in \mathcal{B}$

    $\overline{[a,b)} = [0,a) \cup [b,1) \in \mathcal{B}$

  - $\mathcal{B}$ non è una $\sigma$-algebra
  - se $A_j = [a_j, b_j)$, $j = 1,..,N$, $0 \le a_l < b_l \le a_i < b_i \le 1$, $l \ne i$, allora $P\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) = \sum_{j=1}^{N} [b_j - a_j]$ è una misura elementare di probabilità.
  - la $\sigma$-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ generata da $\mathcal{B}$ è la $\sigma$-ALGEBRA DI BOREL di insiemi in $[0,1)$ e il suo completamento $\overline{\mathcal{A}}$ è l'insieme di tutti gli insiemi MISURABILI SECONDO LEBESGUE in $[0,1)$ (intervalli, punti, etc. etc.)

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$
- INTERVALLO $A_i$ = intervallo di $\mathbb{R}$
- RETTANGOLO $= \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in A_i, i = 1, .., n\}$

$\mathcal{R}^n$ sia la $\sigma$-algebra generata dall'insieme di tutti i rettangoli → ALGEBRA DI BOREL in $\mathbb{R}^n$.

VARIABILI ALEATORIE

Sia data $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ e su $\Omega_1$ e $\Omega_2$ siano definite le $\sigma$-algebre $\mathcal{a}_1$ e $\mathcal{a}_2$, rispettivamente. $f$ si dice MISURABILE se

$$\boxed{f^{-1}(A) := \{\omega : f(\omega) \in A\} \in \mathcal{a}_1 \quad \forall A \in \mathcal{a}_2}$$

se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ è definita $\mathcal{R}^n$ e $\mathcal{R}^m$ (algebre di Borel in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$) allora $f$ si dice una funzione BORELIANA

- Tutte le funzioni continue sono boreliane.
- se $\{f_n(\omega)\}$ è una sequenta di funzioni boreliane, allora $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$, è una funzione boreliana
- se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ con $\mathcal{a}_1$ e $\mathcal{a}_2$ σ algebre su $\Omega_1$ e $\Omega_2$, respettivamente, è misurabile, si dice anche una funzione misurabile di $(\Omega_1, \mathcal{a}_1)$ in $(\Omega_2, \mathcal{a}_2)$. Se $(\Omega_2, \mathcal{a}_2) \equiv (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ si dice $\mathcal{a}_1$ misurabile. Se, in più, una misura di probabilità è definita su $\mathcal{a}_1$ allora $f$ si dice una <u>VARIABILE ALEATORIA</u>
- Se $\mathcal{a}_1' \supset \mathcal{a}_1$ ogni funzione $\mathcal{a}_1$ misurabile è anche $\mathcal{a}_1'$ misurabile

Il limite esiste e

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{cases} \sup_n X_n & \text{se } \{X_n\} \text{ è crescente} \\ \inf_n X_n & \text{se } \{X_n\} \text{ è decrescente} \end{cases}$$

- Se $P\{X_n(\omega) < \infty\} = 1$ $\forall n$, allora anche $\lim_{n\to\infty} X_n$ è una variabile aleatoria. Infatti

$$\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n < a\} = \{\omega : \sup_n X_n < a\}$$

$$= \bigcap_n \{\omega : X_n < a\},$$ che è un evento,

e inoltre la σ-algebra di Borel $\mathcal{R}$ è generata da tutti gli intervalli $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Quindi $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n \in A\}$ è un evento per ogni $A \in \mathcal{R}$.

# FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE E DI DENSITÀ

Sia $X : \Omega \to \mathcal{R}$ una variabile aleatoria. Poiché $\mathcal{R}$ è generata dagli intervalli $\{x : -\infty < x < a\}$, $a \in \mathbb{R}$, allora $\{\omega : X(\omega) < a\}$ è un evento. La funzione

$$F_X(a) = \mathcal{P}(\{\omega : X(\omega) < a\})$$

misura di probabilità su $\mathcal{a}$, $\sigma$-algebra definita su $\Omega$

si chiama FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ di $X$. Inoltre

$$\boxed{\mathcal{P}_X(A) = \mathcal{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{R}}$$

definisce una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$

Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie e $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Allora $X$ è una variabile aleatoria. Infatti

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X_i(\omega) \in A_i \,, i = 1, \ldots, n\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}$$

ove $A = \{x : x_i \in A_i \,, i = 1, \ldots, n\}$

con $x = (x_1, \ldots, x_n)$

e quindi $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. La funzione

$$F_X(a) = F_X(a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= P(\{\omega : X_i(\omega) < a_i \,, i = 1, \ldots, n\})$$

