A.18

ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI CON m INGRESSI

Dato $\dot{x} = Ax + Bu$ e $\{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*\}$ trovare F tale che

$$\sigma(A+BF) = \{\lambda_1^* \ldots \lambda_n^*\}$$

oppure trovare una legge di controllo

$$u = Fx + v$$

tale che

$$\dot{x} = (A+BF)x + Bv$$

ha autovalori $\{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*\}$

Dimostriamo che:

se rango$(B) = m$ e la coppia (A, B) è raggiungibile, è possibile trovare m vettori riga $g_1, \ldots, g_m$ e m numeri interi $r_1, \ldots, r_m$ tali che

- $\sum_{i=1}^{m} r_i = n$
- il sistema ha grado relativo vettoriale $\{r_1, \ldots, r_m\}$ rispetto alle uscite $y = \begin{pmatrix} g_1 x \\ \vdots \\ g_m x \end{pmatrix}$

A.20

Si ponga

$R_0 = B$

$R_1 = (B \quad AB)$

$\vdots$

$R_i = (B \quad AB \ \dots \ A^i B)$

Per la raggiungibilità di (A, B) esiste $k \leq n$ tale che

$$\text{rango}(R_{k-2}) < n$$
$$\text{rango}(R_{k-1}) = n$$

Si ponga

$$m_1 = n - \text{rango}\, R_{k-2} \qquad ****$$

L'equazione

$$\gamma R_{k-2} = 0 \qquad *$$

ammette m_1 soluzioni indipendenti $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m_1\}$. Quindi

$$\gamma_i A^h B = 0$$

$$0 \leq h \leq k-2, \ 1 \leq i \leq m_1$$

Inoltre

$$A_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 A^{k-1} B \\ \vdots \\ \gamma_{m_1} A^{k-1} B \end{pmatrix}$$

ha rango m_1. Altrimenti

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i A^{k-1} B = 0$$ per certi $c_1, \dots, c_{m_1}$ non tutti nulli

si avrebbe

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i A^k B = 0$$ per il teorema di Cayley-Hamilton

cioè $\left(\sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i \right) R_{k-1} = 0$

che è assurdo poiché rango $R_{k-1} = n$.

Quindi deve essere

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i = 0$$

e quindi $c_1 = \dots = c_{m_1} = 0$ poiché $\gamma_1 \dots \gamma_{m_1}$ sono linearmente indipendenti.

Se $m_1 = m$ allora $\gamma_1 \dots \gamma_m$ sono una soluzione del nostro problema prendendo $g_i := \gamma_i$ con $r_1 = \dots = r_m = k$. Ma $\sum_{i=1}^{m} r_i = n$ poiché $\boxed{mk \leq n}$ (il sistema ha grado relativo vettoriale $\{k, \dots, k\}$) e

$$\boxed{n = \text{rango}\, R_{k-1} \leq mk \leq n}$$

(essendo $R_{k-1} = \left.\overbrace{\begin{pmatrix} \quad * \quad \end{pmatrix}}^{mk}\right\} n$)

(A.23)

$$m\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}}^{n}\right.\overbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{R}_{k-1} \end{pmatrix}}^{n\cdot k}\Big\}n = \left(\begin{array}{c|c} O & \overbrace{A_1}^{m} \end{array}\right)\Big\}m$$

Allora si assuma $m_1 < m$. Dobbiamo cercare altri $m - m_1$ vettori linearmente indipendenti. Consideriamo le soluzioni di

$$r\,\mathcal{R}_{k-3} = 0 \qquad (**)$$

Si tenga conto che i $2m_1$ vettori

$$r_1, \dots, r_{m_1}, r_1 A, \dots, r_{m_1} A$$

sono linearmente indipendenti e soddisfano (**). Infatti quest'ultima proprietà deriva da (*). Inoltre supponiamo che siano dipendenti

$$\sum_{i=1}^{m_1} (c_i r_i + d_i r_i A) = 0$$

per c_i, d_i non tutti nulli

quindi

$$\sum_{i=1}^{m_1} (c_i \gamma_i + d_i \gamma_i A) A^{k-2} B = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m_1} d_i \gamma_i \right) A^{k-1} B = 0$$

cioè le righe di A_1 sono dipendenti

$\Rightarrow$ assurdo.

Si conclude che le soluzioni indipendenti di (**) sono almeno $2m_1$. Supponiamo che siano $> 2m_1$ in particolare $2m_1 + m_2$. Quindi esistono m_2, in aggiunta ai $2m_1$ di cui sopra, vettori indipendenti a completamento dello spazio delle soluzioni di (**).

La matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 A^{k-1} B \\ \vdots \\ \gamma_{m_1} A^{k-1} B \\ \gamma_{m_1+1} A^{k-2} B \\ \vdots \\ \gamma_{m_1+m_2} A^{k-2} B \end{pmatrix}$$

ha rango $m_1 + m_2$. Infatti se così non fosse

$$\sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i A^{k-1} B + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i \gamma_i A^{k-2} B = 0$$

per c_i, d_i non tutti nulli, e quindi

$$\left(\sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i A + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i \gamma_i \right) A^{k-2} B = 0$$

Pertanto

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m_1} c_i \gamma_i A + \sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} d_i \gamma_i \qquad (***)$$

soddisfa sia $(**)$ (per costruzione) che $(*)$.

Quindi γ si può esprimere nella base delle soluzioni di $*$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m_1} p_i \gamma_i$$

Sostituendo in $***$, otteniamo che $\gamma_1, \dots \gamma_{m_2}, \gamma_1 A, \dots, \gamma_{m_1} A$ non sono indipendenti $\longrightarrow$ CONTRADDIZIONE!

Se $m = m_1 + m_2$ l'insieme di vettori $\gamma_1, \dots, \gamma_{m_1+m_2}$ è una soluzione del problema, con

$$g_i = \gamma_i \quad 1 \leq i \leq m_1 + m_2 = m$$

avendo

$$r_1 = \dots = r_{m_1} = k$$
$$r_{m_1+1} = \dots = r_{m_1+m_2} = r_m = k-1$$

Inoltre $r_1 + \dots + r_m = n$ poiché

$$n = \text{rango}(R_{k-2}) + m_1 \leq m(k-1) + m_1 =$$

$$= m_1 k + m_2(k-1) \leq n .$$

(per $****$)

Se $m_1 + m_2 < m$ si itera il procedimento.

Dopo $k-1$ iterazioni sono stati costruiti m_{k-1} gruppi di vettori

$$r_i, r_i A, \dots, r_i A^{k-2} \qquad 1 \le i \le m_1$$

$$r_i, r_i A, \dots, r_i A^{k-3} \qquad m_1 + 1 \le i \le m_1 + m_2$$

$$\vdots$$

$$r_i, r_i A \qquad m_1 + \dots + m_{k-3} + 1 \le i \le m_1 + \dots + m_{k-2}$$

$$r_i \qquad m_1 + \dots + m_{k-2} + 1 \le i \le m_1 + \dots + m_{k-1}$$

che formano una base dello spazio delle soluzioni di

$$r B = 0$$

Siccome rango $B = m$ allora

$$n - m = (k-1) m_1 + (k-2) m_2 + \dots + m_{k-1}$$

~~XXXXX~~

A.28

Con argomenti simili ai precedenti si vede che anche

$$\gamma_i, \gamma_i A, \dots, \gamma_i A^{k-1} \qquad 1 \le i \le m_1,$$

$$\gamma_i, \gamma_i A, \dots \gamma_i A^{k-2} \qquad m_1 + 1 \le i \le m_1 + m_2$$

$$\vdots$$

$$\gamma_i, \gamma_i A, \gamma_i A^2 \qquad m_1 + \dots + m_{k-3} + 1 \le i \le m_1 + \dots + m_{k-2}$$

$$\gamma_i, \gamma_i A \qquad m_1 + \dots + m_{k-2} + 1 \le i \le m_1 + \dots + m_{k-1}$$

sono indipendenti. Perciò

$$(k m_1 + (k-1) m_2 + \dots + 2 m_{k-1}) \le n$$

Se vale l'uguaglianza, il procedimento termina. Altrimenti

$$m_k := n - (k m_1 + (k-1) m_2 + \dots + 2 m_{k-1})$$

e si vede che

$$m_1 + \dots + m_k = m$$

(conseguenza di ~~XXXXX~~).

Infine si trovano m_k vettori riga $\{r_i : m_1 + \dots + m_{k-1} + 1 \leq i \leq m\}$ che insieme a quelli precedenti sono un insieme di n vettori indipendenti. Inoltre,

se $g_i = r_i \quad 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_k = m$

allora il procedimento termina con

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{m_1} = k$$
$$\tau_{m_1+1} = \dots = \tau_{m_1+m_2} = k-1$$
$$\vdots$$
$$\tau_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} = \dots = \tau_m = 1$$

e si ha $\sum_{i=1}^{m} \tau_i = n$

$$\underbrace{\{\tau_1, \dots, \tau_m\}}_{\text{INDICI DI CONTROLLABILITÀ}}$$

A.30

Usando la trasformazione di coordinate $z = T x$ con

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}$$

$$T_i = \begin{pmatrix} g_i \\ g_i A \\ \vdots \\ g_i A^{r_i - 1} \end{pmatrix}$$

e $$z_i = \begin{pmatrix} \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{ir_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ \vdots \\ g_i A^{r_i-1} \end{pmatrix} x$$

si ottengono da $\dot{x} = Ax + Bu$

m gruppi di equazioni

$$\dot{\xi}_{i1} = \xi_{i2}$$
$$\dot{\xi}_{i2} = \xi_{i3}$$
$$\vdots$$
$$\dot{\xi}_{ir_i} = g_i A^{r_i} T^{-1} z + g_i A^{r_i-1} B u$$

cioè $\dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} v$.

A.31

Si ponga per qualche k, Q

$$u = k T^{-1} z + Q v$$

Allora

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{1 r_1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{m, r_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ g_m A^{r_m} \end{pmatrix} T^{-1} z + \begin{pmatrix} g_1 A^{r_1 - 1} B \\ \vdots \\ g_m A^{r_m - 1} B \end{pmatrix} (k T^{-1} z + Q v)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} g_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ g_m A^{r_m} \end{pmatrix} + U k \right] T^{-1} z + U Q v$$

MATRICE
DI DISACCOPPIAMENTO

perciò se $k = -U^{-1} \begin{pmatrix} g_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ g_m A^{r_m} \end{pmatrix}$, $Q = U^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{z}_{1 r_1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{m r_m} \end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

A. 32

Quindi $\dot{x} = Ax + Bu$

diventa prima $\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$ (dopo cambiamento coordinate)

poi $\dot{z} = \tilde{A}_{BR} z + \tilde{B}_{BR} v$ (dopo feedback $u = KT^{-1}z + Qv$)

con

$$\tilde{A}_{BR} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{BR} = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_m \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; i = 1, \dots, m,$$

FORMA CANONICA DI BRUNOWSKI

$A_i \; (r_i \times r_i)$

$b_i \; (r_i \times 1)$

Risolviamo ora il problema di assegnazione degli autovalori.

Supponiamo che gli autovalori desiderati siano

$$\lambda_1^*, \dots, \lambda_{r_1}^*, \lambda_{r_1+1}^*, \dots, \lambda_{r_2+r_1}, \dots, \dots, \lambda_{\sum_{i=1}^{m-1} r_i}$$

$$\lambda^*_{\sum_{i=1}^{m-1} r_i+1}, \dots, \lambda_n^* \quad \left(\text{si ricordi } \sum_{i=1}^{m} r_i = n\right)$$

Definiamo $v = \tilde{F} z$

ove

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{F}_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_i = \left(-a_{i0}^* \;\; -a_{i1}^* \;\; \dots \;\; \dots \;\; -a_{i,r_i-1}^*\right)$$

ove

$$p_i^*(\lambda) = (\lambda - \lambda^*_{r_i+1}) \dots (\lambda - \lambda^*_{r_{i+1}}), \quad r_0 = 0$$

$$:= a_{i0}^* + a_{i1}^* \lambda + \dots + a_{i,r_i-1}^* \lambda^{r_i-1} + \lambda^{r_i}$$

Quindi per costruzione

$$\sigma\left(\tilde{A}_{BR} + \tilde{B}_{BR}\tilde{F}\right) = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\}$$

Si definisce infine

$$F = K + Q\tilde{F}T = -U^{-1}\left[\begin{pmatrix} g_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ g_m A^{r_m} \end{pmatrix} - \tilde{F}T\right]$$

$u = Fx$. Per costruzione

$$\sigma(A + BF) = \sigma\left(T(A+BF)T^{-1}\right)$$

$$= \sigma\left(TAT^{-1} + TB \cdot \left(KT^{-1} + Q\tilde{F}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(\tilde{A} + \tilde{B}\left(KT^{-1} + Q\tilde{F}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(\underbrace{\tilde{A}_{BR}}_{:= \tilde{A} + \tilde{B}KT^{-1}} + \underbrace{\tilde{B}_{BR}}_{:= \tilde{B}Q} \cdot \tilde{F}\right) = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\}$$