$a \in \mathbb{R}^n$

è la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI $X$. ANCORA

$$P_X(A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\})$$
$$A \in \mathcal{R}^m$$

definisce una misura di probabilità su $(\mathbb{R}^m, \mathcal{R}^m)$

- Una misura $P_1$ definita su $(\Omega, \mathcal{A})$ si dice ASSOLUTAMENTE CONTINUA rispetto a $P_2$ definita su $(\Omega, \mathcal{A})$ se $P_2(A) = 0 \Rightarrow P_1(A) = 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$. Altrimenti è detta SINGOLARE. Se $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ e $P_2 \equiv$ misura di Lebesgue allora

$$P_X(A) = \int_A \underbrace{p_X(x)}_{\text{funzione di densità di probabilità}} dx \qquad A \in \mathcal{R}^n$$

purché $X$ sia tale che $P_X$ sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue ovvero

$$\boxed{P_X(a_1, \ldots, a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} p_X(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n}$$

N.B. $P_X(a_1, \ldots, a_i) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_i} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots d$

## SEQUENZE DI EVENTI E DI VARIABILI ALEATORIE

Dato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sia $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ una sequenza di eventi. La sequenza $\{A_n\}$ si dice DECRESCENTE se $A_{n+1} \subset A_n$ o CRESCENTE se $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n$.

Il limite esiste e

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n & \text{se } \{A_n\} \text{ è CRESCENTE} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n & \text{se } \{A_n\} \text{ è DECRESCENTE} \end{cases}$$

Poiché a seconda dei casi

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

oppure $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, allora

anche $\lim_{n\to\infty} A_n$ è un evento.

Inoltre, vale

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)}$$

(CONTINUITÀ SEQUENZIALE DI $P$)

Sia dato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e una sequenza di variabili aleatorie $\{X_n\}$. La sequenza si dice crescente se per ogni $\omega \in \Omega$ e ogni $n$ $X_{n+1}(\omega) \geq X_n(\omega)$. Se $X_{n+1}(\omega) \leq X_n(\omega)$ si dice decrescente

Sia $A$ un evento e

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \in \Omega / A \end{cases}$$

$I_A(\omega)$ e' una variabile aleatoria e si dice <u>FUNZIONE CARATTERISTICA</u> di $A$

Una variabile aleatoria $X$ SEMPLICE se

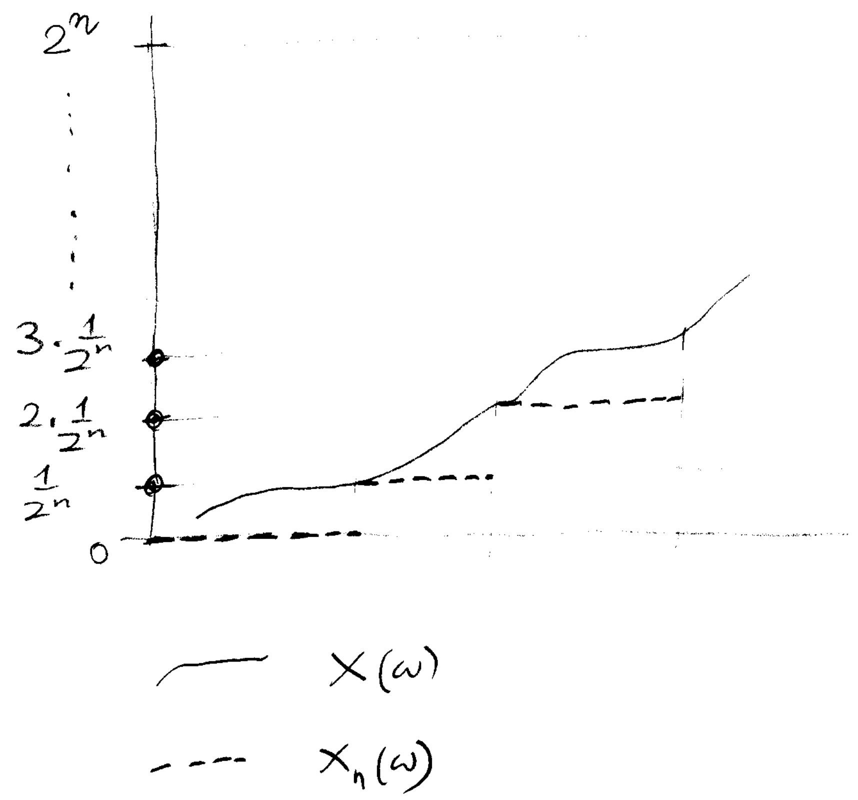
$$X = \sum_{h=1}^{n} \alpha_n I_{A_n}$$

ove $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n$ sono eventi.

$$\boxed{\text{Ogni variabile aleatoria nonnegativa è il limite di una sequenza crescente di variabili aleatorie semplici nonnegative}}$$

Si prenda

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{se } X(\omega) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \\ & \quad 0 \leq k \leq 2^{2n}-1 \\ 2^n & \text{se } X(\omega) \geq 2^n \end{cases}$$




Si ha $\qquad X_{n_1}(\omega) \leq X_{n_2}(\omega)$

se $n_1 \leq n_2$

Per $\omega$ fissato e $n \geq \log_2 |X(\omega)|$

$$\sup_{k \geq n} |X(\omega) - X_n(\omega)| \leq 2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \ \forall \omega$.